Rozhledy matematicko-fyzikální

Dušan Jedinák

Užitočné aritmetické i algebraické úpravy

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 4, 50–54

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146176

Užitočné aritmetické i algebraické úpravy

Dušan Jedinák, Trnavská univerzita v Trnave

Na vybraných príkladoch ponúkame ukážky matematickej „klasiky“, ktoré ukazujú zmysluplnosť základných algebraických a aritmetických úprav.

Čo je väčšie?

Rozhodnite a zdôvodnite, ktoré zo zadaných čísiel je väčšie (bez kalkulačky a tabuliek):

a) $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{7}+\sqrt{10}$, $\sqrt{3}+\sqrt{19}$

c) 639^9, 638^9+638^8

d) $\dfrac{13^{1978}+1}{13^{1979}+1}$, $\dfrac{13^{1979}+1}{13^{1980}+1}$

Riešenie

a) Ak obe čísla umocníme na desiatu, tak dostaneme

$$\left(\sqrt[5]{5}\right)^{10}=25, \quad \left(\sqrt{2}\right)^{10}=32.$$

Pretože $32>25$, tak „spätným postupom“ dostávame $\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$.

b) Predpokladajme (hypotéza), že platí $\sqrt{7}+\sqrt{10}<\sqrt{3}+\sqrt{19}$ a postupne upravujme:

$$\begin{aligned}
\sqrt{7}+\sqrt{10}&<\sqrt{3}+\sqrt{19} \quad /^2\\
7+2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{10}+10&<3+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}+19\\
2\cdot\sqrt{70}&<5+2\cdot\sqrt{57} \quad /^2\\
4\cdot 70&<25+20\cdot\sqrt{57}+4\cdot 57\\
27&<20\cdot\sqrt{57}
\end{aligned}$$

Pretože $\sqrt{57}>2$, tak to platí. Dôkaz by sme viedli „spätným postupom“. Ukázalo sa, že číslo $\sqrt{3}+\sqrt{19}$ je väčšie ako číslo $\sqrt{7}+\sqrt{10}$.

c) Platí:

$$639^9 = 639 \cdot 639^8, \quad 638^9 + 638^8 = 638^8 \cdot (638+1) = 639 \cdot 638^8$$

Pretože $639^8 > 638^8$, tak $639^9 > 638^9 + 638^8$.

d) Ak si označíme $A = 13^{1978}$, môžeme rozdiel daných čísiel vyjadriť takto:

$$\frac{A+1}{13A+1} - \frac{13A+1}{13^2A+1} = \frac{169A^2 + 170A + 1 - 169A^2 - 26A - 1}{(13A+1)\cdot(169A+1)} =$$
$$= \frac{144A}{(13A+1)\cdot(169A+1)}$$

Pretože posledný zlomok je kladný, je prvé číslo väčšie ako druhé.

Kalkulačka nepomáha?

Dokážte, že číslo $123^{123} - 57^{57}$ je deliteľné desiatimi.

Riešenie

Stačí ukázať, že na konci tohto čísla je nula, to znamená, že čísla 123^{123} a 57^{57} majú na konci rovnakú číslicu.

U mocnín

$$3^1 = 3, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27, \quad 3^4 = 81, \quad 3^5 = 243, \quad \ldots$$

čísla 3 sa na konci pravidelne striedajú štyri cifry 3, 9, 7, 1. Ďalej

$$123^{123} = 123^{120+3} = 123^{120} \cdot 123^3.$$

Číslo $123^{120} = 123^{30\cdot 4}$ má na konci číslicu 1, číslo 123^3 má na konci číslicu 7, to znamená, že číslo 123^{123} má poslednú číslicu $1 \cdot 7 = 7$.

Podobne u mocnín

$$7^1 = 7, \quad 7^2 = 49, \quad 7^3 = 343, \quad 7^4 = 2\,401, \quad 7^5 = 16\,807, \quad \ldots$$

čísla 7 sa striedajú na konci štyri cifry v poradí 7, 9, 3, 1. Pretože

$$57^{57} = 57^{14\cdot 4} \cdot 57^1,$$

má číslo 57^{57} poslednú číslicu $7 \cdot 1 = 7$.

Teda rozdiel $123^{123} - 57^{57}$ má poslednú cifru $7 - 7 = 0$ a je deliteľný desiatimi.

To, čo chcú, sme si pripravili

Stanovte hodnotu súčinu pq, ak p, q sú navzájom rôzne reálne čísla, pre ktoré platí:

$$\frac{1}{1+p^2}+\frac{1}{1+q^2}=\frac{2}{1+pq}$$

Riešenie

Nechcú od nás vedieť, aká je hodnota zvlášť pre p a zvlášť pre q, tak si všímajme iba súčin pq. Ak platí daná rovnosť, tak z nej postupne vyplýva:

$$\begin{aligned}\left(1+q^2\right)\cdot(1+pq)+\left(1+p^2\right)\cdot(1+pq)&=2\cdot\left(1+p^2\right)\cdot\left(1+q^2\right)\\ 1+q^2+pq+pq^3+1+p^2+pq+p^3q&=2+2p^2+2q^2+2p^2q^2\\ p^3q-2p^2q^2+pq^3&=p^2-2pq+q^2\\ pq\cdot\left(p^2-2pq+q^2\right)&=(p-q)^2\\ pq\cdot(p-q)^2-(p-q)^2&=0\\ (p-q)^2\cdot(pq-1)&=0\end{aligned}$$

Pretože $p\neq q$ (vyplýva to z textu úlohy), tak musí byť $pq-1=0$, teda $pq=1$.

Zázračné krátenie zlomkov

Nájdite všetky zlomky s dvojciferným čitateľom a dvojciferným menovateľom (v ktorých sa cifry neopakujú) umožňujúce naznačené „zázračné krátenie“:

$$\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5}$$

Riešenie

Aj keď sa takéto „krátenie“ v žiadnej škole neuznáva, existujú prípady, v ktorých to „funguje“. Hľadáme zlomky tvaru

$$\frac{10a+b}{10b+c},$$

kde $a,b,c\in\{1,2,3,\dots,9\}$, $a\neq b$, $b\neq c$, pre ktoré platí

$$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}\,. \tag{1}$$

Z (1) postupne dostaneme:

$$
\begin{aligned}
c \cdot (10a + b) &= a \cdot (10b + c) \\
c \cdot (10a + b - a) &= 10ab \\
c &= \frac{10ab}{9a + b} \\
c &= \frac{9ab + b^2 + ab - b^2}{9a + b} \\
c &= \frac{b \cdot (9a + b) + ab - b^2}{9a + b} \\
c &= b + \frac{b \cdot (a - b)}{9a + b} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Z rovnosti (2) vieme, že číslo

$$\frac{b \cdot (a - b)}{9a + b} \qquad (3)$$

je celé. Keby platilo $a > b$, bolo by číslo (3) nielen celé, ale aj kladné, platilo by preto:

$$
\begin{aligned}
\frac{b \cdot (a - b)}{9a + b} &\geqq 1 \\
ab - b^2 &\geqq 9a + b \\
a \cdot (b - 9) &\geqq b \cdot (b + 1) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Pretože pravá strana nerovnosti (4) je kladná, bolo by $b > 9$, čo nieje pravda. Neplatí teda $a > b$ a pretože čísla a, b sú rôzne, je $b > a$.

Rovnosť (1) môžeme upraviť aj na tvar

$$10a \cdot (b - c) = c \cdot (b - a), \qquad (5)$$

z ktorého vidno, že rozdiely $b - c$ a $b - a$ majú tie isté znamienka. Preto $b > c$.

Na ľavej strane rovnosti (5) je číslo s nulou na konci, teda aj na jej pravej strane musí byť číslo končiace nulou, t. j. súčin $c \cdot (b - a)$ je súčinom čísla 5 a párneho čísla. Ak zvážime, že $b > c$ i $b > a$, tak preveríme týchto 24 možností:

$c = 5$	$b - a$ je párne	c je párne	$b - a = 5$
$c = 5$	$b - a = 6 - 2$	$c = 2$	$b - a = 6 - 1$
$c = 5$	$b - a = 6 - 4$	$c = 2$	$b - a = 7 - 2$
$c = 5$	$b - a = 7 - 1$	$c = 2$	$b - a = 8 - 3$
$c = 5$	$b - a = 7 - 3$	$c = 2$	$b - a = 9 - 4$
$c = 5$	$b - a = 7 - 5$	$c = 4$	$b - a = 6 - 1$
$c = 5$	$b - a = 8 - 2$	$c = 4$	$b - a = 7 - 2$
$c = 5$	$b - a = 8 - 4$	$c = 4$	$b - a = 8 - 3$
$c = 5$	$b - a = 8 - 6$	$c = 4$	$b - a = 9 - 4$
$c = 5$	$b - a = 9 - 1$	$c = 6$	$b - a = 7 - 2$
$c = 5$	$b - a = 9 - 3$	$c = 6$	$b - a = 8 - 3$
$c = 5$	$b - a = 9 - 5$	$c = 6$	$b - a = 9 - 4$
$c = 5$	$b - a = 9 - 7$	$c = 8$	$b - a = 9 - 4$

Vyhovujú voľby:

$$\begin{array}{ll} a = 2, \quad b = 6, \quad c = 5; & \qquad a = 1, \quad b = 6, \quad c = 4 \\ a = 1, \quad b = 9, \quad c = 5; & \qquad a = 4, \quad b = 9, \quad c = 8 \end{array}$$

Uvedené „zázračné krátenie“ možno uplatniť len na zlomkoch

$$\frac{26}{65}, \quad \frac{19}{95}, \quad \frac{16}{64}, \quad \frac{49}{98}.$$