Jaromír Šimša

Výběry monotónních posloupností

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 1, 15–19

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146127`

Chceme-li ověřit, že průměr $d = \dfrac{4a\lambda}{|1-\lambda^2|}$ této kružnice je v případě Apolloniovy kružnice v naší úloze roven $\dfrac{2pq}{p-q}$, je nutné umístit počátek soustavy souřadnic do středu úsečky PQ. V tom případě máme $P\bigl[-\frac{1}{2}(p+q),\,0\bigr]$, $Q\bigl[\frac{1}{2}(p+q),\,0\bigr]$ a dosazením $a = \frac{1}{2}(p+q)$, $\lambda = p/q$, kde $p > q$, dostaneme vskutku

$$d = \frac{4a\lambda}{|1-\lambda^2|} = \frac{4a\lambda}{\lambda^2-1} = \frac{2pq}{p-q}\,.$$

Na závěr dodejme, že Apolloniova kružnice má své jméno po řeckém matematikovi Apolloniu z Pergy (asi 260–190 př. n. l.), jehož dílo o kuželosečkách ovlivnilo celé generace matematiků a astronomů. Od něho pocházejí i názvy parabola, hyperbola, asymptota. Pravděpodobně znáte úlohy, které se souhrnně označují jako úlohy Apolloniovy; jsou to úlohy na sestrojení kružnic nebo přímek, které procházejí danými body a dotýkají se daných kružnic a přímek, přičemž dané útvary (body, přímky, kružnice) jsou vždy v počtu tří.

Výběry monotónních posloupností

Jaromír Šimša, PřF MU Brno

Chcete se dozvědět o souvislostech kolem tématu jedné úlohy, kterou v roce 2005 řešili soutěžící ústředního kola Matematické olympiády v ČR a SR? Nerozumíte-li přitom dvěma slovům z názvu našeho článku, vůbec to nevadí. Prohlédněte si dvě konečné skupiny čísel

$$(16, 4, 7, 12, 26, 20) \quad \text{a} \quad (4, 7, 12, 16, 20, 26).$$

I když jsou obě skupiny tvořeny stejnými čísly, liší se jejich pořadím. To považujeme za podstatné a obě skupiny tudíž za *různé*. Skupině čísel s určeným pořadím říkáme v matematice *posloupnost*, zastoupeným číslům její *členy*.

Čím se obě vypsané posloupnosti o šesti členech liší na první pohled? Tím, že v druhé posloupnosti jsou členy uspořádány podle velikosti, a to od nejmenšího čísla po číslo největší. Každou takovou posloupnost nazýváme *rostoucí*, podobně každou posloupnost, jako např.

$$(17, 16, 13, 9, 4, 3),$$

nazýváme *klesající*. Rostoucím a klesajícím posloupnostem říkáme souhrnně *monotónní* posloupnosti*).

Všimněme si nyní, že rostoucí posloupnost $(4, 7, 12, 16, 20, 26)$, kterou jsme uvedli jako úvodní příklad, je „skryta" v delší posloupnosti

$$(5, \underline{4}, 2, \underline{7}, 6, 13, \underline{12}, 10, 9, 18, \underline{16}, 15, 22, \underline{20}, 30, \underline{26});$$

vyznačili jsme to podtržením. Důležité samozřejmě je, že pořadí podtržených členů je takové, jaké vyžadujeme, tj. od nejmenšího čísla po největší. Dokážete z této 16členné posloupnosti vybrat rostoucí posloupnost o více než šesti členech? Po chvíli pokusů dojdete k názoru, že taková posloupnost patrně neexistuje. Zdůvodníme to tak, že celou posloupnost rozdělíme na šest klesajících úseků:

$$(\underbrace{5, 4, 2}, \underbrace{7, 6}, \underbrace{13, 12, 10, 9}, \underbrace{18, 16, 15}, \underbrace{22, 20}, \underbrace{30, 26})$$

Je jasné, že každá rostoucí posloupnost vybraná z této posloupnosti obsahuje nejvýše jedno číslo z každého z šesti vyznačených úseků, takže má celkově nejvýše šest členů. Sami vysvětlete, proč z dané 16členné posloupnosti nelze vybrat klesající posloupnost pěti čísel.

Nyní jsme již dobře připraveni na to, abychom rozebrali úlohu MO, o které jsme se zmínili úvodem. Její zadání:

Rozhodněte, zda členy jakékoliv posloupnosti 15 různých celých čísel lze zapsat čtyřmi barvami tak, aby čísla kterékoliv barvy tvořila monotónní posloupnost.

Úloha byla pro soutěžící velmi obtížná. Z celkového počtu 42 soutěžících v ČR a 39 soutěžících v SR úplné řešení podali pouze 2 čeští a 3 slovenští účastníci. Zdůvodnili negativní odpověď, že některou posloupnost 15 čísel nelze zapsat čtyřmi barvami požadovaným způsobem.

---

*) Monotónní je i každá jednočlenná posloupnost (a), která je současně rostoucí i klesající.

Ukážeme, že taková je kupříkladu posloupnost

$$(\underbrace{5,4,3,2,1}_{\text{I}},\underbrace{9,8,7,6}_{\text{II}},\underbrace{12,11,10}_{\text{III}},\underbrace{14,13}_{\text{IV}},\underbrace{\;15\;}_{\text{V}})$$

sestavená z pěti klesajících úseků I až V. Připusťme, že jsme její čísla zapsali čtyřmi barvami tak, že čísla stejné barvy tvoří vždy monotónní posloupnost. V úseku I je pět čísel, dvě z nich proto mají stejnou barvu. Protože tato dvě čísla tvoří klesající posloupnost, jejich barvu nemá žádné z čísel úseků II až V.*) V úsecích II až V jsou tedy čísla nejvýše tří barev; podobně společnou barvu dvou čísel ze skupiny II nemá žádné z čísel skupin III až V, takže v nich jsou čísla nejvýše dvou barev. Opakujeme-li stejnou úvahu ještě jednou, dojdeme ke zjištění, že čísla z úseků IV a V mají stejnou barvu, a to je spor, neboť posloupnost $(14,13,15)$ není monotónní.

Od vyřešené úlohy MO teď přejdeme k jednomu pěknému výsledku, který v roce 1932 získali maďarští matematikové Erdös a Szekeres. Dokázali, že pro libovolná přirozená čísla m a n platí tvrzení:

Z každé posloupnosti $mn+1$ navzájem různých celých čísel lze vybrat rostoucí posloupnost o $m+1$ členech nebo klesající posloupnost o $n+1$ členech.

Uvedené tvrzení má zajímavý důkaz. Označme

$$P=\big(a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_{mn},\,a_{mn+1}\big)$$

libovolnou zkoumanou posloupnost a uvažujme všechny *rostoucí* posloupnosti, které jsou obsaženy v P a začínají pevně zvoleným členem a_i. Najděme mezi nimi tu, která má maximální počet členů **), a tento počet označme symbolem p_i. (Není vyloučeno, že $p_i=1$.) Provedeme-li popsanou úvahu pro každý index $i\in\{1,\,2,\,\ldots,\,mn+1\}$, dostaneme $mn+1$ přirozených čísel

$$p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_{mn+1}. \tag{1}$$

Splňuje-li některé z těchto čísel p_i nerovnost $p_i \geqq m+1$, lze z P vybrat rostoucí posloupnost o $m+1$ členech (s prvním členem a_i) a závěr

*) Ta jsou totiž všechna větší než kterékoliv číslo z úseku I.

**) Může se stát, že maximální počet členů má několik takových posloupností.

Erdösovy-Szekeresovy věty platí. Zabývejme se proto dále pouze opačným případem, kdy každé z čísel p_i leží v množině $\{1, 2, \ldots, m\}$. Mezi $mn + 1$ čísly v (1) je tedy nejvýše m různých hodnot; podle Dirichletova principu*) to znamená, že některých $n + 1$ členů p_i má tutéž hodnotu. Vysvětlíme-li nyní, proč všechny ty členy a_i posloupnosti P, kterým odpovídá stejná hodnota p_i, tvoří v P *klesající* posloupnost, budeme s celým důkazem Erdösovy-Szekeresovy věty hotovi.

Zbývá tedy zdůvodnit tvrzení:

Jestliže pro indexy i a j platí $i < j$ a $p_i = p_j$, pak $a_i > a_j$.

Připusťme, že pro indexy i a j, kde $i < j$, platí rovnost $p_i = p_j$ a namísto nerovnosti $a_i > a_j$ naopak nerovnost $a_i < a_j$. Podle definice čísla p_j existuje v P rostoucí posloupnost s prvním členem a_j, která má délku p_j. Připíšeme-li před tuto posloupnost člen a_i, dostaneme rostoucí posloupnost v P s prvním členem a_i, jejíž délka je $p_j + 1$. To však podle definice čísla p_i znamená $p_i \geqq p_j + 1$, což je ve sporu s rovností $p_i = p_j$. Tím je důkaz potřebného tvrzení ukončen.

Vraťme se nyní k úloze z naší MO. Postup jejího řešení, který jsme dříve popsali, lze zřejmým způsobem zobecnit na libovolný počet barev a dokázat tak následující „negativní“ tvrzení.

Splňují-li přirozená čísla k a n rovnost

$$n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1), \tag{2}$$

*pak k barev nestačí k tomu, abychom jimi zapsali členy jakékoliv posloupnosti sestavené z n různých celých čísel, mají-li čísla kterékoliv barvy tvořit monotónní posloupnost.***)

V závěrečné části ukážeme, že k předchozímu výsledku lze doplnit „pozitivní“ tvrzení, a to v nejlepší podobě, jakou bychom si mohli přát. Jeho důkaz autorovi článku poskytl Jiří Sgall z Matematického ústavu AV ČR.

---

*) Tento jednoduchý a zároveň užitečný princip (též zvaný *přihrádkový*) lze vyslovit takto: Je-li $mn + 1$ předmětů rozděleno do m přihrádek, pak v některé z nich je alespoň $n + 1$ předmětů.

**) V původní úloze MO byly zadány konkrétní hodnoty $k = 4$ a $n = 15$ splňující rovnici (2). Její prozrazení by soutěžícím mohlo posloužit jako nápověda k řešení.

Splňují-li přirozená čísla k a n nerovnost

$$n < 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1), \tag{3}$$

pak k barev stačí k tomu, abychom jimi zapsali členy jakékoliv posloupnosti sestavené z n různých celých čísel, mají-li čísla kterékoliv barvy tvořit monotónní posloupnost.

Důkaz provedeme indukcí vzhledem k číslu k.

Je-li $k = 1$, pak podle (3) platí $n < 3$, takže tvrzení je zřejmé.*)

V druhém indukčním kroku předpokládejme, že tvrzení platí pro některé k a vysvětleme, proč potom $k + 1$ barev stačí k vyhovujícímu zápisu libovolné posloupnosti $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ různých n celých čísel, platí-li

$$n < 1 + 2 + \cdots + (k + 1) + (k + 2). \tag{4}$$

Lze-li v P zapsat jednou barvou $k + 2$ členů a_i tvořících *rostoucí* posloupnost, můžeme tyto členy z P vyškrtnout a pokud $n > k + 2$, zbylou posloupnost o $n - k - 2$ členech zapsat požadovaným způsobem dalšími k barvami podle indukčního předpokladu, neboť z nerovnosti (4) plyne nerovnost

$$n - k - 2 < 1 + 2 + \cdots + (k + 1);$$

spolu s vyškrtnutými čísly tak dostaneme požadovaný zápis celé posloupnosti P pomocí $k + 1$ barev.

Zabývejme se proto dále pouze případem, kdy v P žádná rostoucí posloupnost o $k + 2$ členech neexistuje. Stejně jako v důkazu Erdösovy-Szekeresovy věty označíme symbolem p_i maximální počet členů *rostoucí* posloupnosti, která se vyskytuje v P a začíná členem a_i. Pro každý index $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pak v našem případě platí $1 \leqq p_i \leqq k + 1$, takže všech různých hodnot p_i je dohromady nejvýše $k + 1$. Avšak ze zmíněného důkazu víme, že všechny členy a_i, kterým odpovídá stejná hodnota p_i, tvoří v P *klesající* posloupnost, takže je můžeme obarvit stejnou barvou (pro každou z různých hodnot p_i jinou). Tak zapíšeme všechny členy P požadovaným způsobem a využijeme přitom nejvýše $k + 1$ barev. Tím je celý důkaz hotov.

*) Každá posloupnost o méně než třech členech je monotónní, takže k zápisu jejích členů vystačíme s jednou barvou.