Jaroslav Peregrin

Logika a matematika

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 3, 1–7

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146156`

Logika a matematika

Jaroslav Peregrin, FF UK a AV ČR Praha

Historie logiky, jak ji dnes známe, začíná v antickém Řecku. Logika se zformovala, zejména díky Aristotelovi, jako „nástroj filozofie" – nástroj, který má filozofům pomáhat rozpoznávat klamné argumenty a umožnit jim vyvozovat jasně stanovenými postupy ze známých poznatků poznatky nové. V té době ovšem do kompetence filozofie spadaly všechny otázky, které dnes řeší věda – jednotlivé vědy se z filozofie začaly postupně vydělovat až mnohem později. (Dnes bychom tedy logiku vlastně měli chápat především jako nástroj vědy.) Na filozofii dnes v důsledku rozvoje věd zbývají už jen ty otázky, ke kterým se nehlásí žádná specializovaná vědní disciplína, to jest nejčastěji ty, které jsou tak obecné, že se do žádné jednotlivé vědy nevejdou. A protože takto obecné jsou zřejmě i mnohé otázky, kvůli kterým byla přivedena na svět logika, její spříznění s filozofií přetrvává.

Vedle toho se však nověji, zejména ve dvacátém století, logika podstatným způsobem propojila s matematikou. Jak k tomu došlo? Logice byla matematika vždy blízká kvůli svému důrazu na přesné a jednoznačné vyjadřování – jazyk i metody matematiky tak byly nejčastějším *předmětem* logických zkoumání. Ve dvacátém století se však matematika kromě toho čím dál tím více posouvala do pozice disciplíny, jejíž postupy a symbolický aparát mohou logická zkoumání nesmírně zefektivnit. Blízkost obou disciplín ostatně byla patrná už mnohem dříve; už ve středověku byla živá paralela mezi logickým vyvozováním a počítáním – kalkulováním.

Logika se často soustředila na vyvozování v naději, že se jí některé oblasti lidského poznání, především některé oblasti matematiky, podaří *axiomatizovat*, to jest zachytit pomocí omezeného počtu principů, ze kterých budou všechny pravdy dané oblasti odvoditelné podle jasně stanovených pravidel. Na zkoumání toho, co je z čeho vyvoditelné, se můžeme dívat jako na zkoumání určitého algoritmu, který nás vede od výroků k novým výrokům. Představme si například, že zjistíme, že nějaký tvor, říkejme mu Emil, je sysel a že tento Emil navíc žije v díře.

Máme tedy dva poznatky:

(1) Emil je sysel.
(2) Emil žije v díře.

Předpokládejme, že k nim přidáme dvě obecné vědomosti, totiž:

(3) Sysel není krtek.
(4) Sysel je savec.

Z této čtveřice výroků můžeme vyvodit další. Například z (1) a (3) můžeme vyvodit:

(5) Emil není krtek.

Z (1) a (4) můžeme vyvodit:

(6) Emil je savec.

Z (1) a (2) můžeme vyvodit:

(7) Někteří syslové žijí v díře.

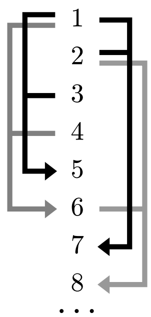
Z (2) a (6) můžeme dále vyvodit:

(8) Někteří savci žijí v díře.

Odvoditelnost můžeme znázornit šipkami od výroků k těm výrokům, které jsou z nich odvoditelné:

(1) Emil je sysel.
(2) Emil žije v díře.
(3) Sysel není krtek.
(4) Sysel je savec.
(5) Emil není krtek.
(6) Emil je savec.
(7) Někteří syslové žijí v díře.
(8) Někteří savci žijí v díře.
. . .

Představme si nyní, že z této tabulky vypustíme výroky a ponecháme v ní jenom čísla:



Na šipky se nyní můžeme dívat jako na spojnice čísel s čísly – jako na ‚operaci', která z 1 a 3 vyrobí 5, z 1 a 4 vyrobí 6, z 1 a 2 vyrobí 7, z 2 a 6 vyrobí 8 atd. (Na rozdíl třeba od sčítání to není operace, která by dávala vždy jenom jediné číslo – z daných výroků může být odvoditelných *mnoho* dalších výroků. Takže bychom ji vlastně měli brát za operaci, která z čísel vyrábí nikoliv čísla, ale množiny čísel.) Otázkou je, zda by bylo možné takto vzniklou ‚operaci' zachytit prostředky aritmetiky (to jest pomocí operací sčítání a násobení). A nedala by se pak studovat matematickými prostředky?

Dnes díky výsledkům logiků Davida Hilberta, Alfreda Tarského a především Kurta Gödela již víme, že to možné je; odvoditelnost v rámci běžných (formalizovaných) jazyků lze převést na určitý (komplikovaný) aritmetický výpočet. Tím byl udělán krok na cestě k odvěkému snu filozofů o vyvinutí metody, která by nám dovolila *spočítat, co je pravda*. (Něco takového nastínil například G. W. Leibniz ve své knize *Elementa characteristicae universalis* z roku 1679: Podaří-li se nám opatřit pojmy vhodnými čísly, pak budeme moci (doufal) dosáhnout toho, že pravdivost věty tvaru „A je B" zjistíme jednoduchým výpočtem – například tak, že ověříme, že číslo pojmu A je dělitelné číslem pojmu B.)

Představme si, že výroky ‚zakódujeme' čísly – každému výroku jednoznačně přiřadíme (přirozené) číslo. Takové zakódování výroků může vést i k ‚zakódování' některých jejich vlastností či vztahů mezi nimi pomocí vlastností či vztahů číselných – při daném zakódování se totiž může stát, že výroky budou mít nějakou vlastnost (třeba budou začínat písmenem T, budou pravdivé apod.) právě tehdy, když budou mít nějakou vlastnost jejich čísla (třeba budou sudá, budou to prvočísla apod.).

Samozřejmě, že kdyby se nám podařilo výroky očíslovat tak, aby měla čísla právě všech pravdivých výroků nějakou jednoduchou vlastnost (třeba byla prvočísly), bylo by to terno – pak bychom místo toho, abychom pracně zkoumali, zda se věci mají tak, jak nějaký výrok říká, pouze jednoduše zjistili, zda je jeho číslo prvočíslem. Je ale jasné, že tohle nedokážeme – to by totiž asi nešlo jinak, než že bychom si už pro účely číslování pořídili seznam všech pravdivých výroků – a když bychom tento seznam měli, věděli bychom o pravdivosti výroků vše, co se vědět dá, a žádné počítání pravdivosti bychom už nepotřebovali.

Reálněji bychom však mohli uvažovat o něčem jiném. Pokud bychom měli nějaký obor axiomatizovaný, mohli bychom se pokusit najít nějakou číselnou vlastnost, kterou by měla právě jen čísla výroků, které jsou v tomto systému dokazatelné (to jest axiomů a těch výroků, které jsou z nich odvoditelné). To nevypadá úplně nemožně – a díky Gödelovi také víme, že výroky lze skutečně očíslovat tak, aby množina čísel všech teorémů matematicky charakterizovatelná byla.

Logika tedy může do velké míry pracovat s prostředky vypůjčenými z matematiky. (Některé prostředky matematiky si ovšem může vypůjčovat bez toho, aby výroky na čísla převáděla, protože moderní matematika už není zdaleka jenom naukou o číslech, ale obecněji vědou o abstraktních strukturách.) Gödel však překvapivě ukázal také to, že rubem této dobré zprávy je jedna překvapivě špatná – totiž ta, že v podstatě žádnou oblast poznání nemůžeme axiomatizovat tak dokonale, aby se vše, co je pravda, stalo dokazatelným. Takže i když se nám podaří spočítat, že daný výrok není matematickou větou, nemusí to ještě znamenat, že není pravdivý. To je bezesporu nejpozoruhodnější výsledek matematické logiky dvacátého století. Pokusíme se naznačit, proč tomu tak je.

Představme si, že výroky, jimiž se zabýváme, nebudou o syslech či jiných tvorech, ale o číslech – budou to výroky aritmetické. Představme si například, že to budou výroky:

(1) Číslo 6 je dělitelné číslem 2.
(2) Číslo 6 je dělitelné číslem 3.
(3) Žádné číslo dělitelné číslem 2 není liché.
(4) Každé číslo dělitelné číslem 2 je větší než číslo 1.
(5) Číslo 6 není liché.
(6) Číslo 6 je větší než číslo 1.
(7) Některá čísla dělitelná číslem 2 jsou dělitelná číslem 3.
(8) Některá čísla dělitelná číslem 3 jsou větší než číslo 1.
. . .

Vraťme se nyní k otázce kódování výroků čísly, kterou jsme nakousli výše. Uvědomme si, že takové zakódování jakožto matematický vztah existuje či neexistuje nezávisle na nás a na tom, jestli o něm víme. Všimněme si, že má-li při nějakém takovém zakódování například výrok „Sníh je bílý" kód 8004 a vychází-li vlastnost *skládat se z méně než čtyř slov* jako ‚kódovaná' vlastností *být dělitelné třemi*, bude výrok

Věta „Sníh je bílý" se skládá z méně než čtyř slov

pravdivý právě tehdy, když bude pravdivý výrok

Číslo 8004 je dělitelné třemi;

v tomto smyslu pak budou obě tyto věty říkat totéž. To znamená, že se může stát, že některé naše výroky o číslech mohou být legitimně čteny i jako ‚zakódované' výroky o výrocích (a to bez ohledu na to, zda o tom víme, či nikoliv).

Představme si tedy, že naše výroky hovoří nikoliv o číslech, ale jejich prostřednictvím o výrocích, které tato čísla nesou – že například uvedené výroky (1), (2), (5) a (6) pojednávají nikoliv o čísle 6, ale o výroku (6), to jest o výroku „Číslo 6 je větší než číslo 1". Představme si tedy, že uvedené výroky lze ‚dekódovat' tak, že ‚ve skutečnosti' říkají:

(1) Výrok (6) je dělitelný výrokem (2).
(2) Výrok (6) je dělitelný výrokem (3).
. . .

Takto ‚dekódovány' však tyto výroky nedávají smysl – hovoří se v nich o tom, že nějaký výrok je dělitelný jiným atd.; a to není něco, čemu by se dalo rozumět. Co kdyby tomu ale bylo tak, že nikoliv jenom čísla, o kterých je řeč, jsou kódy výroků, ale i vlastnosti, které jsou těmto číslům připisovány, vycházejí jako ‚kódy' nějakých vlastností výroků (v tom smyslu, jak jsme to vysvětlili)? Co kdyby například při očíslování, které jsme zvolili, byl vztah *být dělitelný* ‚kódem' vztahu *být odvoditelný*, vztah *být větší než* ‚kódem' vztahu *být delší než*, a vztah *být lichý* ‚kódem' vztahu *být pravdivý*? Pak bychom naše výroky mohli číst takto:

(1) Výrok (6) je odvoditelný z výroku (2).
(2) Výrok (6) je odvoditelný z výroku (3).
(3) Žádný výrok odvoditelný z výroku (2) není pravdivý.
(4) Každý výrok odvoditelný z výroku (2) obsahuje výrok (1).

(5) Výrok 6 není pravdivý.
(6) Výrok 6 je delší než výrok (1).
(7) Některé výroky odvoditelné z výroku (2) jsou odvoditelné z výroku (3).
(8) Některé výroky odvoditelné z výroku (3) obsahují výrok (1).
. . .

Takhle čteny už tyto výroky smysl dávají. Nejsou ovšem pravdivé [např. z výroku „Výrok (6) je odvoditelný z výroku (3)" není odvoditelný výrok „Výrok (6) je delší než výrok (1)", jak to tvrdí výrok (1)] – což dokazuje, že náš předpoklad, že by vztah *být dělitelný* mohl ‚kódovat' vztah *být odvoditelný* atd., nebyl správný. To ale neznamená, že uvažované číselné vlastnosti nemohou ‚kódovat' jiné vlastnosti.

Tímto způsobem mohou být některé aritmetické výroky čteny tak, jako by ‚hovořily samy o sobě'. A zásadní je, že při určitém zakódování výroků bude určitá (ne zrovna jednoduchá) číselná vlastnost ‚kódovat' jejich dokazatelnost. *Můžeme* tedy ‚spočítat', které výroky jsou dokazatelné. Avšak (jak opět plyne z Gödelových výsledků) pak lze vytvořit výrok, jenž bude vlastnost, kódující nedokazatelnost, připisovat číslu, které bude právě číslem jeho samého. To znamená, že tento výrok bude říkat

Číslo x je takové a takové,

kde x bude při zvoleném kódování kódem právě tohoto výroku samotného a vlastnost jemu připisovaná bude ‚kódem' nedokazatelnosti. Tento výrok tedy bude možné číst tak, že sám o sobě říká, že je nedokazatelný. A o takovém výroku lze snadno dokázat, že pokud by měl být dokazatelný, celý axiomatický systém aritmetiky by zkolaboval. (Představme si totiž, že by tento výrok dokazatelný byl. Pak by byl pravdivý, a tedy by byla pravda to, co říká, ale protože sám o sobě říká, že je nedokazatelný, byla by pravda, že je nedokazatelný. Pravdou by tedy bylo jak to, že je dokazatelný, tak to, že dokazatelný není – a to není možné.) A protože standardní axiomy aritmetiky odpovídají našim intuicím ohledně přirozených čísel, dává-li aritmetika vůbec nějaký smysl, tento výrok dokazatelný být nemůže. Lze ovšem ukázat i to, že dokazatelná nemůže být ani jeho negace, takže tento výrok je v rámci axiomatického systému aritmetiky nerozhodnutelný.

Tento Gödelův důkaz logikům pořádně zamotal hlavu. Dodal jim ale také spoustu námětů pro další zkoumání, především pro taková, která se už neobešla bez komplikované matematiky. Propojení logiky s matematikou se tedy ještě utužilo. Gödelův důkaz však mobilizoval i filozofickou stránku logiky: postavil logiku před nové filozofické problémy a vedl k potřebě hlubší filozofické analýzy základů logiky.

Logika je tedy svorníkem mezi dvěma velice odlišnými světy: světem matematiky a světem filozofie. Proto se s výukou logiky setkáváme částečně v rámci výuky matematiky a částečně v rámci výuky filozofie. V Čechách lze samostatný obor logika studovat na Filozofické fakultě UK, ale na výuce se podílejí i odborníci z Matematicko-fyzikální fakulty UK a z Matematického ústavu AV ČR. Studenti tohoto oboru mají možnost na vlastní kůži vyzkoušet, že propojovat svět matematiky se světem filozofie je často skutečným intelektuálním dobrodružstvím.

Literatura:

[1] NAGEL, E., NEWMAN, J. R.: *Gödelův důkaz.* Brno, Vutium 2003

[2] SMULLYAN, R.: *Navěky nerozhodnuto.* Praha, Academia 2003

[3] ECO, U.: *Hledání dokonalého jazyka.* Praha, Nakladatelství Lidové noviny 2001

* * * * *

Hlavní funkcí matematiky (jako každého myšlení v pojmech) je dostat pod kontrolu obrovskou rozmanitost jednotlivostí světa ... Existuje těsný vztah mezi matematikou a jazykem ... Matematika nevyrůstá z jazyka, ale jazyk je možný jen díky matematice ... Matematika popisuje mimosmyslovou skutečnost. *)

Kurt Gödel (1906–1978)

---

*) Vybral Dušan Jedinák.