Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Vlastimil Dlab

Je povrch derivací objemu?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 61 (2016), No. 1, 69–71

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144902

vyučování

JE POVRCH DERIVACÍ OBJEMU?

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

K tomuto tématu mne dovedl dotaz kolegy S. Zachariáše ohledně jeho práce, ve které odkazuje na článek profesora Kuřiny [1] otištěný v tomto časopise. Ten v něm do značné míry přebírá materiál publikace [2]. Jelikož jsou už nadpisy článků [1] a [2] zavádějící, rozhodl jsem se sepsat tuto skromnou poznámku.

Především je třeba zdůraznit, že tvrzení „povrch je derivací objemu" nedává smysl! Jak správně poukazují autoři publikace [2], existují pro některá tělesa T (ať už v jakékoliv dimenzi n) vzorce (závisející na jedné proměnné x) vyjadřující jejich objem $O_T(x)$ a jejich $(n-1)$-rozměrný povrch $P_T(x)$ v takové formě, že

$$\frac{\mathrm{d}O_T(x)}{\mathrm{d}x} = P_T(x). \tag{1}$$

Příkladem jsou často citované vzorce

$$O_K(x) = \pi x^2 \quad \text{a} \quad P_K(x) = 2\pi x$$

pro obsah (tj. dvourozměrný objem) a obvod (tj. jednorozměrný povrch) kruhu K, kde proměnnou x je jeho poloměr.

Už na tomto jednoduchém příkladě si uvědomme, jak vzorec (1) závisí na volbě proměnné x. Zvolíme-li na příklad za proměnnou t-násobek poloměru x pro $t > 0$, $t \neq 1$, potom

$$O_K(x) = \frac{\pi}{t^2}\,x^2, \quad P_K(x) = \frac{2\pi}{t}\,x,$$

$$\frac{\mathrm{d}O_K(x)}{\mathrm{d}x} \neq P_K(x).$$

Články zabývající se vztahem (1) se omezují na pravidelná tělesa. To samozřejmě není nutné; nepravidelnost tělesa není důvodem, proč by vztah (1) nemohl platit. Podstatný je naopak fakt, že v případě n-rozměrného tělesa (kde $n \geq 2$) „proměnná" musí být „kolmá" na uvažovaný $(n-1)$-rozměrný povrch, který v případě n-rozměrné koule nahrazuje příslušná tečná nadrovina.

Příklad rotačního válce V, jehož výška se rovná průměru kruhové základny, je jednoduchým příkladem tělesa, které v případě, že zvolíme za proměnnou poloměr základny x, splňuje

$$O_V(x) = 2\pi x^3,$$

$$P_V(x) = 2\pi x^2 + 4\pi x^2 = 6\pi x^2,$$

a tedy vztah (1).

V této souvislosti si musíme uvědomit, že odkaz na válec v článku [1] je poněkud zavádějící. Nepoukazuje na vztah mezi derivací objemu a povrchu, ale na vztah mezi derivací objemu válce a částí (pláštěm) jeho povrchu. Takový vztah je ovšem platný triviálně v obecném případě. Je-li T n-rozměrné těleso splňující (1), potom $(n+1)$-rozměrný „válec" V o základně T a výšce v splňuje

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}O_V(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}O_T(x)}{\mathrm{d}x}\cdot v = P_T(x)\cdot v\\ &= P_V^{\circ}(x),\end{aligned}$$

kde $P_V^{\circ}(x)$ je n-rozměrný „plášť" tělesa V.

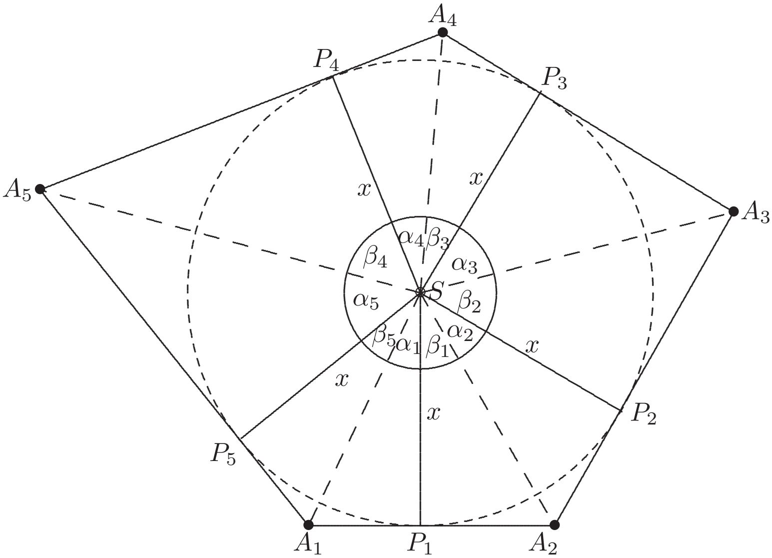
Příkladem je v [1] zmiňovaný vztah mezi vzorci

$$O_{V_3}(x) = \pi x^2 \cdot v \quad \text{a} \quad P_{V_3}^{\circ}(x) = 2\pi x \cdot v$$

pro objem a plášť rotačního válce V_3 v trojrozměrném prostoru.

Tyto poznámky už naznačují možnost formulace následujícího tvrzení.

Prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Bzí 47, 468 22 Železný Brod, e-mail: vlastimil73@hotmail.com



$c = \sum_{i=1}^{5}(\mathrm{tg}\alpha_i + \mathrm{tg}\beta_i)$

Obr. 1.

Věta. *Nechť T je n-rozměrný konvexní mnohostěn, pro který existuje vepsaná (n-rozměrná) koule o poloměru x (dotýkající se všech $(n-1)$-rozměrných stěn). Nechť T má k stěn. Potom každá $(n-1)$-rozměrná stěna (o obsahu s_i) spolu se středem S vepsané koule určuje n-rozměrný jehlan, jehož objem $v_i = s_i\, x/n$, $1 \leq i \leq k$. Přitom $s_i = c_i x^{n-1}$ pro určité c_i. Tedy objem mnohostěnu T je*

$$O_T(x) = \sum_{i=1}^{k} v_i = \frac{1}{n} c\, x^n,$$

kde

$$c = \sum_{i=1}^{k} c_i\,,$$

a povrch mnohostěnu T je $P_T(x) = c\, x^{n-1}$.

V tomto případě (1) *platí.*

Důkaz je jednoduchý: Plyne ihned z následujících dvou faktů.

1. Objem n-rozměrného jehlanu je $\frac{1}{n}\times$ obsah $(n-1)$-rozměrné podstavy $\times$ výška.
2. Obsah $(n-1)$-rozměrné podstavy n-rozměrného jehlanu o výšce x je $c_i \times x^{n-1}$ pro jistou konstantu c_i.

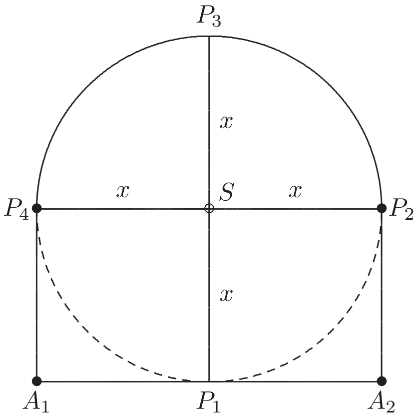
Poznámka. Pro dimenzi $n = 2$ a $k = 3$ se jedná o (libovolný) trojúhelník a tedy předpoklad existence vepsané kružnice je vždy splněn. V tomto případě dostáváme jednoduché vyjádření pro hodnotu c: Jsou-li α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku, potom

$$c = 2\left(\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{cotg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{cotg}\frac{\gamma}{2}\right).$$

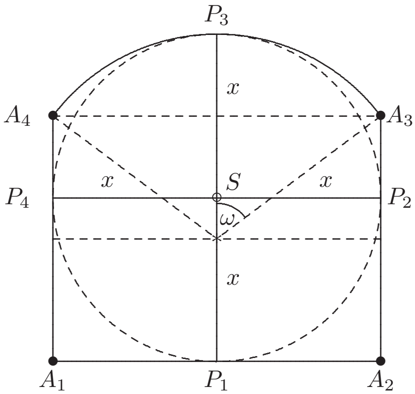
Pro libovolný konvexní k-úhelník M, kterému lze vepsat kružnici (viz obrázek pro $k = 5$), snadno odvodíme

$$c = \sum_{i=1}^{k}(\mathrm{tg}\alpha_i + \mathrm{tg}\beta_i), \quad O_M(x) = \tfrac{1}{2}cx^2,$$

$$P_M(x) = cx,$$



$$c = 4 + \pi \ :$$
$$O(x) = \left(2 + \tfrac{1}{2}\,\pi\right) x^2$$
$$P(x) = (4 + \pi) x$$



$$A_1A_4 = \tfrac{3}{4} A_1A_2$$
$$O(x) = \left(\tfrac{9}{4} + \tfrac{25}{16}\,\omega\right) x^2$$
$$P(x) = \left(5 + \tfrac{5}{2}\,\omega\right) x$$

Obr. 2.

což vyjadřuje známý vzorec

$$O_M(x) = \tfrac{1}{2}\, P_M(x)\, x$$

pro obsah takových mnohoúhelníků.

Tím dostáváme i návod, jak vyjádřit hodnotu c ve vyšších dimenzích. Podotkněme ještě, že podobné vzorce lze odvodit pro objem a povrch n-rozměrné koule.

Je též namístě zmínit, že předkládaná věta představuje pouze postačující podmínku k tomu, aby těleso T splňovalo vztah (1). Uveďme jednoduchý příklad obrazce, který není mnohoúhelníkem, a vztah (1) splněn je. Nechť $M = A_1A_2 \ldots A_k$ je rovinný konvexní k-úhelník, kterému lze vepsat kružnici K, a nechť P_i je bod dotyku na straně A_iA_{i+1} pro $1 \leq i \leq k$ (přičemž identifikujeme $A_{k+1} = A_1$). Označme Q obrazec, který obdržíme z M nahrazením úseček P_jA_{j+1} a $A_{j+1}P_{j+1}$ příslušným obloukem kružnice K pro některá j. Snadno se přesvědčíme, že

$$\frac{\mathrm{d}O_Q(x)}{\mathrm{d}x} = P_Q(x).$$

První obrazec v obr. 2 odpovídá případu, kdy $M = A_1A_2A_3A_4$ je čtverec a $j = 2, 3$.

Druhý obrazec, v němž $A_3P_3A_4$ je oblouk kružnice a délka strany A_4A_1 je t-násobek délky strany A_1A_2, $\frac{1}{2} < t < 1$, má vepsanou kružnici. Přesto pro žádné t vztah (1) splněn není.

L i t e r a t u r a

[1] Kuřina, F.: *Povrch je derivace objemu.* PMFA *60* (2015), 75–79.

[2] Zazkis, R., Sinitski, I., Leikin, I.: *Derivative of area equals perimeter – Coincidence or rule?* Math. Teacher *106* (2013), 686–692.

Poznámka redakce: K článku prof. Františka Kuřiny *Povrch je derivace objemu* jsme kromě textu prof. Vlastimila Dlaba dále obdrželi kritické připomínky doc. Josefa Poláka. Jeho příspěvek je čtenářům na vyžádání k dispozici na adrese redakce.