Rozhledy matematicko-fyzikální

Jaromír Šimša
Zellerův výpočet dne v týdnu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 2, 7–9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146145

Zellerův výpočet dne v týdnu

Jaromír Šimša, PřF MU Brno

V předchozím článku *Věčný kalendář* jste se dočetli, jak můžeme určit, na který den v týdnu připadlo či připadne dané datum, aniž bychom měli k dispozici kalendář příslušného roku. Dozvěděli jste se, že k řešení této úlohy (komplikované tím, že počet dní v roce není dělitelný sedmi a že některé roky jsou přestupné) postačí vyhledat jeden či dva údaje v jedné větší, popř. dvou menších (přesto však obtížně zapamatovatelných) tabulkách. Nyní ukážeme, že hledaný den v týdnu můžeme *vypočítat bez jakékoliv tabulky* pěkným způsobem, který objevil německý matematik *Christian Zeller* (1822–1899). Kromě aritmetických operací budeme potřebovat funkci *celou část* reálného čísla. Její hodnotu $\lfloor x \rfloor$ v čísle x definujeme jako největší celé číslo nepřevyšující dané x. Tak například $\lfloor 3{,}1 \rfloor = 3$, $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor -2{,}5 \rfloor = -3$ apod.

Dané datum našeho (tzn. gregoriánského) kalendáře nejprve popíšeme pomocí čtyř celých čísel d, m, s a r (den, měsíc, století a ročník). Písmeno d označuje obvyklé pořadové číslo daného dne v měsíci ($1 \leqq d \leqq 31$). Písmeno m pak značí pořadové číslo příslušného měsíce, které však počítáme neobvykle, a to *od března do února*, takže klademe $m = 1$ pro březen, $m = 2$ pro duben, $\ldots$, $m = 10$ pro prosinec, $m = 11$ pro leden a $m = 12$ pro únor. Kvůli tomuto posunu (který je výhodný tím, že případný 29. únor přesouvá na konec posledního měsíce) nyní příslušný letopočet v případě měsíce ledna či února zmenšíme o jedničku (v případech $m \leqq 10$ letopočet nezměníme). Tento upravený letopočet pak odsunutím dvou posledních číslic rozdělíme na dvě čísla, která označíme s a r (počet století a ročník v něm), $0 \leqq r \leqq 99$. Vysvětlí to několik příkladů:

a) 29. 8. 2005: $d = 29$, $m = 6$, $s = 20$, $r = 5$

b) 26. 2. 1815: $d = 26$, $m = 12$, $s = 18$, $r = 14$

c) 4. 1. 1700: $d = 4$, $m = 11$, $s = 16$, $r = 99$

Z čísel d, m, s, r pro dané datum nyní vypočteme výraz

$$t = d + \left\lfloor \frac{13m - 1}{5} \right\rfloor + r + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{4} \right\rfloor - 2s.$$

Zellerovo pravidlo říká, že *číslo t dává při dělení sedmi stejný zbytek jako pořadové číslo daného dne v týdnu*, takže zbytku 1 odpovídá pondělí, zbytku 2 – úterý, $\ldots,$ zbytku 6 – sobota a zbytku 7 – neděle. Tak například pro datum 29. 8. 2005 z příkladu a) dostaneme

$$t = 29 + \left\lfloor \frac{77}{5} \right\rfloor + 5 + \left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor - 40 = 29 + 15 + 5 + 1 + 5 - 40 = 15,$$

dané datum tudíž připadlo na pondělí, neboť číslo 15 při dělení sedmi dává zbytek 1.

Možná neodoláte a vyzkoušíte Zellerovo pravidlo pro datum vašeho narození či jiné významné dny. Zvídavá duše každého matematika však zatouží po vysvětlení, proč popsané pravidlo platí *obecně*, tedy pro jakékoliv datum. Pokusíte se to sami dokázat? Ve zbytku článku si můžete přečíst návod, jak lze při tom postupovat.

Označte $T(d, m, s, r)$ tvrzení „Zellerovo pravidlo platí pro datum určené čtveřicí (d, m, s, r)“ a dokažte pro všechny přípustné čtveřice tyto implikace:

(1) $T(1, m, s, r) \Longrightarrow T(d, m, s, r)$
(2) $T(1, m, s, r) \Longrightarrow T(1, m + 1, s, r)$ (je-li $m < 12$)
(3) $T(1, m, s, r) \Longrightarrow T(1, m, s, r + 1)$ (je-li $r < 99$)
(4) $T(1, m, s, 99) \Longrightarrow T(1, m, s + 1, 0)$

Zdůvodnit implikaci (1) je snadné.

K důkazu implikace (2) ukažte, že posloupnost

$$f_m = \left\lfloor \frac{13m - 1}{5} \right\rfloor$$

má pro každé $m \in \{1, 2, \ldots, 11\}$ tuto vlastnost: Číslo $f_{m+1} - f_m$ dává při dělení sedmi stejný zbytek jako počet dní v měsíci s číslem m (porovnejte čísla v posledních dvou řádcích tabulky na konci článku).

Implikace (3) je důsledkem toho, že pro posloupnost

$$g_r = r + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor$$

z vyjádření

$$g_{r+1} - g_r = 1 + \left\lfloor \frac{r+1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor$$

pro libovolné celé r vyplývá: Rozdíl $g_{r+1} - g_r$ je roven 2, resp. 1 podle toho, zda je číslo $r+1$ dělitelné čtyřmi, nebo ne. To odpovídá tomu, že rok s letopočtem $100s + r + 1$ (kde $r < 99$) je přestupný, právě když je číslo $r+1$ násobkem čtyř.

Konečně implikace (4) je důsledkem toho, že pro posloupnost

$$h_s = \left\lfloor \frac{s}{4} \right\rfloor - 2s$$

z vyjádření

$$(h_{s+1} + g_0) - (h_s + g_{99}) = \left\lfloor \frac{s+1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s}{4} \right\rfloor - 18 \cdot 7 + 1$$

pro libovolné celé s vyplývá: Levá strana poslední rovnosti dává při dělení sedmi zbytek 2, resp. 1 podle toho, zda je číslo $s+1$ dělitelné čtyřmi, nebo ne. To odpovídá tomu, že rok s letopočtem $100(s+1)$ je přestupný, právě když je číslo $s+1$ násobkem čtyř.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_m	2	5	7	10	12	15	18	20	23	25	28	31
$f_{m+1} - f_m$	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3	3	
počet dní	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31	

Deset neexistujících dnů

Martin Macháček, Ondřejov

Předchozí dva články popisují zajímavé způsoby, jak určit den v týdnu, známe-li datum. Má to ale háček: tyto metody platí pro gregoriánský kalendář, který byl zaveden až v roce 1582 – a ani to ne všude. To znamená, že byl-li např. Jan Hus upálen 6. července 1415, nebylo to v úterý, jak by nám vyšlo podle Zellerova pravidla, ale *v sobotu*, protože tehdy ještě platil juliánský kalendář. To nám ostatně potvrzuje i Palacký.

Problémy s kalendářem způsobuje to, že *tropický rok* (doba mezi jarními rovnodennostmi) není celočíselným násobkem dne: přesně má