Pavel Trojovský

O fraktálech a úlohách vedoucích ke geometrické řadě

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 1, 1–8

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146123`

O fraktálech a úlohách vedoucích ke geometrické řadě

Pavel Trojovský, PedF UHK Hradec Králové

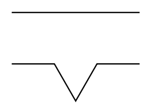
Fraktální geometrie je velmi moderní vědní disciplína, která je rozvíjena zhruba od šedesátých let 20. století, kdy se odborníci v různých přírodovědných oborech pokoušeli charakterizovat chaotičnost přírody. Popis pomocí klasické geometrie se ukázal jako naprosto nepostačující. Ačkoliv se na první pohled může zdát, že přírodní objekty jsou zcela chaotické, není to absolutní pravda, neboť např. stromy v nekultivovaném lese jsou sice rozmístěny náhodně, ale přesto lze v této náhodnosti shledat jistá pravidla. Snaha nalézt hranici mezi chaosem a řádem v přírodě vedla k potřebě vytvořit aparát, který bude schopen chaotičnost popsat. V roce 1975 zavedl matematik Benoit Mandelbrot (nar. 1924) název fraktální*) geometrie a exaktně tuto disciplínu definoval. Ústředním pojmem fraktální geometrie je *soběpodobnost* (např. malinký kamínek je soběpodobný s obrovským balvanem, neboť při jistém zvětšení obrázku kamínku již nerozlišíme, co je obrázek balvanu a co kamínku; matematicky se tato vlastnost nazývá *invariance vůči změně měřítka*). Soběpodobná množina tedy vzniká opakováním sebe sama při určitém transformování (změně měřítka, rotaci, posunutí atd.).

I když fraktální geometrie vznikla jako nová matematická disciplína až v 80. letech 20. století, neznamená to, že se první fraktály objevují až od této doby. Matematici se s některými typy fraktálů setkávali již mnohem dříve. Patrně první fraktál můžeme zaznamenat u Georga Cantora (1848–1918), když v roce 1883 popsal množinu, která je typickým představitelem soběpodobných objektů (jde o známé *Cantorovo discontinuum*).

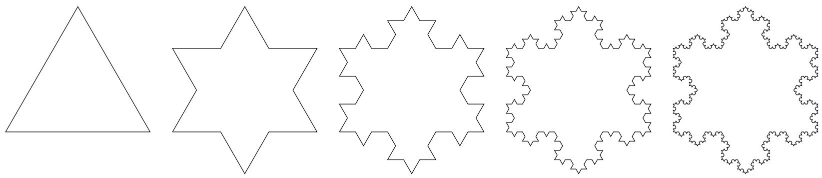
Druhým fraktálem je tzv. *Kochova vločka*, kterou v roce 1904 popsal Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924). Je vytvářena postupně z hranice rovnostranného trojúhelníku nekonečněkrát opakovanou rekurzivní záměnou každé úsečky lomenou čarou, která vznikne rozdělením této

*) Název je odvozen z latinského slova *fractus* znamenajícího lomený, zlomený.

úsečky na tři stejné části a nahrazením střední části dvěma stranami rovnostranného trojúhelníku (obr. 1). Za výchozí obrazec je tedy zvolena hranice rovnostranného trojúhelníku a na základě zmíněné rekurze pak postupně vznikají křivky zobrazené na obr. 2.

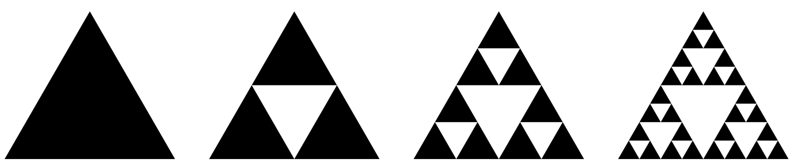


Obr. 1



Obr. 2

Třetím typem fraktálu je tzv. *Sierpińského koberec*, o jehož vzniku uvažoval v roce 1915 matematik Wacław Sierpiński (1882–1969). Výchozím útvarem je opět rovnostranný trojúhelník. Na něj aplikujeme rekurzivní vyjímání jistých rovnostranných trojúhelníků. Jak přesně tento proces probíhá, vysvětlíme na základě úvodních tvarů vznikajícího fraktálu. V prvním kroku rozdělíme trojúhelník na čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky a prostřední trojúhelník vyjmeme. Ve druhém kroku aplikujeme stejné rozdělení a vyjmutí na každý ze zbývajících tří trojúhelníků z prvního kroku atd. První čtyři kroky jsou znázorněny na obr. 3.



Obr. 3

ÚLOHY Z FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE

Příklad 1. Určete délku Kochovy vločky a obsah obrazce, který tato křivka ohraničuje, jestliže základní rovnostranný trojúhelník má stranu délky a.

Řešení. Z rekurzivní konstrukce (obr. 1 a obr. 2) je vidět, že počet stran se v každém kroku zvětší na čtyřnásobek. Pro počet stran p_n a délku křivky l_n po n-tém kroku, $n \in \mathsf{N} \cup \{0\}$, proto platí

$$p_n = 3 \cdot 4^n,$$
$$l_n = p_n \cdot \frac{a}{3^n} = 3a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Délky uvažovaných křivek tedy představují členy geometrické posloupnosti s prvním členem $3a > 0$ a kvocientem $\frac{4}{3} > 1$. Z toho vyplývá, že délka Kochovy vločky je nekonečná.

Obsah výchozího trojúhelníku je

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2.$$

V prvním kroku se obsah zvětší o obsahy tří trojúhelníků s třetinovou délkou strany, čili s devětkrát menším obsahem, než je obsah výchozího trojúhelníku, tj. o

$$S_1 = 3 \cdot \frac{S_0}{9}.$$

Podobně v n-tém kroku, $n \in \mathsf{N}$, se obsah zvětší o

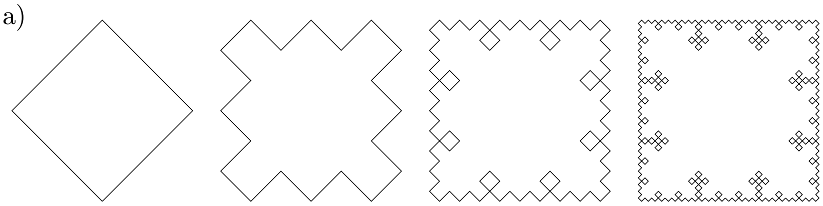
$$S_n = p_{n-1} \cdot \frac{S_0}{9^n} = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{S_0}{9^n} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot S_0.$$

Pro obsah S obrazce ohraničeného Kochovou vločkou proto platí

$$S = S_0 + \frac{3}{4}\, S_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = S_0 + \frac{3}{4}\, S_0 \cdot \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5}\, S_0 = \frac{2\sqrt{3}}{5}\, a^2.$$

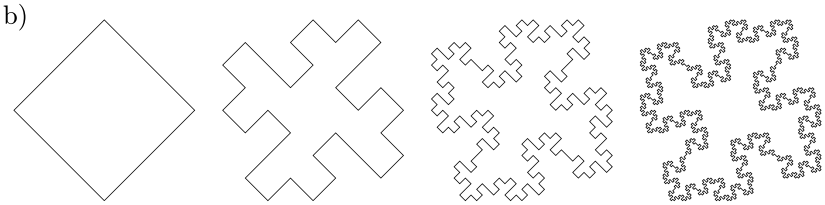
Příklad 2. Podobně jako v příkl. 1 určete délky fraktálů a obsahy obrazců, které ohraničují. Na obr. 4 a obr. 5 jsou vždy čtyři úvodní tvary vznikajících fraktálů; výchozí čtverec má stranu délky a.

a)



Obr. 4

b)



Obr. 5

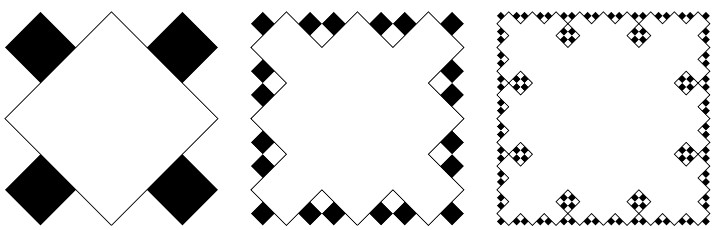
Řešení. Budeme postupovat analogicky jako v příkl. 1. Označíme opět p_n počet stran a l_n délku křivky po n-tém kroku. Délky úseček, jimiž je křivka po n-tém kroku tvořena, budeme značit a_n. V obou případech pro každé celé nezáporné číslo n platí $l_n = p_n a_n$.

a) Pro každé $n \in \mathsf{N} \cup \{0\}$ platí

$$a_n = \frac{a}{3^n}, \quad p_n = 4 \cdot 5^n, \quad l_n = p_n a_n = 4a \left(\frac{5}{3}\right)^n .$$

Posloupnost délek křivek je tedy geometrická s kvocientem $\frac{5}{3} > 1$, proto má uvažovaný fraktál nekonečnou délku.

Pro výpočet obsahu obrazce fraktálem ohraničeného je důležité si uvědomit, že čtverce „nalepované" v n-tém kroku jsou navzájem disjunktní. Dokumentuje to barevně upravený obr. 6, který znázorňuje první tři kroky vzniku fraktálu.



Obr. 6

Obsah výchozího čtverce je $S_0 = a^2$. Pro obsah S_n plochy přidané v n-tém kroku, $n \in \mathsf{N}$, platí $S_n = p_{n-1} a_n^2$. Obsah S obrazce ohraničeného fraktálem tedy vypočteme takto:

$$S = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n = a^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot 5^{n-1} \left(\frac{a}{3^n}\right)^2 =$$

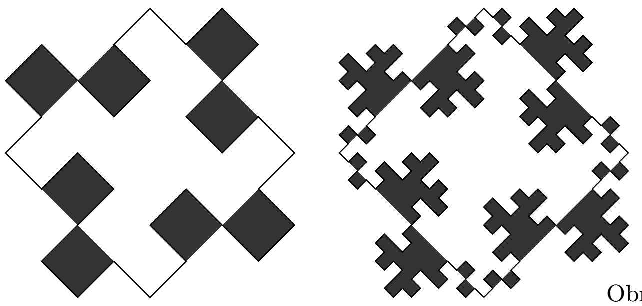
$$= a^2 + \frac{4a^2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = a^2 + \frac{4a^2}{5} \cdot \frac{\frac{5}{9}}{1 - \frac{5}{9}} = 2a^2$$

b) Pro každé $n \in \mathsf{N} \cup \{0\}$ platí

$$a_n = \frac{a}{4^n}, \quad p_n = 4 \cdot 8^n, \quad l_n = p_n a_n = 4a \cdot 2^n.$$

Fraktál má tedy opět nekonečnou délku.

Tento fraktál je však zajímavý tím, že obsahy všech postupně vznikajících obrazců, a tedy také obsah obrazce ohraničeného uvažovaným fraktálem, jsou stejné – všechny jsou rovny a^2. Je to snadno vidět z barevně upraveného obr. 7, který znázorňuje první dva kroky vzniku fraktálu.



Obr. 7

Příklad 3. Určete obsah celkově vyjmuté plochy při vzniku *Sierpińského koberce* (obr. 3), je-li obsah výchozího rovnostranného trojúhelníku S_0.

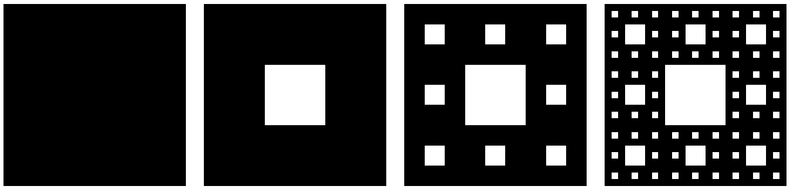
Řešení. V prvním kroku vyjmeme jeden trojúhelník o obsahu $S_0/4$ a tři takové trojúhelníky zachováme. Ve druhém kroku vyjmeme tři trojúhelníky o obsahu $S_0/(4^2)$ a zachováme devět takových trojúhelníků. Dále pokračujeme stejným způsobem. Pro obsah S plochy vyjmuté po nekonečně mnoha krocích tedy platí:

$$S = \frac{S_0}{4} + 3 \cdot \frac{S_0}{4^2} + 9 \cdot \frac{S_0}{4^3} + \cdots = \frac{S_0}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{S_0}{3} \cdot \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = S_0$$

Obsah celkově vyjmuté plochy je roven obsahu celého výchozího útvaru!

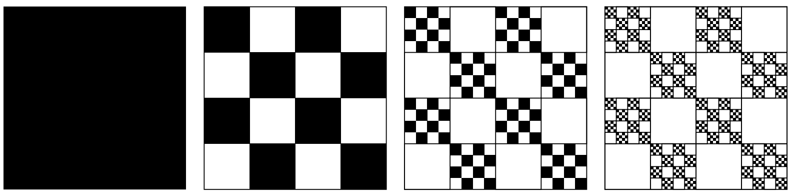
Příklad 4. Podobně jako Sierpińského koberec vznikají fraktály, jejichž úvodní čtyři tvary jsou na obrázcích 8, 9, 10. Výpočtem ověřte, že obsah S celkově vyjmuté plochy je ve všech třech případech roven obsahu S_0 výchozího útvaru.

a)



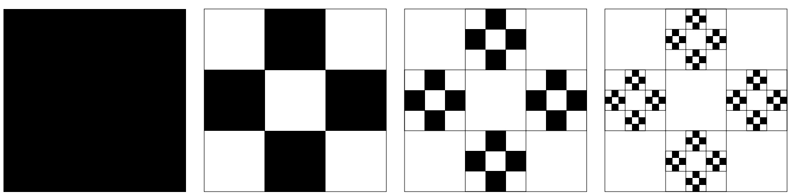
Obr. 8

b)



Obr. 9

c)



Obr. 10

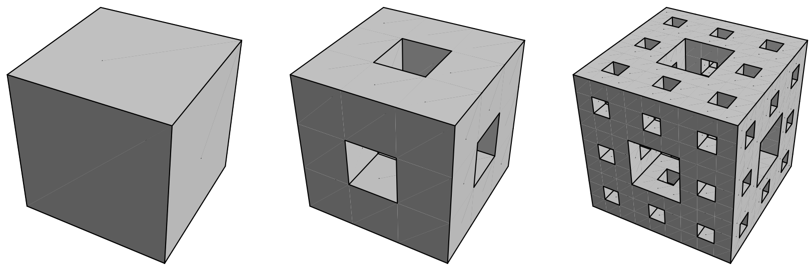
Řešení. Obdobným postupem jako v příkl. 3 vypočteme:

a) $$S = \frac{S_0}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = \frac{S_0}{8} \cdot \frac{\frac{8}{9}}{1 - \frac{8}{9}} = S_0$$

b) $$S = S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = S_0 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = S_0$$

c) $$S = \frac{5S_0}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{5S_0}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = S_0$$

Příklad 5. Tak jako fraktály v rovině lze vytvářet i fraktály v prostoru. Jedním z nejznámějších prostorových fraktálů je tzv. *Mengerova houba*, která je pojmenována podle svého autora Karla Mengera (1902–1985). Vznikne tak, že v prvním kroku rozdělíme krychli na 27 shodných krychliček a 7 z nich vyjmeme, ve druhém kroku aplikujeme stejné rozdělení a vyjmutí na každou ze zbývajících 20 krychliček atd.; úvodní tvary jsou na obr. 11. Výpočtem ověřte, že celkový objem V všech nekonečně mnoha vyjmutých krychlí je roven objemu V_0 výchozí krychle.

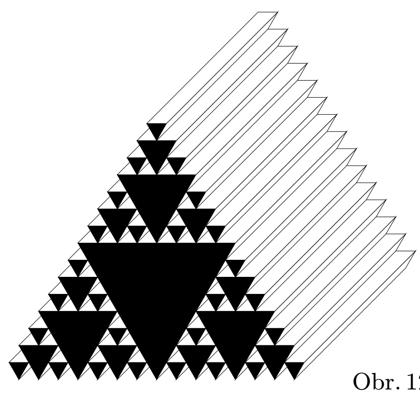


Obr. 11

Řešení. Podobně jako v rovinných případech vypočteme:

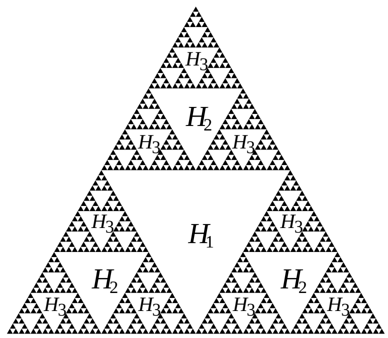
$$V = \frac{7V_0}{27} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{20}{27}\right)^{n-1} = \frac{7V_0}{27} \cdot \frac{1}{1 - \frac{20}{27}} = V_0$$

Příklad 6. Uvažujme těleso, jež je složeno z nekonečně mnoha pravidelných kolmých trojbokých hranolů, které mají stejnou výšku $v = 1$ a jejichž podstavami jsou trojúhelníky vyjmuté z rovnostranného trojúhelníku o délce strany $a = 1$ při vzniku Sierpińského koberce. Představu o vzhledu výsledného tělesa si můžeme vytvořit na základě obr. 12, který zobrazuje těleso složené z hranolu H_1, tří hranolů H_2, devíti hranolů H_3 a dvaceti sedmi hranolů H_4. Jaký je objem a povrch výsledného tělesa?



Obr. 12

Řešení. Pro každé $n \in \mathsf{N}$ má podstavná hrana hranolu H_n délku $b_n = 1/(2^n)$, přičemž počet hranolů H_n je $p_n = 3^{n-1}$ (obr. 13).



Obr. 13

Vypočteme obsah S_n podstavy hranolu H_n $(n \in \mathsf{N})$:

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\, b_n^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

Pro objem V a povrch S výsledného tělesa platí:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot (S_n \cdot 1) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot \left[2S_n + 3 \cdot (1 \cdot b_n)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Docházíme k zajímavému výsledku. Objem výsledného tělesa je roven objemu celého „výchozího“ pravidelného kolmého trojbokého hranolu o podstavné hraně délky $a = 1$ a výšce $v = 1$, zatímco povrch tohoto tělesa je nekonečný.