Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Pokrývání šachovnice

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 80 (2005), No. 2, 16–20

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146099

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2005

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

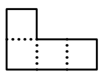
Po rutinní úpravě pak dostaneme ekvivalentní nerovnost $2\,|HP| < |IP|$, kterou vzhledem k tomu, že bod H leží mezi body I a P, můžeme přepsat do tvaru $|HP| < |HI|$, ve kterém ji nyní dokážeme. Protože středový úhel COA je shodný se souhlasným úhlem PAI a příslušný obvodový úhel CC_1A je shodný se souhlasným úhlem PAH, vidíme z obr. 13, že úsečka AH leží na ose úhlu PAI. Jak víme, osa úhlu dělí protější stranu trojúhelníku v poměru délek přilehlých stran, takže v pravoúhlém trojúhelníku PAI platí $|HP| : |HI| = |AP| : |AI| < 1$. Tím je nerovnost $|HP| < |HI|$ dokázána a celý důkaz odhadů (11) je ukončen.

Pokrývání šachovnice

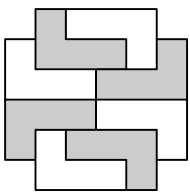
Emil Calda, MFF UK Praha

Úlohy o pokrývání šachovnice obrazci daného tvaru mohou být velice zajímavé a po matematické stránce i poučné. Můžete se o tom přesvědčit v následujících dvou příkladech.

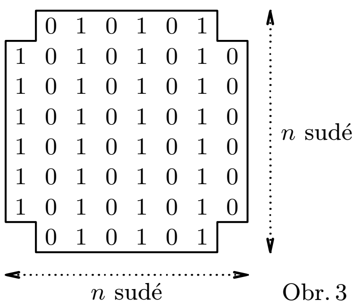
Příklad 1. Ze šachovnice $n \times n$, kde n je přirozené číslo, $n \geqq 3$, jsou odstraněna všechna čtyři rohová políčka. Určete, pro která n ji lze pokrýt obrazci, které se skládají ze čtyř shodných čtverečků podle obr. 1; každý čtvereček má přitom stejnou velikost jako políčko dané šachovnice.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Pokusíte-li se pokrýt šachovnici uvedeného tvaru pro $n = 3, 4, 5$, budete neúspěšní, neboť ji danými obrazci – jak ukážeme dále – pokrýt nelze. Naproti tomu pro $n = 6$ takové pokrytí existuje; jedno z nich je znázorněno na obr. 2.

Uvědomme si nejprve, že k tomu, aby bylo možno šachovnici $n \times n$ s odstraněnými rohovými políčky danými obrazci pokrýt, je nutné, aby číslo $n^2 - 4$ bylo násobkem čtyř, odkud vyplývá, že n musí být sudé. Tato podmínka však není postačující, jak ostatně ukazuje i případ $n = 4$. Vezměme proto šachovnici $n \times n$ bez rohových políček, kde n je sudé, očíslujme její políčka podle obr. 3 a předpokládejme, že je danými obrazci pokryta. Každý z nich zakrývá buď tři jedničky a jednu nulu, nebo tři nuly a jednu jedničku. Protože počet nul na této šachovnici i počet jedniček je roven sudému číslu $\dfrac{n^2-4}{2}$, je počet obrazců zakrývajících tři jedničky a nulu stejný jako počet obrazců zakrývajících tři nuly a jedničku. Odtud plyne, že počet všech obrazců pokrývajících šachovnici je sudý, takže číslo $\dfrac{n^2-4}{4}$ je sudé; znamená to, že číslo $n^2 - 4$ je násobek osmi. Číslo n^2 lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$n^2 = 8m + 4, \quad m \in \mathsf{N},$$

odkud poměrně snadno zdůvodníme, že musí být

$$n = 4k + 2, \quad k \in \mathsf{N}.$$

Sudé číslo n lze totiž vyjádřit právě dvěma způsoby, a to

$$n = 4k, \quad n = 4k + 2,$$

z nichž pouze pro $n = 4k + 2$ vyjde výraz požadovaného tvaru:

$$n^2 = (4k+2)^2 = 8 \cdot \left(2k^2 + 2k\right) + 4 = 8m + 4$$

Zjistili jsme tak:

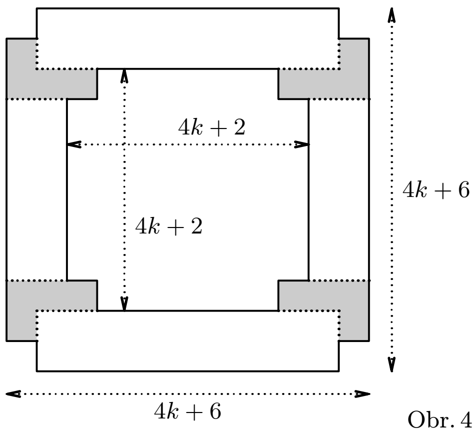
Dá-li se šachovnice $n \times n$ s odstraněnými rohovými políčky danými obrazci pokrýt, platí $n = 4k + 2$, $k \in \mathsf{N}$.

Zbývá ještě ukázat, že platí i obráceně:

Šachovnici $(4k+2)\times(4k+2)$ *lze danými obrazci pokrýt.*

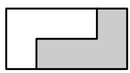
Dokážeme to matematickou indukcí.

Pro $k=1$ toto tvrzení platí, jak je vidět z obr. 2. Předpokládejme, že platí pro přirozené číslo k, tj. že šachovnici $n\times n$ bez rohových políček, kde $n=4k+2$, je možné danými obrazci pokrýt. Dokážeme, že potom je to možné i pro šachovnici $n'\times n'$, pro kterou $n'=4(k+1)+2=4k+6$.



Obr. 4

Šachovnici $(4k+2)\times(4k+2)$ doplníme způsobem, který je znázorněn na obr. 4, na šachovnici $(4k+6)\times(4k+6)$. Podle předpokladu je šachovnice $(4k+2)\times(4k+2)$ pokryta; na podbarvená políčka zbývající části šachovnice $(4k+6)\times(4k+6)$ umístíme čtyři dané obrazce. Pak zůstanou nepokryty dva obdélníky $(4k+4)\times 2$ a dva obdélníky $4k\times 2$. Utvoříme-li nyní z daných obrazců podle obr. 5 dvojice, pokryjeme takto vzniklými obdélníčky 4×2 zbývající část šachovnice $(4k+6)\times(4k+6)$ snadno.



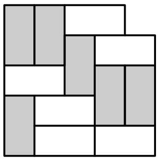
Obr. 5

Dokázali jsme tak:

Šachovnici $n\times n$ *bez rohových políček lze obrazci, jejichž tvar je znázorněn na obr. 1, pokrýt právě tehdy, je-li* $n=4k+2,\ k\in\mathsf{N}$.

Příklad 2. Ze šachovnice $(2n+1)\times(2n+1)$, kde n je přirozené číslo, je odstraněno jedno rohové políčko. Určete, pro která n ji lze pokrýt obdélníčky 2×1 tak, že polovina z nich je v horizontální a polovina ve vertikální poloze.

Přesvědčte se nejprve sami, že pro $n=1$ a $n=3$ takové pokrytí neexistuje, zatímco pro $n=2$ ano – je znázorněno na obr. 6, ve kterém jsou obdélníčky ve svislé poloze podbarveny.



Obr. 6

1	0	1	0	1	0	1	0	
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1

$2n+1$

Obr. 7

Vezměme šachovnici $(2n+1)\times(2n+1)$ bez jednoho rohového políčka a očíslujme její políčka stejně jako v předcházejícím příkladu (obr. 7). Snadno zjistíme, že počet jedniček je roven $2n^2+3n$ a počet nul je $2n^2+n$. Protože na této šachovnici je celkem $4n^2+4n$ políček, je počet obdélníčků, které ji pokrývají, poloviční, tj. $2n^2+2n$. Obdélníčků ve vodorovné poloze je tedy n^2+n, stejně jako obdélníčků v poloze svislé. Protože každý obdélníček ve vodorovné poloze zakrývá jen jednu jedničku, je součet čísel pod všemi těmito obdélníčky n^2+n, odkud dostáváme, že součet čísel pod všemi obdélníčky v poloze svislé je

$$\left(2n^2+3n\right)-\left(n^2+n\right)=n^2+2n.$$

Toto číslo musí být sudé, neboť každý obdélníček ve svislé poloze zakrývá dvě jedničky nebo dvě nuly, takže součet čísel pod každým z nich je sudé číslo. Odtud vyplývá, že je sudé i číslo n^2, a tedy i číslo n.

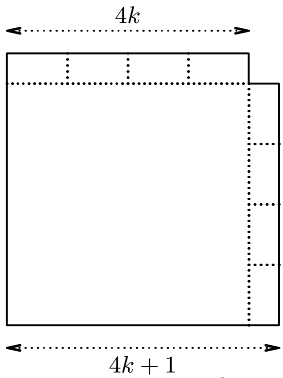
Ukázali jsme tak:

Dá-li se šachovnice $(2n+1)\times(2n+1)$ bez jednoho rohového políčka danými obrazci požadovaným způsobem pokrýt, platí $n=2k$, $k\in\mathsf{N}$.

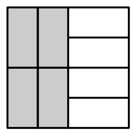
Zbývá ještě ukázat, že platí i obráceně:

Šachovnici $(2n+1)\times(2n+1)$ *bez jednoho rohového políčka, kde* $n=2k,\ k\in\mathsf{N}$, *lze danými obrazci požadovaným způsobem pokrýt.*

To je jednoduché – pokrýt šachovnici $(4k+1)\times(4k+1)$ s jedním odstraněným rohovým políčkem (obr. 8) požadovaným způsobem obdélníčky 2×1 není žádný problém. Čtverec $4k\times 4k$, který je na obr. 8 vyznačen, rozdělíme na k^2 čtverců 4×4 a každý z nich pak pokryjeme čtyřmi obdélníčky ve vodorovné poloze a čtyřmi obdélníčky ve svislé poloze podle obr. 9. Dva zbylé obdélníky $4k\times 1$ pokryjeme obdélníčky 2×1 snadno.



Obr. 8


Obr. 9

Odvodili jsme tak:

Šachovnici $(2n+1)\times(2n+1)$ *bez jednoho rohového políčka lze požadovaným způsobem pokrýt obdélníčky* 2×1 *právě tehdy, je-li* $n=2k$, $k\in\mathsf{N}$.

Podobnou problematikou se zabývají články:

CALDA, E.: *Pár jednoduchých úloh o šachovnici.* MFI, roč. 6 (1996), č. 3
CALDA, E.: *Námořní bitva a úlohy o pokrývání.* Rozhledy MF, roč. 60 (1981–82), č. 6