Jaromír Šimša

Výpočet čísla π z obvodů pravidelných mnohoúhelníků, 1. část

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 80 (2005), No. 1, 6–14

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146082`

Výpočet čísla π z obvodů pravidelných mnohoúhelníků, 1. část

Jaromír Šimša, PřF MU Brno

1. Úvod

Číslo π jistě všichni znáte. Seznámili jste se s ním již na základní škole jako s důležitou matematickou konstantou ze vzorců

$$o = 2\pi R, \qquad S = \pi R^2, \tag{1}$$

podle kterých počítáme obvod o a obsah S kruhu o daném poloměru R. Konstantě π se u nás i jinde v Evropě říká též „Ludolfovo číslo“. Připomínáme si tím holandského matematika *Ludolpha van Ceulena* (1540–1610), který hodnotu čísla π stanovil na 32 desetinných míst. Dosáhl toho mnohaletými (údajně celoživotními) vytrvalými numerickými výpočty založenými na geometrickém postupu, který dávno předtím vymyslel antický učenec *Archimedes ze Syrakus* (asi 287–212 př. n. l.). V našem článku tento postup podrobně vyložíme současným matematickým jazykem a dáme do překvapivé souvislosti s různými *druhy průměrů* kladných reálných čísel. Naznačíme rovněž, jaká úskalí musel překonávat Archimedes a jeho následovníci (až po van Ceulena) při praktickém uskutečnění výpočtů založených na Archimedově teoretickém postupu. V druhém dílu článku, který otiskneme v příštím čísle Rozhledů, pak vysvětlíme, jakými úvahami vylepšil Archimedův postup další holandský matematik a fyzik *Christian Huygens* (1629–1695), aniž přitom překročil hranice elementární geometrie. Ukážeme tam také, nakolik lze touto důmyslnou Huygensovou obměnou zkrátit délku výpočtů čísla π s požadovanou přesností.

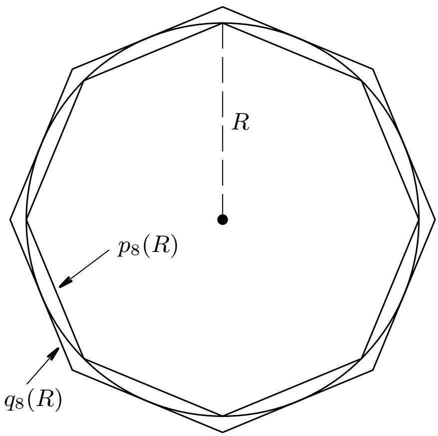
Dodejme, že od 18. století hledají matematikové přesnější hodnoty čísla π (které dnes známe již na desítky miliard desetinných míst) zcela jinými, negeometrickými prostředky, jež přinesla nová matematická disciplína zvaná *diferenciální a integrální počet.* Můžete se (nejen o tom) dočíst v poutavé knížce *P. Beckman: Historie čísla* π (Academia, Praha 1998).

2. Archimedův postup – teorie

Budeme-li počítat číslo π podle prvního ze vzorců (1), musíme mít dosti přesnou představu o tom, co pojem *obvod kruhu* (obecněji *délka křivky*) znamená. Současná matematika ho vymezuje exaktně způsobem, který poznáte při vysokoškolských přednáškách z matematické analýzy. Toto *teoretické* pojetí je založeno na geniálně prosté myšlence, kterou patrně poprvé vyjádřil právě Archimedes, když uvažoval, jak délku kružnice *prakticky* odhadnout:

Vepíšeme-li do dané kružnice libovolný mnohoúhelník, bude jeho obvod menší než délka kružnice; pokud naopak kolem kružnice mnohoúhelník opíšeme, bude jeho obvod větší než délka kružnice.

Archimedes správně usoudil, že rozdíl mezi obvodem opsaného a vepsaného mnohoúhelníku bude tím menší, čím lépe se budou jejich hranice přibližovat dané kružnici, tedy čím kratší budou jejich jednotlivé strany. Výpočty těchto obvodů budou zřejmě nejjednodušší, omezíme-li se na *pravidelné* mnohoúhelníky. Označme proto $p_n(R)$, resp. $q_n(R)$ obvod pravidelného n-úhelníku, který je vepsán, resp. opsán kružnici o poloměru R (obr. 1).



$$p_n(R) < 2\pi R < q_n(R)$$

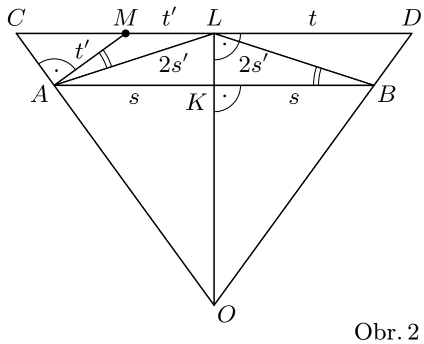
Obr. 1

Kdybychom byli dnes postaveni před úkol vypočítat $p_n(R)$, $q_n(R)$ pro různé hodnoty n, jistě bychom využili vzorce s goniometrickými funkcemi

$$p_n(R) = 2nR \sin\frac{\pi}{n}\,, \qquad q_n(R) = 2nR \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\,. \tag{2}$$

Jak bychom si však poradili bez tabulek či kalkulátorů? Dokázali bychom (vybaveni jen tužkou a papírem) dosti přesně vypočítat hodnoty $p_n(R)$, $q_n(R)$ pro některá n (různá od 3, 4, 6)? Kdyby takto ztížený úkol bravurně nevyřešil Archimedes (způsobem, který nyní vyložíme), neměly by jeho úvahy o vepsaných a opsaných mnohoúhelnících v tehdejší době valný praktický význam. Pokud byste totiž chtěli hodnoty $p_n(R)$, $q_n(R)$ získávat měřením a ne výpočtem, museli byste pravidelné n-úhelníky rýsovat nadmíru přesně, abyste získali třeba jen hrubé odhady $3{,}1 < \pi < 3{,}2$.

Archimedes objevil, že ze známých hodnot obvodů $p_n(R)$ a $q_n(R)$ lze pomocí aritmetických operací $+$, $-$, $\times$, $:$ a $\sqrt{}$ vypočítat obvody $p_{2n}(R)$ a $q_{2n}(R)$, tedy obvody pravidelných mnohoúhelníků, které mají oproti původním mnohoúhelníkům *dvojnásobný počet stran.* Tento poznatek odvodíme podle obr. 2, na kterém je bod O středem uvažované kružnice, její tětiva AB (o středu K a délce $2s$) je stranou vepsaného n-úhelníku, tětivy AL, BL (délky $2s'$) jsou sousedními stranami vepsaného $2n$-úhelníku, tečná úsečka CD (o středu L a délce $2t$) je stranou opsaného n-úhelníku a konečně tečné úsečky AM, ML (délky t') jsou polovinami sousedních stran opsaného $2n$-úhelníku (všechny zmíněné mnohoúhelníky jsou pravidelné).



Obr. 2

Z podobnosti trojúhelníků MAC, OLC a OKA s přihlédnutím k rovnosti $|AO| = |LO|$ plynou vztahy

$$\frac{t'}{t-t'} = \frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|LO|}{|OC|} = \frac{|AO|}{|OC|} = \frac{|AK|}{|CL|} = \frac{s}{t}\,.$$

Z rovnosti obou krajních zlomků snadno vypočteme t' pomocí s a t:

$$t' = \frac{st}{s+t} \tag{3a}$$

Podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu jsou úhly ABL a LAM shodné, takže rovnoramenné trojúhelníky ABL a ALM jsou podobné. Pro poměry délek jejich stran tudíž platí úměra

$$\frac{2s'}{2s} = \frac{|AL|}{|AB|} = \frac{|AM|}{|AL|} = \frac{t'}{2s'}\,,$$

ze které vyjádříme s' pomocí s a t':

$$s' = \sqrt{\frac{st'}{2}} \tag{3b}$$

Dosazením vztahů (3a) a (3b) do rovností

$$p_n(R) = 2ns, \quad q_n(R) = 2nt, \quad p_{2n}(R) = 4ns', \quad q_{2n}(R) = 4nt'$$

dostaneme slíbené Archimedovy vzorce, které umožňují aritmetický výpočet obvodů opsaného a vepsaného $2n$-úhelníku pomocí obvodů opsaného a vepsaného n-úhelníku:

$$q_{2n}(R) = \frac{2p_n(R)q_n(R)}{p_n(R)+q_n(R)}\,, \quad p_{2n}(R) = \sqrt{p_n(R)q_{2n}(R)} \quad (n \geqq 3) \tag{4}$$

Získané vzorce jsou pozoruhodné tím, že jsou zapsány známými výrazy, kterým říkáme *harmonické* a *geometrické průměry*. Připomeňme, že harmonickým průměrem $H(a,b)$ a geometrickým průměrem $G(a,b)$ dvou kladných čísel a, b nazýváme hodnoty výrazů

$$\begin{aligned} H(a,b) &= \frac{2ab}{a+b} = \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}, \\ G(a,b) &= \sqrt{ab} \end{aligned}$$

a že v případě $a \neq b$ jsou tyto průměry spolu s aritmetickým průměrem čísel a, b uspořádány takto:

$$\min\{a,b\} < H(a,b) < G(a,b) < \frac{a+b}{2} < \max\{a,b\} \tag{5}$$

Jaký početní význam vzorce (4) mají? Známe-li pro některé k hodnoty $p_k(R)$ a $q_k(R)$ (jak je tomu např. pro $k=4$ či $k=6$), můžeme podle (4) postupně počítat hodnoty členů tzv. *Archimedovy rekurentní posloupnosti*

$$\begin{aligned} &q_k(R),\ p_k(R),\ q_{2k}(R),\ p_{2k}(R), \\ &\qquad q_{4k}(R),\ p_{4k}(R),\ q_{8k}(R),\ p_{8k}(R),\ \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Pravidlo, podle kterého je posloupnost (6) sestavena, lze slovně vyjádřit takto:

Každý člen posloupnosti (6) *(počínaje třetím) je střídavě harmonickým či geometrickým průměrem předcházejících dvou členů.*

Vysvětlíme nyní, proč každá posloupnost (6) poměrně rychle konverguje. Z nerovnosti $p_n(R) < q_n(R)$, rekurentních vzorců (4) a odhadů (5) plynou předně odhady

$$p_n(R) < q_{2n}(R) < \frac{p_n(R)+q_n(R)}{2} < q_n(R),$$

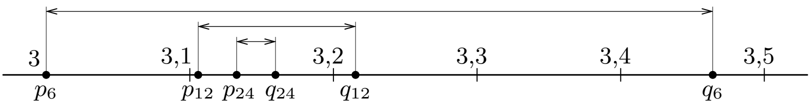
jež lze s odhady $p_n(R) < p_{2n}(R) < q_{2n}(R)$ spojit do řetězce nerovností

$$p_n(R) < p_{2n}(R) < q_{2n}(R) < \frac{p_n(R)+q_n(R)}{2} < q_n(R). \tag{7}$$

Interval $\langle p_{2n}(R),\, q_{2n}(R)\rangle$ je tedy vložen do intervalu $\langle p_n(R),\, q_n(R)\rangle$ a pro jejich délky platí

$$q_{2n}(R) - p_{2n}(R) < \frac{q_n(R) - p_n(R)}{2} \quad (n \geqq 3)$$

(na obr. 3 vidíte na číselné ose první tři z těchto intervalů pro počáteční index $k = 6$ a poloměr $R = \frac{1}{2}$). Poslední nerovnosti již ukazují, proč posloupnost (6) (bez ohledu na volbu počátečního indexu k) skutečně konverguje. Jak víme z geometrického významu veličin $p_n(R)$ a $q_n(R)$, limitou každé posloupnosti (6) je hledaná délka $2\pi R$.



Obr. 3

3. Archimedův postup – početní praxe

Zabývejme se nyní otázkou výpočtů členů Archimedovy rekurentní posloupnosti (6). V celém dalším textu budeme uvažovat obvody $p_n(R)$ a $q_n(R)$ pro hodnotu poloměru $R = \frac{1}{2}$, neboť tehdy je délka kružnice $2\pi R$ rovna přímo číslu π. Kvůli stručnosti zápisů označíme $p_n = p_n\left(\frac{1}{2}\right)$, $q_n = q_n\left(\frac{1}{2}\right)$ a vzorce (4) přepíšeme do tvaru

$$q_{2n} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}\,, \quad p_{2n} = \sqrt{p_n q_{2n}} \quad (n \geqq 3). \tag{4'}$$

Archimedův praktický výpočet čísla π lze stručně zhodnotit následující větou.

Archimedes se zabýval určením hodnot deseti čísel

$$q_6,\ p_6,\ q_{12},\ p_{12},\ q_{24},\ p_{24},\ q_{48},\ p_{48},\ q_{96},\ p_{96} \tag{8}$$

a jako výsledek získal oboustranný odhad čísla π *ve tvaru*

$$3{,}140\,84\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3{,}142\,85\ldots \tag{9}$$

Toto stručné hodnocení v nás patrně nevyvolá zvláštní obdiv k početnímu výkonu antického učence, dokud si neuvědomíme, jaké prostředky výpočtů měl Archimedes k dispozici. Především mu chybělo to základní, bez čeho se dnes při manipulaci s číselnými údaji neobejdeme, totiž *zapisování čísel v poziční soustavě*. Naše obvyklá poziční soustava má za základ číslo 10; čísla zapsaná v desítkové soustavě můžeme podle dobře známých algoritmů písemně sčítat, odčítat, násobit a dělit na zadaný počet platných číslic, stačí mít jen trpělivost a pečlivě hlídat, abychom se v některém řádu nespletli. Vaši prarodiče si ze školy možná pamatují i algoritmus písemného výpočtu druhé odmocniny, potřebný při uplatnění druhého z rekurentních vzorců (4′). Zdůrazněme, že Archimedes mohl zapisovat (poněkud komplikovaným způsobem) pouze čísla přirozená, ostatní (necelá) čísla musel vyjadřovat poměry přirozených čísel, tedy jako zlomky.

Ocenit musíme i exaktní způsob, jakým se Archimedes vypořádal s vlivem chyb, které při přibližných výpočtech vznikají. Jeho cílem nebylo pouze získat *nějaké* přiblížení hledaného čísla, ale stanovit konkrétní meze, ve kterých toto neznámé číslo zaručeně leží. Podle Archimeda jsou pro číslo π takové „teoretické“ meze vyjádřeny nerovnostmi $p_n < \pi < q_n$; tyto meze jsou tím „sevřenější“, čím je index n větší. Po přibližném výpočtu čísel (8) budou tedy výslednými mezemi pro číslo π tyto dvě hodnoty: *dolní* odhad čísla p_{96} a *horní* odhad čísla q_{96}. Archimedes fakticky dosáhl odhadů

$$p_{96} > \frac{96 \cdot 66}{2\,017\frac{1}{4}}\,, \qquad q_{96} < \frac{96 \cdot 153}{4\,673\frac{1}{2}}$$

(násobení v čitatelích jsme pouze naznačili a ve jmenovatelích jsme ponechali smíšená čísla, abychom zachovali autentičnost zlomků z Archimedovy práce *O měření kruhu*). Protože takové zlomky připadly Archimedovi pochopitelně nepraktické, nahradil je blízkými (ve správném „směru“) zlomky $\frac{223}{71}$ a $\frac{22}{7}$, které mají menší čitatele a jmenovatele. Můžeme jen spekulovat o tom, jak takové vhodné „náhradníky“ Archimedes objevil.

Vysvětleme nyní, proč k získání dolního odhadu čísla p_{96} a horního odhadu čísla q_{96} Archimedes potřeboval „oboustranné“ (tedy dolní i horní) odhady obou předchozích členů p_{48} a q_{48}. Vyplyne to samozřejmě z vlastností rekurentních vzorců (4′), které teď posoudíme pro obecné n. Protože průměr $H(a, b)$ je stejně jako průměr $G(a, b)$ v každé z kladných proměnných a, b *rostoucí funkce*, lze ze vzorců (4′) získat odhady

$$\begin{aligned} D(q_{2n}) &= \frac{2D(p_n)D(q_n)}{D(p_n)+D(q_n)}\,, \qquad & H(q_{2n}) &= \frac{2H(p_n)H(q_n)}{H(p_n)+H(q_n)}\,, \\ D(p_{2n}) &= \sqrt{D(p_n)D(q_{2n})}\,, \qquad & H(p_{2n}) &= \sqrt{H(p_n)H(q_{2n})}\,, \end{aligned} \tag{10}$$

kde symbolem $D(r)$, resp. $H(r)$ značíme libovolný kladný dolní, resp. horní odhad kladného čísla r, tedy jakákoliv čísla s vlastností

$$0 < D(r) \leqq r \leqq H(r).$$

Těchto zákonitostí si byl vědom i Archimedes (i když je pochopitelně nezapisoval podobnými symbolickými vzorci), takže pro členy p_{48} a q_{48}, stejně jako pro všechna předchozí čísla z (8), pečlivě stanovoval „jemné“ oboustranné odhady. I když do větších podrobností Archimedových výpočtů nepůjdeme, upozorněme, že i vzorce (10) mají spíše teoretický ráz, neboť hodnoty jejich pravých stran nejsme schopni pro daná $D(p_n)$, $H(p_n)$, $D(q_n)$, $H(q_n)$ většinou přesně vyčíslit, ale pouze odhadnout (požadovaným směrem).

Nezmínili jsme se dosud ještě o jednom významném stavebním prvku, bez kterého by Archimedes nemohl celou pyramidu výpočtů délky kružnice vůbec sestavit. Je jím určování druhých odmocnin, přesněji odhadování jejich hodnot pomocí vhodných zlomků. V první etapě výpočtů musel Archimedes odhadnout číslo $\sqrt{3}$, neboť obvody pravidelných šestiúhelníků jsou dány vzorci $p_6 = 3$, $q_6 = 2\sqrt{3}$ (připomínáme, že $R = \frac{1}{2}$). Archimedes dobře chápal, že málo přesné odhady členu q_6 budou v průběhu výpočtů více a více přispívat ke ztrátě kvality výsledků, proto mistrovsky vybral jemné a přitom poměrně jednoduché odhady

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1\,351}{780}\,,$$

o jejichž přesnosti svědčí rovnost

$$\frac{1\,351}{780} - \frac{265}{153} = \frac{1}{39\,780}\,.$$

Ve výpočtech čísla π našel Archimedes řadu následovníků, kteří neúnavně rozšiřovali posloupnost (8) hledáním přibližných hodnot dalších členů. Prohlédněte si tabulku 1 přibližných hodnot čísel p_n, q_n pro několik prvních indexů tvaru $n = 3 \cdot 2^k$; čarou jsou podtrženy skupiny číslic, ve kterých se vypsané hodnoty shodují s hledaným číslem π.

n	p_n	q_n
3	2,598076211353	5,196152422706
6	$\underline{3},000000000000$	$\underline{3},464101615137$
12	$\underline{3{,}1}05828541230$	$\underline{3},215390309173$
24	$\underline{3{,}1}32628613281$	$\underline{3{,}1}59659942097$
48	$\underline{3{,}1}39350203046$	$\underline{3{,}14}6086215131$
96	$\underline{3{,}141}031950890$	$\underline{3{,}14}2714599645$
192	$\underline{3{,}141}452472285$	$\underline{3{,}141}873049979$
384	$\underline{3{,}1415}57607911$	$\underline{3{,}141}662747056$
⋮	⋮	⋮
$3 \cdot 2^{17}$	$\underline{3{,}1415926535}56$	$\underline{3{,}141592653}656$

Tabulka 1

V posledním řádku tabulky 1 jsou uvedeny hodnoty, které roku 1593 vypočetl známý francouzský matematik *François Viète* (1540–1603). Úvodem článku zmíněný Ludolph van Ceulen vyšel z počáteční hodnoty $k = 4$ (tedy z obvodů vepsaného a opsaného čtverce) a po *šedesátém* (!) užití rekurentní dvojice vzorců (4′) dospěl písemnými výpočty k následujícím odhadům (jež uveřejnila jeho žena až po van Ceulenově smrti v r. 1615):

$$p_{2^{62}} > \underline{3{,}14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288}\,39541$$
$$q_{2^{62}} < \underline{3{,}14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288\,4}6831$$

Jaký to příklad nezměrné lidské vytrvalosti a píle!