Marta Volfová

Věčný kalendář

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 2, 1–6

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146143

Věčný kalendář

Marta Volfová, PedF UHK Hradec Králové

Občas se setkáváme s nabídkami „věčného kalendáře“ – tabulky, z níž lze jednoduše zjistit, na který den týdne připadá určité datum.

Vytvoření takové tabulky není nijak obtížné, jeden možný přístup zde ukážeme.

Budeme pracovat s tzv. zbytkovými třídami podle modulu 7, které označíme [0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Zbytkovou třídou [0] podle modulu 7 rozumíme množinu všech přirozených čísel, která po dělení sedmi dávají zbytek 0, zbytkovou třídou [1] podle modulu 7 rozumíme množinu všech přirozených čísel, která po dělení sedmi dávají zbytek 1, atd. Každé přirozené číslo můžeme zařadit do právě jedné z těchto tříd. Zařazení určuje zbytek po dělení sedmi. Tak číslo 25 patří do třídy [4], neboť $25 = 7 \cdot 3 + 4$, číslo 30 patří do třídy [2], neboť $30 = 7 \cdot 4 + 2$, apod. Stručně píšeme $25 \in [4]$, $30 \in [2]$ apod.

Zbytkové třídy lze sčítat. Má-li např. jeden sčítanec po dělení sedmi zbytek 6 a druhý sčítanec zbytek 5, má součet zbytek 4, neboť

$$a + b = (7x + 6) + (7y + 5) = 7(x + y + 1) + 4.$$

Zapíšeme to rovností $[6] + [5] = [4]$.

Sčítání zbytkových tříd splňuje (stejně jako sčítání čísel) komutativní i asociativní zákon, například oba součty $[5] + [4]$ a $[4] + [5]$ se rovnají [2].

Pro vytvoření věčného kalendáře přiřadíme každému dnu týdne jednu zbytkovou třídu, a to podle tabulky 1.

Pondělí	[1]	1. den týdne
Úterý	[2]	2. den týdne
Středa	[3]	3. den týdne
Čtvrtek	[4]	4. den týdne
Pátek	[5]	5. den týdne
Sobota	[6]	6. den týdne
Neděle	[0]	7. den týdne

Tabulka 1

Jednadvacáté století začínalo v pondělí 1. 1. 2001. V lednu roku 2001 datum, tj. pořadové číslo dne v měsíci, již přímo vedlo k zjištění dne týdne. Takže svátek Miloše, tj. 25. 1., byl ve čtvrtek $\big(25 \in [4]\big)$, Robin, který měl svátek 30. 1., ho slavil v úterý $\big(30 \in [2]\big)$, zatímco Běla (21. 1.) pořádala oslavu svátku v neděli $\big(21 \in [0]\big)$.

Takto jednoduché je to v lednu jen v letech, kdy Nový rok připadá na pondělí. Těmto rokům přiřadíme zbytkovou třídu [0] podle modulu 7. Každý nepřestupný rok posouvá začátek příštího roku o jeden den $(365 = 7 \cdot 52 + 1)$, proto bylo 1. 1. 2002 úterý.

Protože rok 2002 posunul začátek roku (oproti roku 2001) o jeden den, přiřadíme mu zbytkovou třídu [1] podle modulu 7, obdobně roku 2003 třídu [2] (posouvá začátek roku vzhledem k roku 2001 o dva dny), roku 2004 třídu [3].

Rok 2004 byl přestupný, měl 366 dní a posunul začátek dalšího roku o dva dny $(366 = 7 \cdot 52 + 2)$. Proto má rok 2005 přiřazenu ne třídu [4], ale [5]. Dále rok 2006 má přiřazenu třídu [6], rok 2007 třídu [0] (třída [7] neexistuje; $7 = 7 \cdot 1 + 0)$, rok 2008 třídu [1]. Rok 2008 je přestupný, proto má rok 2009 přiřazenu ne třídu [2], ale [3] atd.

Známe-li přiřazení zbytkových tříd podle modulu 7 jednotlivým rokům, můžeme jednoduše odpovědět na otázky:

Ve kterém dnu týdne bude slavit svátek Miloš v roce 2007, Robin v roce 2008 a Běla v roce 2010?

Pro zjištění odpovědí musíme vždy ke zbytkové třídě lednového data přičíst zbytkovou třídu roku: Takže Miloš bude mít 25. 1. 2007 svátek ve čtvrtek, neboť $[4] + [0] = [4]$, Robin bude mít 30. 1. 2008 svátek ve středu, neboť $[2] + [1] = [3]$, a Běla bude mít 21. 1. 2010 svátek ve čtvrtek, neboť $[0] + [4] = [4]$.

Protože máme sedmidenní týden a každý čtvrtý rok je přestupný, opakují se vždy po 28 letech roční kalendáře. Tedy např. rok 2001 má stejným datům přiřazeny stejné dny týdne, jako třeba roky 1973, 1945, 1917 (neboť $2001 - 28 = 1973$, $2001 - 2 \cdot 28 = 1945$, $2001 - 3 \cdot 28 = 1917$).

V celém 20. a 21. století se kalendáře takto pravidelně střídají. Změnu vnáší rok 1900, který není přestupný, ačkoliv číslo 1900 je násobkem čtyř. To platí od úpravy kalendáře v 16. století, kdy papež Řehoř XIII. podepsal 24. 2. 1582 bulu o novém kalendáři – šlo o vynechání deseti dnů a ustanovení, že roky, které budou násobky čísla 100, budou přestupné jen tehdy, budou-li současně násobky čísla 400 (což číslo 1900 nesplňuje).

Přehledné přiřazení zbytkových tříd jednotlivým rokům z období 1888–2010 přináší tabulka 2.

Roky (přestupné označeny *)						Rok začíná	Třída
		1917	1945	1973	2001	po	[0]
		1918	1946	1974	2002	út	[1]
		1919	1947	1975	2003	st	[2]
		1920*	1948*	1976*	2004*	čt	[3]
		1921	1949	1977	2005	so	[5]
		1922	1950	1978	2006	ne	[6]
	1900	1923	1951	1979	2007	po	[0]
		1924*	1952*	1980*	2008*	út	[1]
		1925	1953	1981	2009	čt	[3]
		1926	1954	1982	2010	pá	[4]
		1927	1955	1983		so	[5]
1888*		1928*	1956*	1984*		ne	[6]
1889	1901	1929	1957	1985		út	[1]
1890	1902	1930	1958	1986		st	[2]
1891	1903	1931	1959	1987		čt	[3]
1892*	1904*	1932*	1960*	1988*		pá	[4]
1893	1905	1933	1961	1989		ne	[6]
1894	1906	1934	1962	1990		po	[0]
1895	1907	1935	1963	1991		út	[1]
1896*	1908*	1936*	1964*	1992*		st	[2]
1897	1909	1937	1965	1993		pá	[4]
1898	1910	1938	1966	1994		so	[5]
1899	1911	1939	1967	1995		ne	[6]
	1912*	1940*	1968*	1996*		po	[0]
	1913	1941	1969	1997		st	[2]
	1914	1942	1970	1998		čt	[3]
	1915	1943	1971	1999		pá	[4]
	1916*	1944*	1972*	2000*		so	[5]

Tabulka 2

Z řádků tabulky 2 vidíme, ve kterých letech mají kalendáře stejnou podobu. Samozřejmě vždy po 28 letech, ale také vždy, když jsou roky stejně přestupné či nepřestupné a začínají týmž dnem, tj. mají přiřazenu tutéž zbytkovou třídu. Např. rok 2005 má stejnou podobu kalendáře jako roky $2005 - k \cdot 28$, tj. např. 1977, 1949, 1921, ale také jako všechny nepřestupné roky, které mají stejně jako rok 2005 přiřazenu zbytkovou třídu [5] a začínají sobotou, tj. např. 1983, 1955, 1927, 1994, 1966, 1938.

Ještě je třeba uvážit, jak svými různými délkami přispívají měsíce ke změně závislosti dne v týdnu na jeho datu (oproti situaci v lednu). Je-li např. 1. 1. pondělí, bude 1. 2. posunuto o 3 dny (leden má 31 dní a $31 = 7 \cdot 4 + 3$), tj. 1. 2. bude čtvrtek.

Předchozí měsíc vždy posune první den dalšího měsíce o nějaký počet dní týdne (0, 1, ..., nebo 6). Jaké hodnoty tyto posuny mají, ukazuje tabulka 3.

Měsíc	Posun	Celkový posun od ledna		Nepřestup. rok	Přestup. rok
		nepřestup. rok	přestup. rok		
leden	0 dnů	0 dnů	0 dnů	[0]	[0]
únor	3 dny	$(0+3)$ dnů	$(0+3)$ dnů	[3]	[3]
březen	0, či 1 den	$(3+0)$ dnů	$(3+1)$ dnů	[3]	[4]
duben	3 dny	$(3+3)$ dnů	$(4+3)$ dnů	[6]	[0]
květen	2 dny	$(6+2)$ dnů	$(0+2)$ dnů	[1]	[2]
červen	3 dny	$(1+3)$ dnů	$(2+3)$ dnů	[4]	[5]
červenec	2 dny	$(4+2)$ dnů	$(5+2)$ dnů	[6]	[0]
srpen	3 dny	$(6+3)$ dnů	$(0+3)$ dnů	[2]	[3]
září	3 dny	$(2+3)$ dnů	$(3+3)$ dnů	[5]	[6]
říjen	2 dny	$(5+2)$ dnů	$(6+2)$ dnů	[0]	[1]
listopad	3 dny	$(0+3)$ dnů	$(1+3)$ dnů	[3]	[4]
prosinec	2 dny	$(3+2)$ dnů	$(4+2)$ dnů	[5]	[6]
leden	3 dny	$(5+3)$ dnů	$(6+3)$ dnů	[1]	[2]

TABULKA 3

Nyní již můžeme řešit libovolnou úlohu na zjištění, na který den týdne připadlo, popř. připadne v letech 1888–2010 to či ono datum. Sečteme zbytkovou třídu pořadového čísla 1 až 31 onoho dne (k tomu žádnou tabulku nepotřebujeme), zbytkovou třídu daného měsíce z tabulky 3 a zbytkovou třídu daného roku z tabulky 2. Výsledkem bude zbytková třída hledaného dne v týdnu podle tabulky 1. V tabulce 4 je uvedeno několik příkladů.

Datum	Zbytková třída	Den
8. 5. 2005	$[1] + [1] + [5] = [0]$	neděle
24. 12. 2005	$[3] + [5] + [5] = [6]$	sobota
28. 10. 1918	$[0] + [0] + [1] = [1]$	pondělí
9. 5. 1945	$[2] + [1] + [0] = [3]$	středa
30. 5. 1946	$[2] + [1] + [1] = [4]$	čtvrtek

Tabulka 4

Pro běžné používání je takovýto způsob, kdy musíme mít k dispozici tabulky 2 a 3 (nebo si je vždy sestavit), těžkopádný.

V obvyklých vypracováních věčných kalendářů (i v komerčně prodávaných tabulkách) bývá pro každý rok již stanoven součet zbytkové třídy roku a zbytkové třídy posunu od ledna po daný měsíc, jak je to v tabulce 5 na následující stránce. S touto tabulkou je pak určení, který den v týdnu připadá na určité datum, velmi jednoduché: Sečteme číslo z tabulky 5 pro daný rok a měsíc s pořadovým číslem daného dne v měsíci a určíme, jaký zbytek po dělení číslem 7 tento součet má (tj. do které zbytkové třídy patří) – tento zbytek pak určuje (podle tabulky 1) den týdne. (Pro zjednodušení zápisů a větší přehlednost nejsou zbytkové třídy v tabulce 5 zapisovány v závorkách. Hvězdičky opět označují řádky, v nichž jsou přestupné roky.)

V tabulce 6 je uvedeno několik příkladů na určení dnů v týdnu právě popsaným způsobem s použitím tabulky 5.

Datum	Součet	Zbytková třída	Den
8. 5. 2005	$8 + 6$	$[1] + [6] = [0]$	neděle
24. 12. 2005	$24 + 3$	$[3] + [3] = [6]$	sobota
28. 10. 1918	$28 + 1$	$[0] + [1] = [1]$	pondělí
9. 5. 1945	$9 + 1$	$[2] + [1] = [3]$	středa
30. 5. 1946	$30 + 2$	$[2] + [2] = [4]$	čtvrtek

Tabulka 6

Roky				L	Ú	B	D	K	Č	Č	S	Z	Ř	L	P
	1917	1945	1973 2001	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
	1918	1946	1974 2002	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
	1919	1947	1975 2003	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
	1920	1948	1976 2004 *	3	6	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
	1921	1949	1977 2005	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
	1922	1950	1978 2006	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
1900	1923	1951	1979 2007	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
	1924	1952	1980 2008 *	1	4	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
	1925	1953	1981 2009	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
	1926	1954	1982 2010	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
	1927	1955	1983	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
1888	1928	1956	1984 *	6	2	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
1889 1901	1929	1957	1985	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
1890 1902	1930	1958	1986	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
1891 1903	1931	1959	1987	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
1892 1904	1932	1960	1988 *	4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
1893 1905	1933	1961	1989	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
1894 1906	1934	1962	1990	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
1895 1907	1935	1963	1991	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
1896 1908	1936	1964	1992 *	2	5	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
1897 1909	1937	1965	1993	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
1898 1910	1938	1966	1994	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
1899 1911	1939	1967	1995	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
1912	1940	1968	1996 *	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
1913	1941	1969	1997	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
1914	1942	1970	1998	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
1915	1943	1971	1999	4	0	0	3	5	1	3	6	1	4	0	1
1916	1944	1972	2000 *	5	1	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4

Tabulka 5

Vytvoření věčného kalendáře je jen jednou ze zajímavých, někdy obtížných, někdy až tajemných, ale vždy přitažlivých kalendářových úloh. Jednou z nich by mohla být tato úloha:

Bylo vám už 5 000 dnů? Určete datum, kdy se tak stalo či stane.