Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Vlastimil Dlab

Porozumění Dudeneyho přívěsku a dělení obrazců

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 61 (2016), No. 4, 257–272

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/145973

Porozumění Dudeneyho přívěsku a dělení obrazců

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Abstrakt. Článek se zabývá dělením rovinných mnohoúhelníků na konečný počet částí, z nichž lze sestavit jiné, předem zvolené mnohoúhelníky. Úvodní část je věnována historii těchto disekcí a důkazu Wallaceovy–Bolyaiovy–Gerwienovy věty, podle které lze mezi sebou transformovat libovolné dva mnohoúhelníky o stejném obsahu. Hlavním tématem článku je tzv. Dudeneyho přívěsek, tj. rozdělení rovnostranného trojúhelníku na čtyři části, z nichž lze složit čtverec. Dudeneyho konstrukce je i po sto letech od svého objevu předmětem řady publikací; tento článek poukazuje na její podstatu a zobecňuje ji pro trojúhelníky, které nejsou rovnostranné.

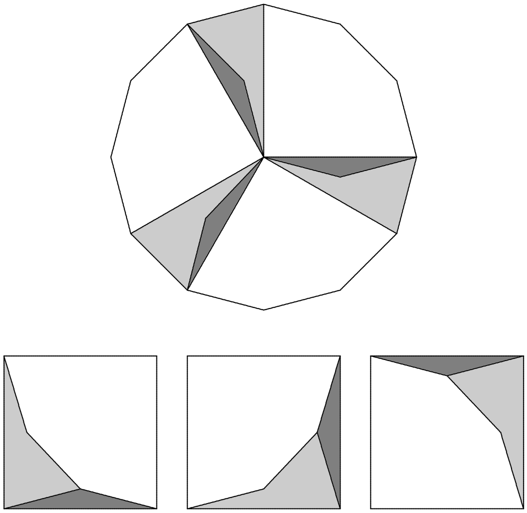
1. Úvod

Vymezit nějakou přesnější hranici mezi rekreačními hlavolamy a matematikou je často velmi obtížné. Zcela určitě je tomu tak v případě disekcí, tj. dělení rovinných geometrických obrazců. To je disciplína, která byla v historii mnoha kultur velmi populární (viz [3]). Historické záznamy a důkazy jsou bohužel velice vzácné, nicméně poukazují na mistrovství dosažená např. v čínském či arabském světě. Čínské diagramy, které vytvořil Liu Hui (asi 220–280) ve třetím století našeho letopočtu, se bohužel nedochovaly. Jejich charakter připomněl v osmnáctém století čínský učenec Dai Zhen (1724–1777) jednou ilustrací ke speciálnímu vydání *Jiu zhang suan shu* (Matematika v devíti kapitolách), kterou znázorňuje obr. 1. Všimněme si, že úloha zapadá do snahy aproximovat číslo π: obrázek představuje geometrický důkaz velmi hrubé aproximace čísla π číslem 3.

Arabskou vědu v této disciplíně patrně nejlépe reprezentuje významný matematik Muhammad Abu'l-Wafa Al-Buzjani (940–998), jehož přínos, stejně jako přínos veškeré arabské vědy světovému rozvoji, nebyl dodnes doceněn. Zdá se, že teprve v posledních desetiletích nastává čas se vypořádat s evropským centralismem ve vědě a umění. Ten není ničím nedávným. François Viète (1540–1603) vyjadřuje tento pohled výroky, které jsou natolik odpudivé, že jsou v literatuře velmi zřídka citovány. Přitom současní historikové vědy připomínají, že kdyby Viète lépe znal arabskou matematiku, zjistil by, že mnohé ideje, k nimž dospěl, byly už dříve arabským matematikům známy. Viète nebyl nikdy schopen přiznat, že v bagdádském Domě moudrosti (Bayt al-Hikma, 830–1258) vzkvétala po několik století věda a kultura, která nám mimo jiné zachovala v arabských překladech řeckou literaturu včetně matematické. Připomeňme, že učenci kalifátu Hárúna ar-Rašída (763–809) a jeho syna al-Ma'múna (786–833) měli blízké styky s tehdejším světem včetně dvora slavného

---

Prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Bzí 47, 468 22 Železný Brod, e-mail: vdlab@math.carleton.ca



Obr. 1. Rozdělení pravidelného dvanáctiúhelníku na tři čtverce podle Dai Zhena

franského krále Karla Velikého (747/8–814), kde důkazem kulturní vyspělosti bylo umět se podepsat. Abu'l-Wafa dosáhl úspěchů nejen při dělení a transformacích rovinných obrazců, ale i v jejich aplikacích v arabské architektuře. Je třeba zdůraznit, že dělení čtverců (viz obr. 2) a pravidelných mnohoúhelníků představovalo jen nepatrnou část všeobecného rozvoje nejen v matematice, ale i v mnoha jiných disciplínách, které v tomto období rozkvétaly.

V tomto textu se omezíme na dělení mnohoúhelníků na konečný počet částí, z nichž se dají sestavit jiné předem zvolené obrazce. Je pochopitelné, že takováto dělení existují jen za určitých podmínek, jako je např. rovnost obsahů. Jelikož dělení nejsou jednoznačná, hrají důležitou roli další požadavky, jako je např. počet dílčích mnohoúhelníků nutných k přeskupení nebo jejich symetrie.

Abychom se mohli lépe a přesněji vyjadřovat, domluvme se na několika jednoduchých pojmech. Konečnou množinu mnohoúhelníků $\mathcal{R}(A) = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ nazveme *rozdělením mnohoúhelníku A*, jestliže

(1) $\bigcup_{t=1}^{m} X_t = A$;

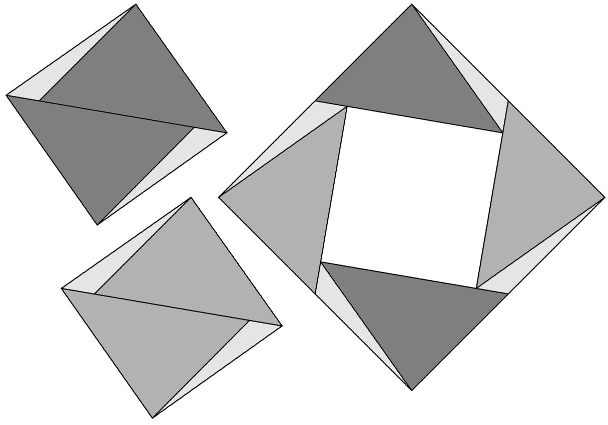
(2) pro každou dvojici indexů $t_1 \neq t_2$ je průnikem $X_{t_1} \cap X_{t_2}$ buď úsečka, nebo bod, nebo prázdná množina.

Jestliže $\mathcal{R}(B) = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ je rozdělení mnohoúhelníku B takové, že $m = n$ a existuje permutace π množiny $\{1, 2, \ldots, m\}$ taková, že X_t a $Y_{\pi(t)}$ jsou shodné pro všechna $1 \leq t \leq m$, řekneme, že A a B *mají společné rozdělení* a píšeme $\mathcal{R}(A) \equiv \mathcal{R}(B)$. Snadno se přesvědčíme, že relace $\equiv$ je tranzitivní:

Jestliže mnohoúhelníky A a B a mnohoúhelníky B a C mají společná rozdělení, potom též mnohoúhelníky A a C mají společné rozdělení.

Skutečně, nechť $\mathcal{R}_1(A), \mathcal{R}_1(B), \mathcal{R}_2(B)$ a $\mathcal{R}_2(C)$ jsou rozdělení mnohoúhelníků A, B a C, pro která je

$$\mathcal{R}_1(A) \equiv \mathcal{R}_1(B) \quad \text{a} \quad \mathcal{R}_2(B) \equiv \mathcal{R}_2(C),$$



Obr. 2. Rozdělení čtverce na tři shodné čtverce podle Abu'l-Wafy

kde $\mathcal{R}_1(B) = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$ a $\mathcal{R}_2(B) = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$. Potom všechny mnohoúhelníky, které vzniknou jako průniky

$$Y_r \cap Z_s, \quad 1 \leq r \leq m, \ 1 \leq s \leq n,$$

určují rozdělení $\mathcal{R}(A)$ a $\mathcal{R}(C)$ (zjemnění původních $\mathcal{R}_1(A)$ a $\mathcal{R}_2(C)$), pro něž platí $\mathcal{R}(A) \equiv \mathcal{R}(C)$.

Tato tranzitivita je jádrem důkazu následující věty spojované s řadou matematiků, nejčastěji s Williamem Wallacem (1768–1843), Farkasem Bolyaiem (1775–1856) a Paulem Gerwienem (19. stol.):

Každé dva mnohoúhelníky o stejném obsahu mají společné rozdělení.

Jinými slovy: jestliže mnohoúhelník A má stejný obsah jako mnohoúhelník B, potom je možné A rozdělit na konečný počet částí, z nichž lze sestavit mnohoúhelník B.

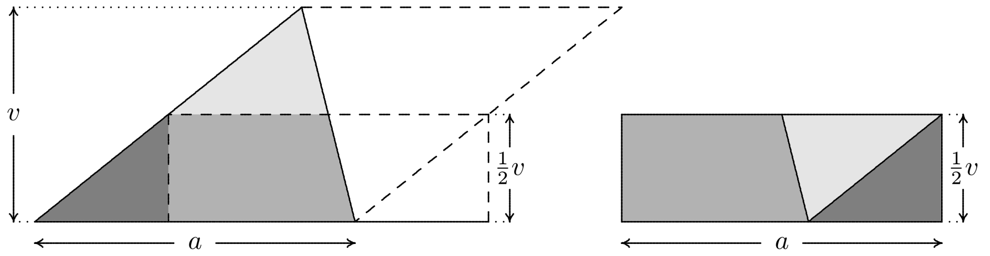
Důkaz tohoto faktu je překvapivě jednoduchý. Je založen na existenci společného rozdělení jistých dvojic útvarů, které ukazují obrázky 3, 4 a 5.

Uvažujme triangulaci mnohoúhelníku A.

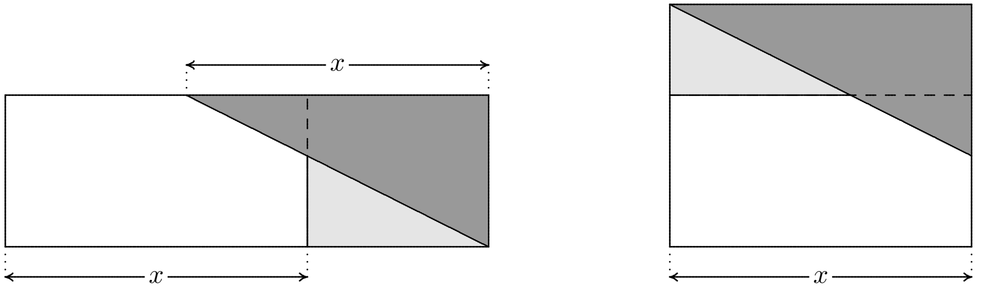
(1) Ke každému trojúhelníku T této triangulace zkonstruujme obdélník M, který s ním má společné rozdělení (obr. 3), a od něho přejděme ke čtverci N, který má s obdélníkem M společné rozdělení: stranu x čtverce N sestrojme ze stran obdélníku M např. pomocí Eukleidovy věty o výšce. Je-li w delší strana obdélníku M, je zřejmě $w > x$. Pokud je $w > 2x$, oddělme od obdélníku M vhodný počet obdélníků s jednou stranou x, se zbylým obdélníkem proveďme konstrukci z obr. 4 a získané obdélníky poskládejme na sebe do čtverce o straně x.

(2) Množinu čtverců (které odpovídají trojúhelníkům z triangulace) postupně redukujme pomocí konstrukce z obr. 5 tak dlouho, až dojdeme k jedinému čtverci Q, jehož obsah je roven obsahu mnohoúhelníku A a který s ním má společné rozdělení (využíváme tranzitivity relace „mít společné rozdělení").

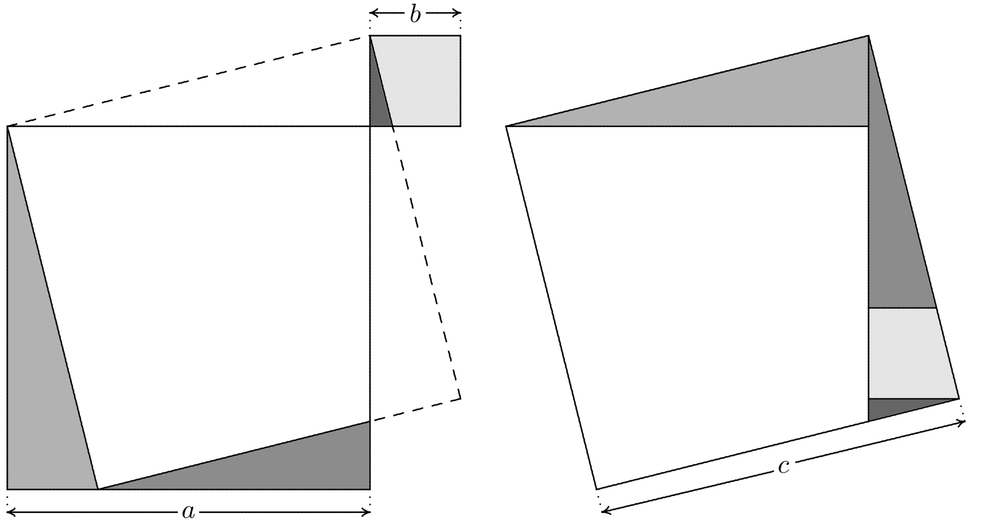
Mají-li mnohoúhelníky A, B stejný obsah, mají oba společné rozdělení se čtvercem Q, a tedy i navzájem. Poznamenejme ještě, že obr. 5 je zároveň důkazem Pythagorovy věty.



Obr. 3. Společné rozdělení trojúhelníku a obdélníku

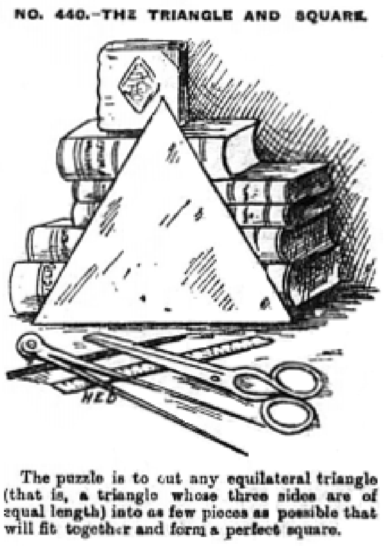


Obr. 4. Společné rozdělení obdélníku a obdélníku s danou základnou x



Obr. 5. Společné rozdělení dvou čtverců a jednoho čtverce ($c^2 = a^2 + b^2$)

Stojí za zmínku, že náš důkaz je konstruktivní: Dává fyzicky proveditelný návod, jak jeden z mnohoúhelníků rozstříhat a ze získaných dílků složit druhý mnohoúhelník. Zřejmou nevýhodou je fakt, že počet dílků, který tento postup vyžaduje, zpravidla značně přesahuje minimální počet potřebný k takové přeměně. Tento aspekt dělení mnohoúhelníků bude středem naší pozornosti v další části textu.



Obr. 6. Zadání Dudeneyho úlohy ze 6. dubna 1902

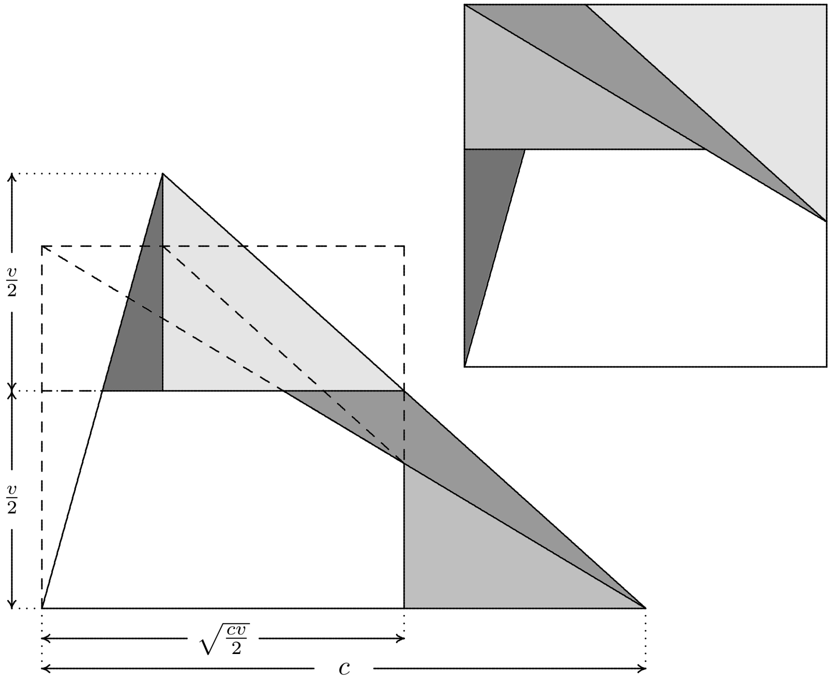
Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova věta je někdy omylem přičítána Davidu Hilbertovi (1862–1943) — viz např. [4]. Možným vysvětlením je skutečnost, že analogický problém pro mnohostěny v trojrozměrném prostoru je znám jako Hilbertův třetí problém. Prostorová analogie věty však neplatí, jak ukázal už v roce 1900 Hilbertův student Max Dehn (1878–1952). Dokázal dokonce, že neexistuje společné rozdělení dvou obecných čtyřstěnů, což byla původní Hilbertova formulace problému.

2. Dudeneyho přívěsek — historie

Dělení rovinných útvarů na části, které lze uspořádat do jiných, předem určených útvarů, se stalo před sto lety velmi populární formou matematických hlavolamů a hříček. Jedním z cílů bylo minimalizovat počet prvků, které byly k přeměně útvarů zapotřebí. Mezi osobnostmi, které tuto činnost popularizovaly, vynikal anglický matematik Dudeney.

Henry Ernest Dudeney (1857–1930) byl mužem dominujícím světu matematických hříček a hádanek. Jedním z jeho prvních úspěchů byl sloupek „Hádanky a ceny“, který vycházel v londýnském *Weekly Dispatch* od dubna 1896 do konce roku 1903. Dudeney zde publikoval téměř každý týden své hádanky a odměňoval nejlepší řešení. Ponechával soutěžícím jeden týden na rozluštění problému; řešení a vítěze pak oznámil po čtrnácti dnech od data, kdy byla hádanka zadána. Mnohé z hlavolamů, které později publikoval ve svých knihách *Amusements in Mathematics* [2] a *The Canterbury Puzzles* [1], se poprvé objevily právě v tomto sloupku.

Sloupek ze 6. dubna 1902 (viz obr. 6) obsahoval úlohu „rozdělit rovnostranný trojúhelník na pokud možno nejméně částí, z nichž je možno složit čtverec“.



Obr. 7. Společné rozdělení trojúhelníku a čtverce na pět dílů

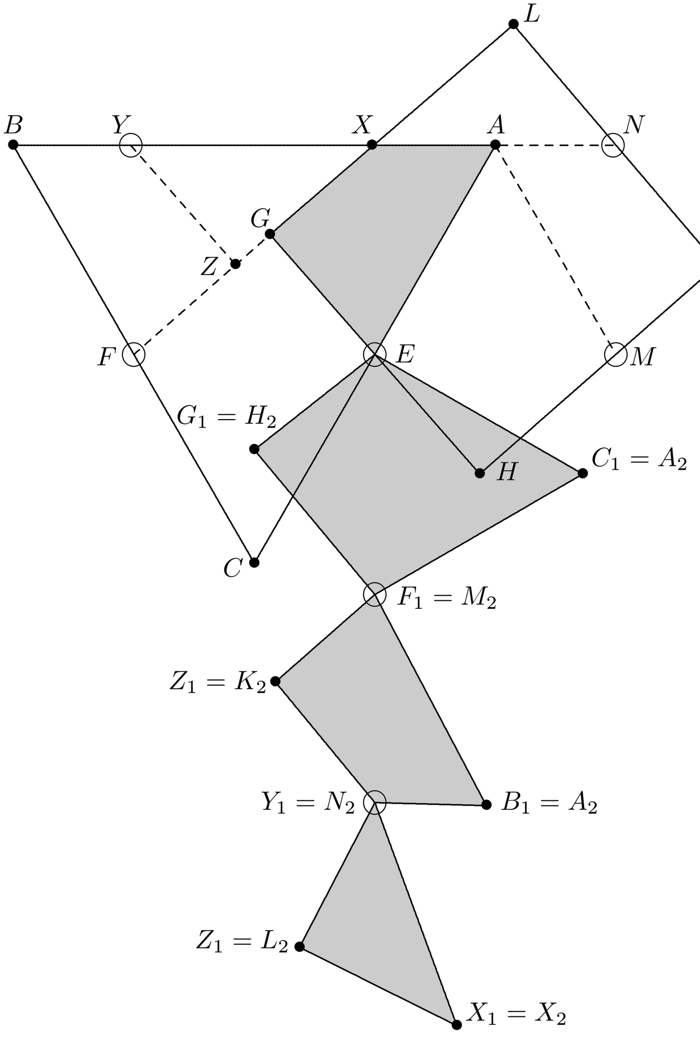
Bylo zajímavé a překvapující, že Dudeney po dvou týdnech — jak bylo dříve zvykem — řešení této úlohy neuveřejnil. Popsal pouze, jak rozdělit rovnostranný trojúhelník na *pět* dílů, z nichž je možno složit čtverec. Bylo to řešení, které měl připravené?

Rozdělení *libovolného* trojúhelníku na pět dílů, které se dají složit do čtverce, je snadné. Jedno takové dělení je znázorněno na obr. 7.

Dudeney však zároveň oznámil, že ve skutečnosti existuje rozdělení rovnostranného trojúhelníku na pouhé *čtyři* díly, z nichž lze složit čtverec. A dodal, že se vskutku nemýlil, když předpokládal, že úloha bude rozřešena, i když v odhalení „jádra této záhady" uspěl pouze jeden soutěžící, kterým byl pan C. W. McElroy z Manchesteru. Tomu poslal za vítězství v soutěži půl guiney (což je možné hodnotit přibližně jako dnešních 3 000 Kč) a pochválil ho jako jednoho z nejschopnějších řešitelů v celé zemi. Zároveň dal všem čtenářům možnost pokračovat v soutěži a zaslat svá řešení během dalšího týdne. To proto, že se podle něho patrně jednalo o nejzajímavější a snad i nejvýznamnější problém, který se v jeho sloupku kdy objevil.

Jeho řešení i s patřičným vysvětlením uveřejnil Dudeney až za další dva týdny, dne 4. května 1902. Oznámil též, že žádné další správné řešení neobdržel, a že je tudíž možno považovat tuto úlohu za skutečně perný oříšek.

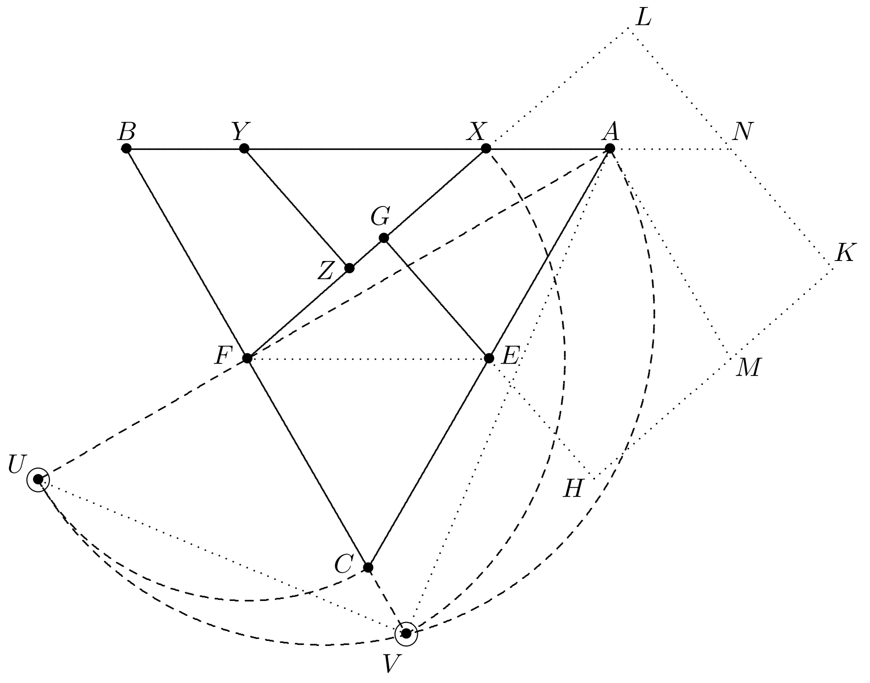
Není pochyb, že řešení je elegantní. Otázkou zůstává, zda Henry Dudeney čtyřprvkové rozdělení rovnostranného trojúhelníku objevil sám, nebo si přisvojil řešení, které objevil McElroy. Faktem je, že Dudeney hrdě popsal, jak 17. května 1905 prezentoval mahagonový přívěsek (ilustrativně znázorněný na obr. 8) představující řešení



Obr. 8. Dudeneyho přívěsek

problému na schůzi *Royal Society* (britské akademie věd). Sbalíme-li přívěsek směrem doleva, složíme jej do rovnostranného trojúhelníku ABC; přitom dojde ke ztotožnění bodů G_1, F_1, Z_1, … s body G, F, Z, … Sbalíme-li přívěsek směrem doprava, složíme jej do čtverce $GHKL$; přitom dojde ke ztotožnění bodů H_2, M_2, A_2, … s body H, M, A, …

Bohužel se zdá, že neexistuje žádný oficiální záznam, jak byl Dudeneyho přívěsek na zmíněné schůzi přijat, a to ani v *Proceedings of the Royal Society*, ani v *Proceedings of the London Mathematical Society*. Na internetu lze nalézt celou řadu odkazů na řešení Dudeneyho problému; velmi pěkně je skládání Dudeneyho přívěsku zobrazeno na webové stránce `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Haberdasher-anm-01.gif`.



Obr. 9. Dudeneyho rozdělení rovnostranného trojúhelníku na čtyři části

Popišme nyní podrobněji rozdělení rovnostranného trojúhelníku ABC na čtyři části, z nichž je možno složit čtverec $GHKL$ (obr. 9). Nechť E, F jsou středy stran AC a BC. Nejprve prodloužíme těžnici AF do bodu U splňujícího rovnost $|FU| = |FC|$. Poté sestrojíme bod V, který je průsečíkem prodloužené strany BC a půlkružnice nad průměrem AU. Bod X je průsečíkem strany AB a kruhového oblouku se středem v bodě F a poloměrem FV. Bod Y leží na straně AB ve vzdálenosti $|BF|$ od bodu X. Daný trojúhelník ABC je nyní rozdělen na čtyři části spojnicí FX a kolmicemi YZ a EG spuštěnými z bodů Y a E na úsečku FX. Prodloužením úsečky EG do bodu H tak, že $|EG| = |EH|$, a úsečky XZ do bodu L tak, že $|XZ| = |XL|$, dospějeme k obdélníku $GHKL$. Ten je rozdělen tak ($AM \parallel BC$), že čtyřúhelníky $AEHM$ a $CEGF$ jsou shodné, čtyřúhelníky $AMKN$ a $AEGX$ jsou shodné a trojúhelníky XNL a XYZ jsou rovněž shodné. Protože je čtyřúhelník $EFYX$ rovnoběžník, je $|FZ| = |GX|$, a tedy rovněž $|FX| = |GL|$.

Poznamenejme, že předchozí návod lze zároveň použít ke konstrukci čísla $\sqrt[4]{3}$. Jestliže se délka strany rovnostranného trojúhelníku ABC rovná $2a$, a tedy $|BF| = |FC| = |CE| = |EA| = |FU| = a$, potom je délka výšky (užitím Pythagorovy věty) rovna $|AF| = a\sqrt{3}$. Jelikož trojúhelník AUV je pravoúhlý (Thaletova věta), je čtverec jeho výšky $|FV|^2 = |FU| \cdot |AF| = a^2\sqrt{3}$. Odtud $|FX| = |FV| = a\sqrt[4]{3}$. Délka $a\sqrt[4]{3}$ úsečky $|FX|$ udává délku strany hledaného čtverce, neboť obsah čtverce o straně délky $a\sqrt[4]{3}$ se rovná obsahu $a^2\sqrt{3}$ trojúhelníku ABC o straně délky $2a$. Protože je $|FX| = |GL|$, je obdélník $GHKL$ čtvercem.

Obr. 9 nám též pomůže určit délky $|BY|$ a $|AX|$ (připomeňme, že $|XY| = a$). Délky stran trojúhelníku AXF jsou totiž rovny $|AX|$, $a\sqrt[4]{3}$ a $a\sqrt{3}$. Navíc platí $|\angle XAF| = 30°$. Užitím kosinové věty tedy dostáváme $|AX|^2 = a^2\sqrt{3} - 3a^2 + 2|AX| \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Označíme-li $|AX| = x$, dostáváme pro x kvadratickou rovnici

$$x^2 - 3ax = a^2(\sqrt{3} - 3), \quad \text{neboli} \quad \left(x - \frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}a^2(4\sqrt{3} - 3).$$

Tedy $x = \frac{1}{2}a\left(3 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}\right)$, a jelikož $x < a$,

$$x = |AX| = \frac{1}{2}a\left(3 - \sqrt{4\sqrt{3} - 3}\right) \approx 0{,}50901523a.$$

Proto $|BY| = a - x \approx 0{,}49098477a$. Jedno z těchto dvou čísel (nebo obě) je možno využít pro výrobu Dudeneyho přívěsku.

3. Dudeneyho přívěsek — porozumění

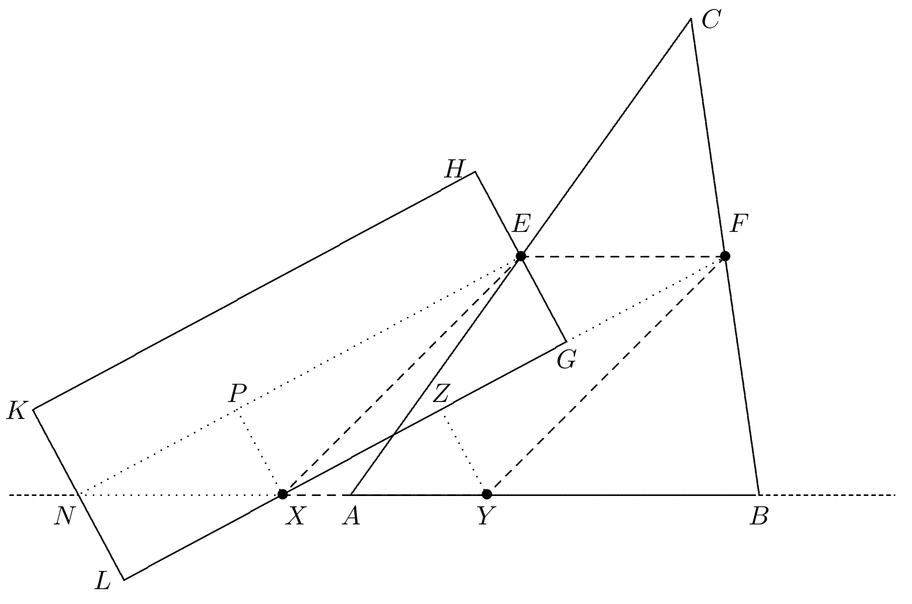
V této části chceme poukázat na obecný charakter Dudeneyho dělení trojúhelníku na čtyři části, z nichž je možno složit čtverec, a hlavně zdůraznit, že se nemusíme omezovat na rovnostranné trojúhelníky. Na první pohled se zdá Dudeneyho přeměna rovnostranného trojúhelníku na čtverec záhadná a konstrukce na obr. 9 poněkud komplikovaná. Uvidíme, že je bezprostředním důsledkem dvou zcela elementárních geometrických tvrzení.

Podejme však nejprve formální popis *Dudeneyho konstrukce obdélníku* přiřazeného danému trojúhelníku ABC, která bude dále v textu užívána. Spočívá v následujících pěti krocích, které jsou ilustrovány na obr. 10.

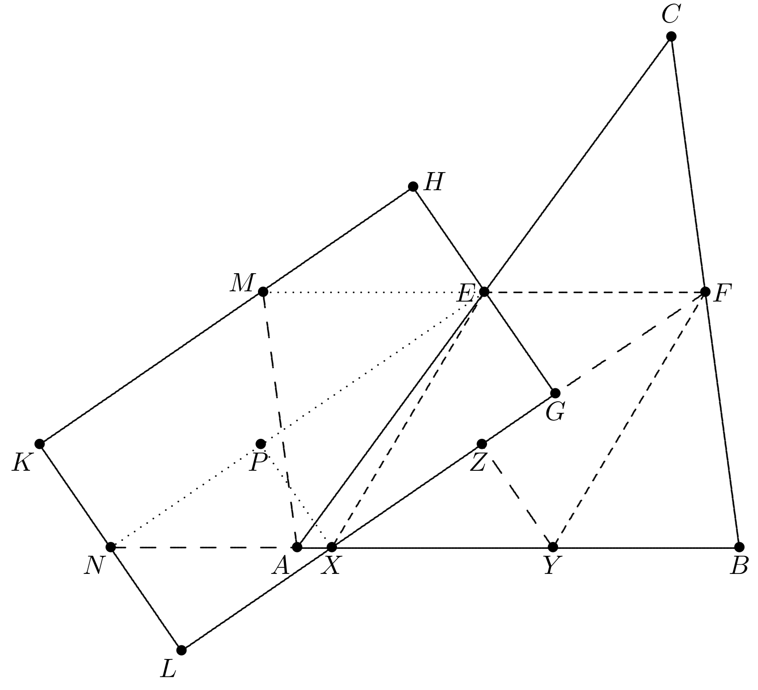
1. *Sestrojme středy E a F stran AC a BC.*
2. *Zvolme na přímce AB body X a Y tak, aby pro vektory $\overrightarrow{XY}$ a $\overrightarrow{AB}$ platilo $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.*
3. *Sestrojme paty kolmic spuštěných z bodů Y a E na přímku XF a označme je písmeny Z a G.*
4. *Sestrojme body L a H tak, aby $\overrightarrow{XL} = -\overrightarrow{XZ}$ a $\overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{EG}$.*
5. *Sestrojme Dudeneyho obdélník $\mathbf{D}(ABC, X) = GHKL$.*

Poznamenejme, že jsme definovali „levou“ Dudeneyho konstrukci. Stejným způsobem, užitím bodu Y a úhlopříčky YE místo X a XF, bychom získali „pravou“ konstrukci obdélníku $\mathbf{D}(ABC, Y)$.

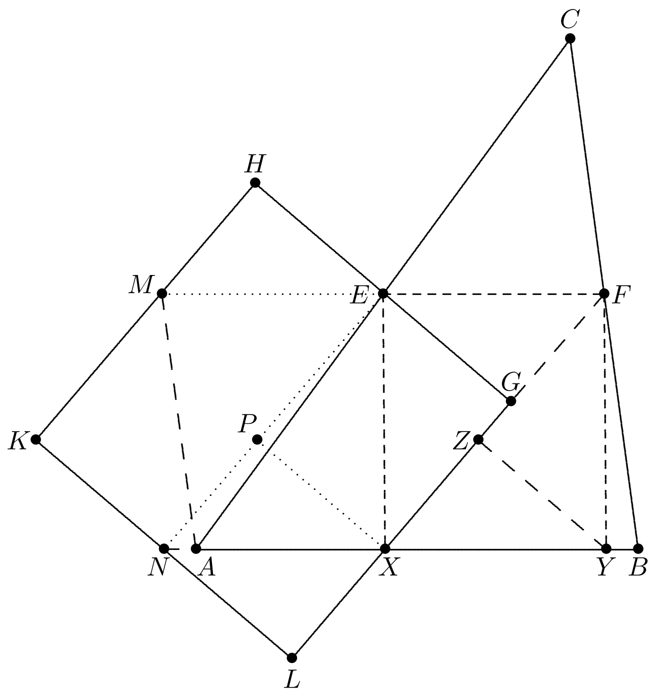
Rovnoběžník $XYFE$, jehož obsah se evidentně rovná polovině obsahu trojúhelníku ABC, je rozdělen na dvě dvojice shodných trojúhelníků, jejichž vhodným přesunutím (viz obr. 10) získáme rozdělení obdélníku $GENL$. Ke každému trojúhelníku ABC je tedy volbou bodu X na přímce AB přiřazen Dudeneyho obdélník $\mathbf{D}(ABC, X) = GHKL$ o stejném obsahu jako trojúhelník ABC.



Obr. 10. Dudeneyho konstrukce obdélníku $GHKL$ přiřazeného trojúhelníku ABC



Obr. 11. Příklad věrné Dudeneyho konstrukce



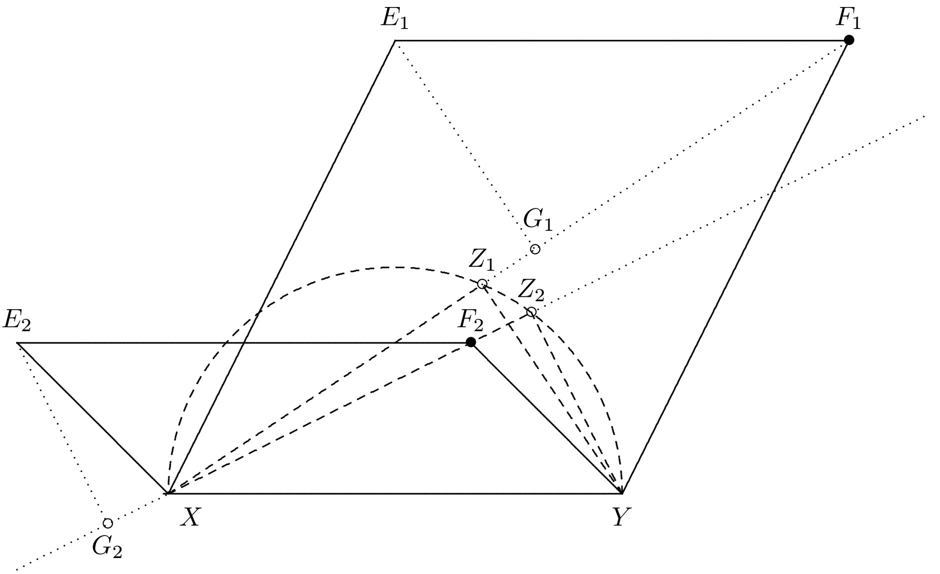
Obr. 12. Příklad věrné Dudeneyho konstrukce vedoucí na čtverec

Naším cílem je určit, za jakých podmínek je možno touto konstrukcí rozdělit daný trojúhelník na čtyři díly tak, aby se z nich dal obdélník $\mathbf{D}(ABC, X)$ složit. Nazvěme takovou Dudeneyho konstrukci *věrnou.* (Pojem věrné konstrukce budeme matematicky precizovat v jednom z dalších odstavců.) Dudeneyho konstrukce na obr. 10 věrná není; příklad věrné konstrukce je na obr. 11. Trojúhelník ABC je rozdělen na čtyřúhelníky $CEGF$, $BFZY$, $AXGE$ a trojúhelník XYZ, jež jsou shodné s čtyřúhelníky $AEHM$, $AMKN$, $AXGE$ a trojúhelníkem XNL, které představují rozdělení obdélníku $GHKL$.

Tento postup nás dovede k určení všech trojúhelníků, pro něž existuje řešení obecného Dudeneyho problému, tj. rozdělení daného trojúhelníku na čtyři díly tak, aby $\mathbf{D}(ABC, X)$ byl čtverec, který se dá z těchto dílů složit (viz obr. 12).

Abychom mohli snadno formulovat příslušné podmínky, uvažujme trojúhelník ABC v kartézských souřadnicích. Nechť $A = (0, 0)$, $B = (c, 0)$, kde $c > 0$, a $C = (u, v)$; tedy $|u|$ je vzdálenost bodu C od osy y a $v > 0$ je výška trojúhelníku ABC příslušná k základně AB. Střed F strany BC má tedy souřadnice $\left(\frac{1}{2}(u + c), \frac{1}{2}v\right)$. Polohu bodu X popišme souřadnicí x, tj. $X = (x, 0)$. Příslušnou Dudeneyho konstrukci $\mathbf{D}(ABC, X)$ budeme značit $\mathbf{D}(u, v, x)$.

K tomu, aby Dudeneyho konstrukce obdélníku byla věrná, tj. aby dovolila rozdělit trojúhelník na čtyři díly, z nichž je možno složit obdélník $\mathbf{D}(u, v, x)$, je nutné (a postačující), aby $0 \leq x \leq \frac{1}{2}c$ a aby paty G a Z ležely uvnitř či na obvodu rovnoběžníku $XYFE$. Podmínka pro patu G je splněna, právě když souřadnice x bodu X nepřevýší souřadnici x bodu F, tj. když $x \leq \frac{1}{2}(u + c)$. (Pro $x = \frac{1}{2}(u + c)$ bod G splyne s bodem F



Obr. 13. Podmínky věrné Dudeneyho konstrukce

a pro $x > \frac{1}{2}(u+c)$ se bod G dostane nad úsečku EF.) Pata Z, která leží na kružnici nad průměrem XY, se nachází uvnitř či na obvodu rovnoběžníku $XYFE$ právě tehdy, když F leží vně či na obvodu zmíněné kružnice (viz obr. 13). Ta má střed $(x+\frac{1}{4}c, 0)$ a poloměr $\frac{1}{4}c$, musí tedy platit

$$\left(\frac{u+c}{2} - x - \frac{c}{4}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{c}{4}\right)^2.$$

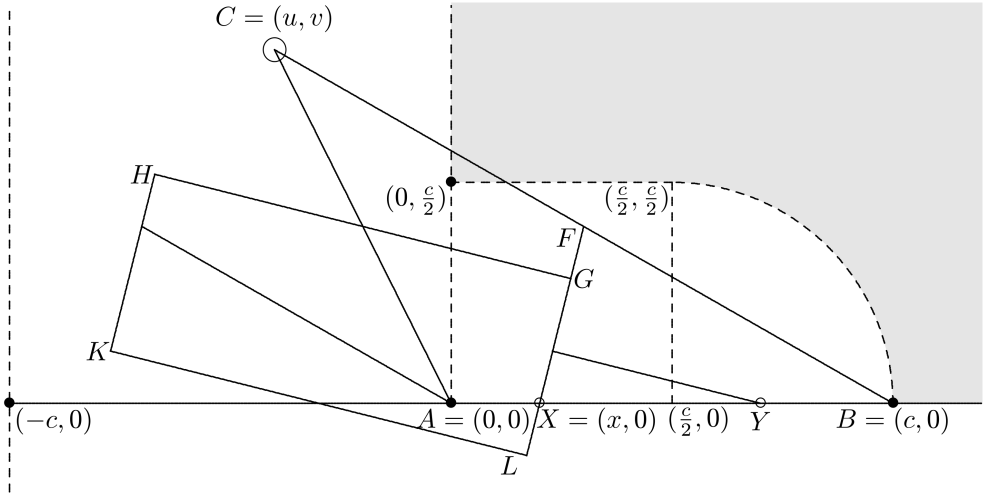
Po úpravě dostáváme pro $0 \leq x \leq \frac{1}{2}c$ podmínky

$$u \geq 2x - c \quad \text{a} \quad \left(u - 2x + \frac{c}{2}\right)^2 + v^2 \geq \left(\frac{c}{2}\right)^2. \tag{1}$$

Jejich důsledkem jsou následující dvě tvrzení.

- *Pro libovolnou volbu vrcholu $C = (u, v)$ splňující nerovnost $u \geq -c$ existuje $0 \leq x \leq \frac{1}{2}c$ takové, že $\mathbf{D}(u, v, x)$ je věrná Dudeneyho konstrukce.*
- *Dudeneyho konstrukce $\mathbf{D}(u, v, x)$ je věrná pro každé $0 \leq x \leq \frac{1}{2}c$ právě tehdy, jestliže pro souřadnice vrcholu $C = (u, v)$ platí $0 \leq u \leq \frac{1}{2}c \leq v$ nebo $u \geq \frac{1}{2}c$ a zároveň $v^2 \geq \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - (u - \frac{1}{2}c)^2$ (tj. C leží v oblasti vyznačené na obr. 14).*

Každému trojúhelníku ABC, kde $A = (0, 0)$, $B = (c, 0)$, $C = (u, v)$, jsme volbou bodu $X = (x, 0)$ přiřadili Dudeneyho obdélník $\mathbf{D}(ABC, X) = \mathbf{D}(u, v, x) = GHKL$ o stejném obsahu. Věnujme se nyní otázce, kdy je Dudeneyho obdélník čtvercem. To nastane právě tehdy, když $|GH| = |LG|$, neboli $|GH| \cdot |LG| = |LG|^2$. Využitím rovnosti



Obr. 14. Množina bodů $C = (u, v)$, pro něž je Dudeneyho konstrukce věrná pro každé x splňující $0 \leq x \leq \frac{1}{2}c$.

$|LG| = |XF|$ obdržíme

$$\frac{cv}{2} = \left(x - \frac{u+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Diskriminant této kvadratické rovnice, který je roven $v(2c - v)$, musí být nezáporný, což nastává pro $v \leq 2c$. Řešením rovnice (2) pak dojdeme k následujícím výsledkům:

- Pro $v = 2c$ a libovolné u je Dudeneyho obdélník čtvercem v jediném případě

$$\mathbf{D}(ABC, X) = \mathbf{D}(u, 2c, \frac{u+c}{2}).$$

- Pro $v < 2c$ a libovolné u vede Dudeneyho konstrukce ke dvěma čtvercům

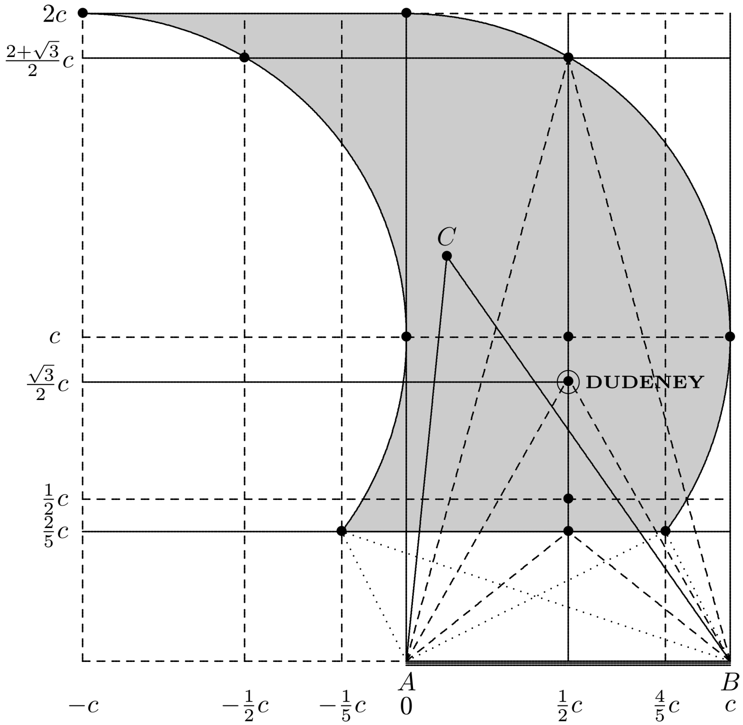
$$\mathbf{D}(ABC, X) = \mathbf{D}(u, v, \frac{1}{2}(u + c \pm \sqrt{v(2c - v)})).$$

První podmínka z (1) je v případě $v = 2c$ splněna triviálně. V případě $v < 2c$ je splněna pouze pro $x = \frac{1}{2}\big(u + c - \sqrt{v(2c - v)}\big)$.
Druhou podmínku ze vztahu (1) lze ekvivalentně psát ve tvaru

$$\left(u + c - 2x - \frac{c}{2}\right)^2 + v^2 \geq \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

neboli

$$(u + c - 2x)^2 - c\,(u + c - 2x) + v^2 \geq 0. \tag{3}$$



Obr. 15. Množina všech poloh vrcholu C, pro které lze Dudeneyho konstrukcí přeměnit trojúhelník ABC na čtverec.

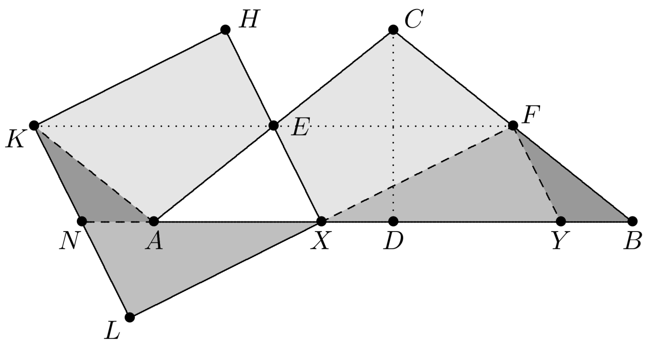
Pokud je $\mathbf{D}(u,v,x)$ čtverec, pak z rovnosti (2) dostáváme $2cv = (u+c-2x)^2+v^2$. Postupnými úpravami pak zjednodušíme — s přihlédnutím k (1) a (2) — nerovnost (3):

$$\begin{aligned} 2cv - c(u+c-2x) &\geq 0, \\ v &\geq \frac{u+c}{2} - x, \\ v^2 &\geq \left(\frac{u+c}{2} - x\right)^2 = \frac{cv}{2} - \left(\frac{v}{2}\right)^2, \\ v &\geq \frac{2}{5}c. \end{aligned}$$

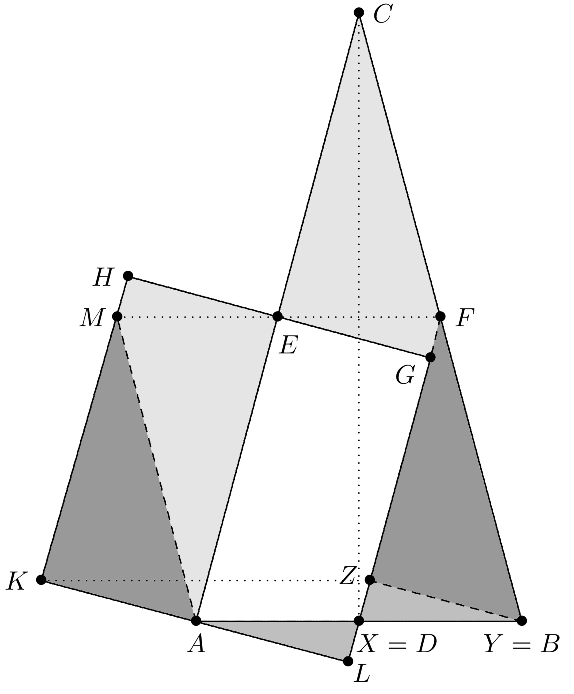
Dokázali jsme, že konstrukce $\mathbf{D}(u,v,x)$ je věrná a vede na čtverec právě tehdy, když $0 \leq x \leq \frac{1}{2}c$, $\frac{2}{5}c \leq v \leq 2c$ a je splněna rovnost (2). Tu lze převést do tvaru

$$(u+c-2x)^2 + (v-c)^2 = c^2,$$

což znamená, že vrchol C leží na oblouku kružnice se středem $(2x-c,c)$ a poloměrem c. Pro $0 \leq x \leq \frac{1}{2}c$ tyto oblouky vyplní oblast všech přípustných poloh vrcholu C, která je vyznačena na obr. 15. Formulaci příslušné věty přenecháváme čtenáři.



Obr. 16. $|CD| : |AB| = 2 : 5$, $|AX| : |XY| : |YB| = 7 : 10 : 3$

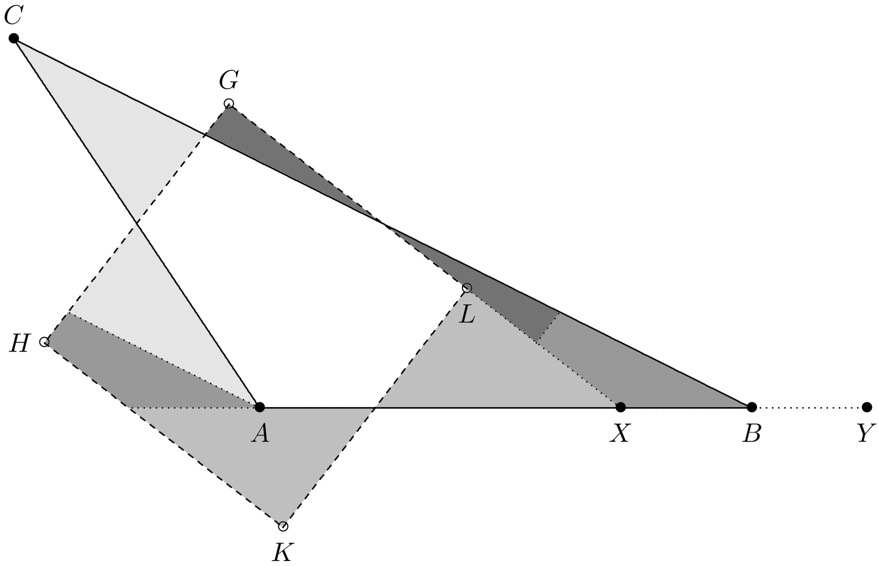


Obr. 17. $|CD| : |AB| = (2 + \sqrt{3}) : 2$

Na závěr připojíme ještě tři poznámky. První se týká rovnoramenných trojúhelníků. Myslím, že by bývalo prospělo, kdyby Dudeney formuloval úlohu obecněji pro rovnoramenné trojúhelníky. Pro ty je podmínka existence věrné Dudeneyho konstrukce, v níž je výsledný obdélník čtvercem, obzvláště jednoduchá (viz obr. 15):

$$\frac{2}{5}c \leq v \leq \frac{2+\sqrt{3}}{2}c.$$

Obr. 16 a 17 zachycují situace, kdy vrchol C je v extrémní poloze.



Obr. 18. Rozdělení trojúhelníku na pět částí pomocí Dudeneyho konstrukce, která není věrná.

V případě rovnoramenných trojúhelníků nesmíme opomenout „singulární“ případ $v = 2c$. Příslušné rozdělení trojúhelníku pak má pouze tři části, které je možno složit do čtverce. Tato Dudeneyho konstrukce není věrná.

Druhou poznámkou upozorněme na to, že všechna tvrzení týkající se Dudeneyho čtverce lze snadno rozšířit na obdélníky předepsaných rozměrů. Dudeneyho obdélníky $GHKL$, jejichž délky stran mají daný poměr $|LG|/|GH| = k$, jsou

$$\mathbf{D}(ABC, X) = \mathbf{D}(u, v, \frac{1}{2}(u + c \pm \sqrt{v(2kc - v)})).$$

Třetí závěrečnou poznámkou odpovíme na dotaz, který je nasnadě: Co se stane v případě, kdy volba vrcholu C umožňuje Dudeneyho konstrukci, která vede ke čtverci, ale není věrná? Otázku zodpoví příklad na obr. 18 — společné rozdělení má pět prvků.

Nyní již nezbývá, než vám popřát hodně úspěchů při hledání vhodné desky (nezapomeňte, že Dudeney použil mahagon) k výrobě přívěsku, kterým můžete okouzlit své přátele.

Poděkování. Děkuji doc. Antonínu Slavíkovi a recenzentovi za konečné úpravy textu.

L i t e r a t u r a

[1] Dudeney, H. E.: *The Canterbury Puzzles.* Dodo Press, 1919.

[2] Dudeney, H. E.: *Amusements in mathematics.* Dover Publications, New York, 2014.

[3] Frederickson, G. N.: *Dissections: Plane & Fancy.* Cambridge University Press, 1997.

[4] Gardner, M.: *About Henry Ernest Dudeney, a brilliant creator of puzzles.* Scientific American *198* (1958), 108–112.