Jaromír Šimša

Geometrický model obecné kubické rovnice

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82 (2007), No. 2, 1–6

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146190`

Geometrický model obecné kubické rovnice

Jaromír Šimša, PřF MU Brno

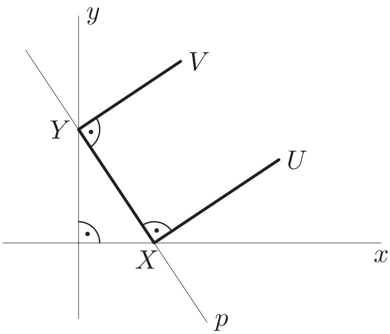
Z hodin algebry víte, že *kubickou* rovnicí rozumíme každou rovnici

$$as^3 + bs^2 + cs + d = 0 \tag{1}$$

s neznámou s a danými reálnými čísly a, b, c a d, zvanými *koeficienty* rovnice (1). Neklademe-li na ně jiné podmínky než $a \neq 0$, mluvíme o *obecné* kubické rovnici.

Řešit rovnici (1) cestou algebraických úprav a výpočtů třetích odmocnin je možné (výsledná vyjádření kořenů jsou známa jako *Cardanův vzorec*), avšak celý postup je poměrně složitý a nebudeme jej zde popisovat.*) V tomto krátkém příspěvku se seznámíme pouze s jednou planimetrickou konstrukční úlohou, která má sice jednoduché zadání, její řešení však vede na obecnou rovnici (1) s koeficienty majícími velmi názorný geometrický význam. Celému výkladu porozumí každý z vás, kdo je obeznámen se základy analytické geometrie.

Úloha. *V rovině jsou dány dvě navzájem kolmé přímky x, y a dva body U, V. Sestrojte přímku, která protne přímku x v takovém bodě X a přímku y v takovém bodě Y, že jak body U a X, tak body V a Y leží na stejné kolmici k přímce p.*

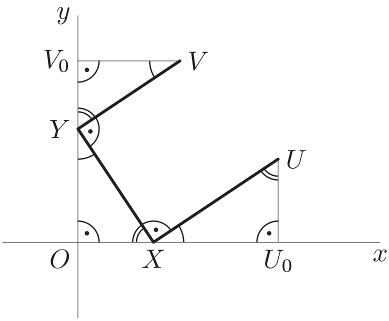


Obr. 1

*) Řešení kubické rovnice včetně Cardanova vzorce najdete např. v brožuře M. Šisler, J. Andrys: O řešení algebraických rovnic, Mladá fronta, Praha 1964, str. 76–77.

Situace úlohy je znázorněna na obr. 1. Proč jsme znění úlohy nepodali v jednodušší podobě odvolávajíce se na pravoúhle lomenou čáru $UXYV$? Nechtěli jsme totiž vyloučit takové zvláštní případy, kdy platí $X = Y$, $U = X$ nebo $V = Y$. Rozmyslete sami, při jaké vzájemné poloze daných kolmic x, y a daných bodů U, V taková výjimečná řešení úloha připouští a zda tehdy mohou existovat i jiná řešení, která vytvoří čáru $UXYV$ jako na obr. 1.

Určitě vám prospěje i malá „geometrická“ rozcvička, když si předchozí obrázek překreslíte a s tužkou v ruce zkusíte aspoň chvíli přemýšlet, jak byste neznámou přímku p určili a sestrojili. Možná vás napadne, že by bylo užitečné uvažovat o poměrech délek stran tří navzájem podobných trojúhelníků OXY, U_0UX a V_0YV, kde O značí průsečík daných přímek x, y a body U_0, V_0 jsou kolmé průměty bodů U, V na ně (obr. 2).



Obr. 2

Zmíněný nápad nyní uskutečníme prostředky analytické geometrie. Bude to mít tu výhodu, že všechny vyhovující přímky p určíme jednotným postupem bez ohledu na to, na kterých ramenech pravých úhlů, jež dané přímky x, y svírají, průsečíky X, Y leží.

Podle dané dvojice kolmic x, y s průsečíkem O zavedeme kartézskou souřadnicovou soustavu Oxy a označíme $U[b, a]$ a $V[d, c]$ souřadnice daných bodů U, V v této soustavě.*) Hledaná přímka p má být různoběžná jak s osou x, tak s osou y, proto bude mít v soustavě Oxy (konečnou) nenulovou směrnici, kterou označíme s, tedy $s \in \mathbb{R}$ a $s \neq 0$. Jak víme, takovou přímku p je pak možné zadat směrnicovou rovnicí

$$p\colon y = sx + t, \tag{2}$$

*) Připadá-li vám pořadí písmen v označení souřadnic obou bodů poněkud neobvyklé, vězte, že je vybráno tak, aby výsledkem dalšího zkoumání byla právě rovnice (1) s koeficienty v abecedním pořadí.

kde $t \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta a $[x, y]$ proměnné souřadnice libovolného bodu přímky p. Naší úlohou je určit neznámé koeficienty s, t tak, aby přímka p určená rovnicí (2) měla požadované vlastnosti. Vyjádříme proto nejprve souřadnice průsečíků X, Y přímky p s osou x, resp. y. Dostaneme je, když do rovnice (2) dosadíme $y = 0$, resp. $x = 0$:

$$X = \left[\frac{-t}{s}, 0\right] \quad \text{a} \quad Y = [0, t]$$

Vektory $U - X$ a $V - Y$ tudíž mají souřadnice

$$U - X = \left(b + \frac{t}{s}, a\right) \quad \text{a} \quad V - Y = (d, c - t),$$

zatímco směrový vektor $\boldsymbol{u}$ přímky p se směrnicí s má souřadnice $\boldsymbol{u} = (1, s)$. Dosadíme je do skalárních součinů ve dvojici rovností

$$(U - X) \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{a} \quad (V - Y) \cdot \boldsymbol{u} = 0,$$

které přesně vyjadřují zadání úlohy, tedy podmínky $UX \perp p$ (pokud $U \neq X$) a $VY \perp p$ (pokud $V \neq Y$). Po dosazení souřadnic tak dostaneme pro neznámé s, t soustavu rovnic

$$\left(b + \frac{t}{s}\right) + as = 0 \quad \text{a} \quad d + (c - t)s = 0,$$

ze které vyloučíme neznámou t, když ze druhé rovnice vyjádříme

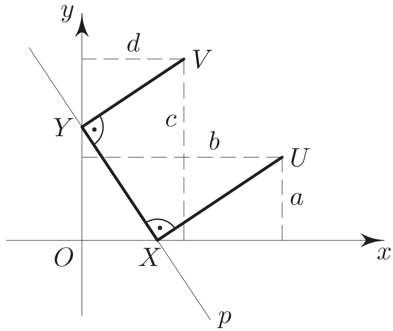
$$t = c + \frac{d}{s} \tag{3}$$

(připomínáme, že $s \neq 0$) a dosadíme do první rovnice. Vyjde

$$as + b + \frac{c}{s} + \frac{d}{s^2} = 0,$$

což po vynásobení nenulovou hodnotou s^2 dává právě kubickou rovnici (1) z úvodu našeho příspěvku! Naopak, je-li $s \in \mathbb{R}$ libovolný nenulový kořen rovnice (1), ke kterému určíme hodnotu t podle vztahu (3), pak přímka p o rovnici (2) je zřejmě řešením uvažované planimetrické úlohy.

Shrňme výsledek našich úvah: *Řešit v oboru* $\mathbb{R}$ *kubickou rovnici* (1) *s danými reálnými koeficienty* a, b, c, d *znamená hledat směrnice přímek, které jsou řešením naší úlohy s danými body* $U[b, a]$ *a* $V[d, c]$ *zapsanými v kartézské souřadnicové soustavě* Oxy (obr. 3 pro případ kladných koeficientů).



Obr. 3

Pro ilustraci výsledku vybereme kubickou rovnici

$$(2s + 1)(s - 1)(s - 2) = 0$$

s kořeny $s_1 = -\frac{1}{2}$, $s_2 = 1$ a $s_3 = 2$. Snadným roznásobením zjistíme, že jde o rovnici (1) s koeficienty $a = 2$, $b = -5$, $c = 1$ a $d = 2$, kterým odpovídá naše planimetrická úloha s body $U[-5, 2]$ a $V[2, 1]$. Při takovém zadání tato úloha bude mít za řešení tři přímky p_i o rovnici (2) se směrnicí $s = s_i$ a koeficientem t_i, který dostaneme po dosazení do vztahu (3). Vyjdou rovnice

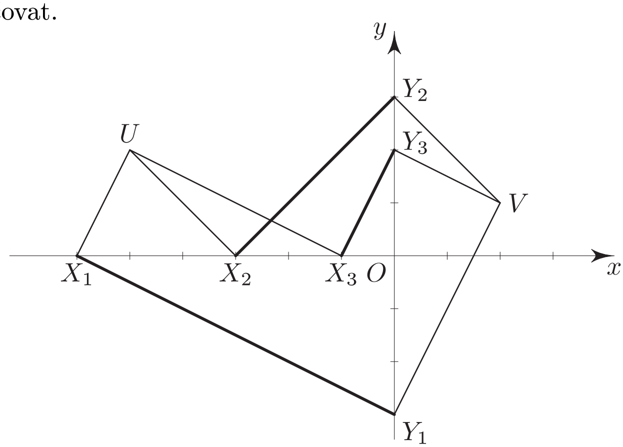
$$p_1\colon y = -\frac{x}{2} - 3, \quad p_2\colon y = x + 3, \quad p_3\colon y = 2x + 2.$$

Všechna tři řešení vidíte na obr. 4.

Vraťme se od konkrétního příkladu k obecnému zadání zkoumané úlohy a posuďme možnost *sestrojení* jejího řešení. Z teorie geometrických konstrukcí je známo, že neexistuje žádný obecný postup, kterým by *euklidovsky* (tj. pomocí pravítka a kružítka) *bylo možné* na číselné ose *sestrojit* ze známých obrazů koeficientů a, b, c, d obrazy kořenů rovnice (1).*) Protože jsme na takovou rovnici převedli naši planimetrickou

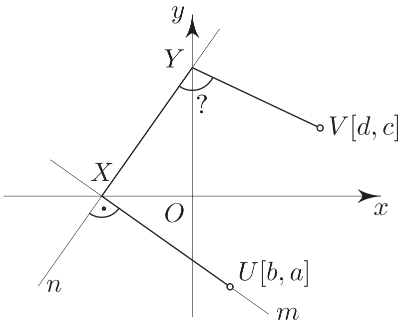
*) Stále se objevují jedinci, kteří tento nezvratitelný výsledek neberou na vědomí a hledají např. euklidovskou konstrukci pro *trisekci* úhlu, tedy pro rozdělení daného úhlu (o obecné velikosti) na tři menší shodné úhly. Přitom i v tomto případě jde o úlohu ekvivalentní kubické rovnici.

úlohu, znamená to, že hledanou přímku p nelze pro obecně dané kolmice x, y a body U, V pomocí pravítka a kružítka sestrojit. Říkáme, že taková konstrukční úloha *není euklidovsky řešitelná*. Podívejme se proto, jakými jinými prostředky můžeme počet a polohu jednotlivých řešení naší úlohy určovat.



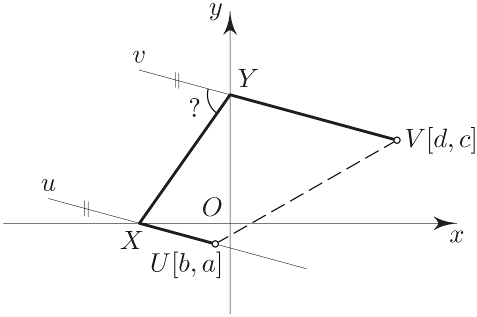
Obr. 4

Předpokládejme, že v nákresně máme vyznačeny dané kolmice x, y a dané body U, V. Na průsvitku nakresleme dvě navzájem kolmé přímky m, n s průsečíkem X a přiložme ji na nákresnu tak, aby bod X padl na přímku x a bod U na přímku m. Při zachování těchto dvou podmínek budeme průsvitkou pohybovat a zkoumat, kdy rovněž úhel XYV, kde Y je průsečík přímek n a y, bude pravý (obr. 5).



Obr. 5

Jistě si také dokážete představit jinou pomůcku: dvojici pravítek spřažených kloubovým mechanismem tak, aby hrany pravítek tvořily dvojici rovnoběžek s plynule se měnící vzdáleností. Tato pomůcka by nám umožnila danými body U, V prokládat dvojici rovnoběžek u, v proměnného směru (obr. 6). Při těchto změnách rovnoběžek u, v bychom pak pozorovali, kdy příčka XY, kde X, Y jsou průsečíky dvojic přímek x, u, resp. y, v, bude k přímkám u, v kolmá (obr. 6).



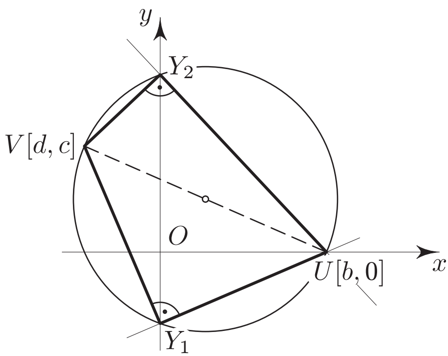
Obr. 6

Obě dvě zmíněné dynamické pomůcky si můžete snadno připravit na svém počítači pomocí vhodného geometrického softwaru, například programu Cabri. Budete pak mít možnost velice pohodlně a názorně určovat počet a přibližné hodnoty reálných kořenů jakékoliv konkrétní kubické rovnice (1).

Poznamenejme nakonec, že v případě $U = X$ dostaneme z naší úlohy se zadanými body $U[b, 0]$ a $V[d, c]$ model pro řešení obecné kvadratické rovnice

$$bs^2 + cs + d = 0. \tag{4}$$

V takové situaci hledáme k daným bodům U, V vlastně pouze bod Y na dané přímce y tak, aby úhel UYV byl pravý. K řešení zřejmě stačí sestrojit Thaletovu kružnici nad průměrem UV (obr. 7). Kořeny rovnice (4) pak jsou směrnice vyhovujících přímek UY.



Obr. 7