Jaroslav Švrček
Ústřední kolo 55. ročníku Matematické olympiády, kategorie A

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 3, 44–46

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146161`

Ústřední kolo 55. ročníku Matematické olympiády, kategorie A

Jaroslav Švrček, PřF UP Olomouc

Ústřední kolo 55. ročníku matematické olympiády (MO), kategorie A, se uskutečnilo 26. až 29. března 2006 v Litoměřicích pod záštitou hejtmana Ústeckého kraje a děkana PřF UJEP v Ústí nad Labem. Organizací bylo pověřeno Gymnázium Josefa Jungmanna v Litoměřicích, a to ve spolupráci s pobočkou Jednoty českých matematiků a fyziků (JČMF) v Ústí nad Labem a krajskou komisí MO v Ústeckém kraji.

Soutěž byla oficiálně zahájena 26. března v aule III. ZŠ v Litoměřicích za přítomnosti *PaedDr. Jaroslava Müllnera*, náměstka ministryně školství a tělovýchovy ČR, *doc. RNDr. Antonína Sochora, DrSc.*, ředitele Matematického ústavu AV ČR, *doc. Ing. Štefana Zajace, CSc.*, předsedy JČMF, a mnoha významných představitelů společenského života v Ústeckém kraji.

Na základě výsledků krajských kol MO, kategorie A, bylo k účasti v ústředním kole pozváno 42 nejlepších řešitelů z celé České republiky (jeden z nich se pro nemoc soutěže nezúčastnil). Soutěžními dny byly 27. a 28. březen 2006, kdy žáci vždy ve 4,5 hodinách čistého času řešili po třech úlohách. Každá úloha byla hodnocena maximálně 7 body.

Pro obě volná odpoledne připravili organizátoři pro soutěžící zajímavý doprovodný program. Pondělní odpoledne bylo věnováno prohlídce památek historického centra Litoměřic, mj. věže Kalich, Máchovy světničky a biskupství v Litoměřicích. V budově místního gymnázia se pak soutěžící spolu s organizátory zúčastnili prezentace softwaru *MATHEMATICA*, kterou garantovali pracovníci firmy ELKAN. V úterý odpoledne uspořádali organizátoři pro všechny účastníky ústředního kola autobusový zájezd do blízkého okolí, který byl spojen s výstupem na horu Říp.

Vyhlášení výsledků soutěže s předáním cen nejlepším řešitelům proběhlo ve středu 29. března dopoledne. Díky sponzorům si nejlepší soutěžící odvezli z Litoměřic hodnotné ceny.

Soutěžní úlohy

1. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel má tu vlastnost, že pro každé $n \geqq 1$ platí $a_{n+1} = a_n + b_n$, kde b_n je číslo, které má opačné pořadí číslic než a_n (zápis čísla b_n může na rozdíl od zápisu čísla a_n začínat jednou nebo více nulami). Například pro $a_1 = 170$ platí $a_2 = 241$, $a_3 = 383$, $a_4 = 766$, ... Rozhodněte, zda a_7 může být prvočíslo.

(*Peter Novotný*)

2. Nechť m a n jsou přirozená čísla taková, že rovnice

$$(x+m)(x+n) = x+m+n$$

má aspoň jedno celočíselné řešení. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 2.$$

(*Jaromír Šimša*)

3. V trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme K průsečík osy vnitřního úhlu BAC se stranou BC a L průsečík osy vnitřního úhlu ABC se stranou AC. Dále označme S střed kružnice vepsané, O střed kružnice opsané a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

a) Přímka KL se dotýká kružnic opsaných trojúhelníkům ALS, BVS a BKS.

b) Body A, B, K, L a O leží na jedné kružnici.

(*Tomáš Jurík*)

4. V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC, pro něž platí: Vrcholy A a B, průsečík V výšek a střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici.

(*Jaroslav Švrček*)

5. Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p, q, r splňující podmínky

$$\begin{aligned} p &\mid q+r,\\ q &\mid r+2p,\\ r &\mid p+3q. \end{aligned}$$

(*Martin Panák*)

6. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{cotg}^2 2y &= 1,\\ \operatorname{tg}^2 y + 2\operatorname{cotg}^2 2z &= 1,\\ \operatorname{tg}^2 z + 2\operatorname{cotg}^2 2x &= 1. \end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček a Pavel Calábek*)

Výsledky ústředního kola 55. ročníku MO, kategorie A *)

Vítězové:

1. Jaromír Kuben, 4/4, G tř. Kpt. Jaroše, Brno; 39 bodů
2. Marek Pechal, 8/8, G Lesní čtvrť, Zlín; 38 bodů

3.–4. Jaroslav Hančl, 4/4, G M. Koperníka, Bílovec; 36 bodů
3.–4. Zbyněk Konečný, 3/4, G tř. Kpt. Jaroše, Brno; 36 bodů
5. Jakub Opršal, 4/4, G tř. Kpt. Jaroše, Brno; 27 bodů
6. Pavel Motloch, 5/6, G P. Bezruče, Frýdek-Místek; 26 bodů
7. Anežka Faltýnková, 3/4, G J. Škody, Přerov; 20 bodů
8. Marek Scholle, 7/8, G Dašická, Pardubice; 19 bodů
9.–10. Tomáš Jeziorský, 3/4, G M. Koperníka, Bílovec; 18 bodů
9.–10. Vojtěch Říha, 4/4, G tř. Kpt. Jaroše, Brno; 18 bodů

Další úspěšní řešitelé:

11.–12. Pavel Šalom, 8/8, G Rožnov p. R.; 17 bodů
11.–12. Jan Uhlík, 4/4, G tř. Kpt. Jaroše, Brno; 17 bodů
13.–15. Tereza Klimošová, 8/8, G Lanškroun; 15 bodů
13.–15. Adam Přenosil, 8/8, G Sladkovského nám., Praha 3; 15 bodů
13.–15. Lenka Slavíková, 3/4, G Mnichovo Hradiště; 15 bodů
16. Ondřej Hoferek, 8/8, G Ždár n. S.; 14 bodů
17.–18. Tomáš Javůrek, 7/8, G Jeseník; 13 bodů
17.–18. Martin Křivánek, 4/4, G tř. Kpt. Jaroše, Brno; 13 bodů
19.–22. Michael Kučera, 8/8, G M. Koperníka, Bílovec; 12 bodů
19.–22. Lukáš Malina, 3/4, G Zborovská, Praha 5; 12 bodů
19.–22. Jiří Řihák, 3/4, G tř. Kpt. Jaroše, Brno; 12 bodů
19.–22. Hoang Vo Viet, 3/6, G Na Vítězné pláni, Praha 4; 12 bodů

Šest vítězů a dva nejlepší úspěšní řešitelé 55. ročníku MO, kategorie A, byli pozváni k výběrovému soustředění českého družstva před 47. mezinárodní MO, která se uskutečnila v červenci 2006 ve slovinské Ljubljani.

---

*) Údaj 7/8 znamená, že jde o studenta 7. ročníku osmiletého gymnázia; podobně 4/4, 8/8, 3/4, 5/6 apod.