Emil Calda

O rovnici $x^n + y^n = z^{n+1}$

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82 (2007), No. 1, 10–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146182

Přínos výsledku Douadyho a Coudera je zejména ve vyvrácení evolučního přístupu k fylotaxi, tj. teorie související s otázkou uvedenou na začátku: Věděla by slunečnice sama, co má společného s Fibonacciovými čísly? Část vědců se domnívala, že ano. Věřila totiž správnosti následujícího argumentu: Semínka na rostlinách podobných slunečnici v dávné a dávné historii jejich vývoje rostla náhodně, avšak rostliny, jejichž semínka byla blízko u sebe, byly přirozeným výběrem preferovány před ostatními, a proto dnes téměř na všech rostlinách pozorujeme vzory odpovídající Fibonacciovým číslům, jelikož ty jsou z hlediska šetření prostoru nejvýhodnější.

Z výsledku Douadyho, Coudera a později i dalších ovšem plyne, že spirálové vzory jsou výsledkem pouze dynamického růstového procesu „odpuzujících" se semínek, že tedy nejsou zakódovány v genech rostliny, ani nevznikaly nějakou složitou evoluční cestou. Přičemž ono odpuzování semínek může být realizováno kupříkladu pouhým dělením a růstem buněk mezi zárodky budoucích semínek.

Literatura

[1] Adler I., Barabe D., Jean R. V.: *A history of the Study of Phyllotaxis.* Annals of Botany **80** (1997), 231–244.

[2] Douady S., Couder Y.: *La physique des spirales végétales.* La Recherche 250, Vol. 24, 26–35 (Janvier 1993).

[3] Interaktivní internetová stránka o studiu fylotaxe: `http://www.math.smith.edu/~phyllo/` (anglicky).

O rovnici $x^n + y^n = z^{n+1}$

Emil Calda, MFF UK Praha

Jak jistě víte, velkou Fermatovou větou se nazývá tvrzení, které poprvé vyslovil francouzský matematik Pierre Fermat (1601–1665):

Pro žádné přirozené číslo $n > 2$ neexistují přirozená čísla x, y, z taková, že platí

$$x^n + y^n = z^n.$$

Víte asi také, že důkaz této věty odolával úsilí matematiků téměř čtyři sta let a že ho teprve nedávno podal anglický matematik Andrew Wiles.

My se však budeme zabývat otázkou, která Fermatovu větu sice připomíná, ale kterou lze zodpovědět mnohem snadněji. Ptejme se, ke kterým přirozeným číslům n existují přirozená čísla x, y, z taková, že platí

$$x^n + y^n = z^{n+1}.$$

Je zřejmé, že pro $n = 1$ je trojic čísel x, y, z nekonečně mnoho – platí například:

$$1 + 3 = 2^2, \quad 2 + 7 = 3^2, \quad 5 + 11 = 4^2, \quad 61 + 39 = 10^2$$

Najdeme nyní některé takovéto trojice pro $n = 2$ a pokusíme se tyto výsledky zobecnit.

$$\begin{aligned} 5^3 &= 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^2 + (1 \cdot 5)^2 = 10^2 + 5^2 \\ 13^3 &= 4 \cdot 13^2 + 9 \cdot 13^2 = (2 \cdot 13)^2 + (3 \cdot 13)^2 = 26^2 + 39^2 \\ 25^3 &= 9 \cdot 25^2 + 16 \cdot 25^2 = (3 \cdot 25)^2 + (4 \cdot 25)^2 = 75^2 + 100^2 \end{aligned}$$

Všimněme si např. poslední rovnosti; je vidět, že čísla $x = 75$, $y = 100$, $z = 25$ jsou určena čísly $a = 3$, $b = 4$:

$$z = 3^2 + 4^2, \quad x = 3 \cdot \left(3^2 + 4^2\right), \quad y = 4 \cdot \left(3^2 + 4^2\right)$$

Inspirujme se tímto pozorováním a ověřme, jakou rovnost dostaneme, zvolíme-li (pro $n = 2$) například $a = 2$, $b = 7$:

$$z = 2^2 + 7^2 = 53, \quad x = 2 \cdot 53, \quad y = 7 \cdot 53$$

Snadno zjistíme, že pro tato čísla vskutku platí:

$$53^3 = (2 \cdot 53)^2 + (7 \cdot 53)^2 = 106^2 + 371^2$$

Z těchto ukázek je vidět, že pro každé přirozené číslo n se přirozená čísla x, y, z splňující uvedenou rovnici dají sestavit takto:

K danému přirozenému číslu n zvolíme libovolně přirozená čísla a, b a položíme

$$x = a\,(a^n + b^n)\,, \quad y = b\,(a^n + b^n)\,, \quad z = a^n + b^n;$$

je vidět, že tato čísla x, y, z dané rovnici vyhovují:

$$x^n + y^n = a^n (a^n + b^n)^n + b^n (a^n + b^n)^n = (a^n + b^n)^{n+1} = z^{n+1}$$

Tím jsme nalezli odpověď na otázku z úvodu tohoto krátkého článku:

Ke každému přirozenému číslu n existuje nekonečně mnoho trojic přirozených čísel x, y, z, pro která platí

$$x^n + y^n = z^{n+1}.$$

Všimněte si, jak se řešení této rovnice liší od řešení rovnice Fermatovy: Zatímco Fermatově rovnici žádná přirozená čísla x, y, z pro žádné přirozené $n > 2$ nevyhovují, „naší“ rovnici vyhovuje nekonečně mnoho trojic těchto čísel, a to pro každé přirozené n. Z našich úvah ovšem není jasné, zda zkoumaná rovnice nemá ještě jiná řešení než ta, která jsme objevili popsaným „receptem“.

* * * * *

ALGEBRAICKÝ VÝRAZ

Ve své síni mistr děl mi fotografický:
Odložte, pane, Váš výraz algebraický
nebo ho alespoň trochu upravte,
něco zkraťte něco zrušte něco dosaďte,
užijte matematický aparát,
ať mi Váš výraz nezničí aparát.
Vrásku z čela hned jsem zcela vyhladil,
do oka ohnivou jiskru dosadil
a změnil jsem ze zištného důvodu
znaménko svého třídního původu.
Úprava výrazu se mi povedla –
byl jsem třetí v soutěži Miss Algebra!

*Emil Calda**)

*) *Úvod do obecné teorie prostoru,* Karolinum, Praha, 2003