Jiří Seitz

Note sur un problème fondamental de la théorie de l'équilibre économique

Aktuárské vědy, Vol. 8 (1948), No. 4, 137–144

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144732

the weights $v_3 = v_4 = \ldots = v_{10} = 1$, or $\eta_1 = \sigma_1$; $\eta_2 = \sigma_2, \ldots, \eta_n = \sigma_n$; on substitution into Eq. (13), we would obtain $r_{xy}' = 0,45$.

Use of the correct weights, therefore, improves considerably the correlation between the total result of the eight problems and the measured attribute.

The reader will find more detailed treatment of the above matter in the works:
HOLZINGER K.: Statistical Résumé of the Spearman Two-factor Theory, 1930.
SPEARMAN G.: The abilities of Man (Appendix), 1927.

NOTE SUR UN PROBLÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DE L'ÉQUILIBRE ÉCONOMIQUE.

Par JIŘÍ SEITZ.

Au cours de la résolution du problème fondamental de la théorie de l'équilibre économique, on est amené à résoudre une question qui, en termes mathématiques, s'énonce ainsi:

A quelle condition doivent être assujettis les coefficients d'une forme quadratique à n variables $A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ pour que cette forme ait une valeur non-négative pour tout système de nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifiant la relation linéaire $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0$. La réponse à cette question est l'affirmation suivante:

Soient respectivement $A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ et $L(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ une forme quadratique de matrice $\mathbf{A}$ et une forme linéaire pour laquelle $c_1 \neq 0$ et $n \geqq 2$; supposons en outre qu'on ait

$$\begin{vmatrix} 0, & c_1, & c_2, \ldots, & c_n \\ c_1, & a_{11}, & a_{12}, \ldots, & a_{1n} \\ c_2, & a_{21}, & a_{22}, \ldots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n, & a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0 \; (a_{ik} = a_{ki}.) \qquad (1)$$

alors la condition nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique $A(x, x)$ soit définie, positive (négative), sous l'hypothèse que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifient une relation linéaire $L(x) = 0$ est que les termes de la suite

$$\begin{vmatrix} 0, & c_1 \\ c_1, & a_{11} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0, & c_1, & c_2 \\ c_1, & a_{11}, & a_{12} \\ c_2, & a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0, & c_1, & c_2 & c_3 \\ c_1, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ c_2, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ c_3, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} 0, & c_1, & c_2, \ldots, c_n \\ c_1, & a_{11}, & a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ c_2, & a_{21}, & a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n, & a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

soient de même signe (de signes alternés).

Démonstration.

Introduisons les nouvelles valeurs des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ déduites de la substitution régulière:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ X_2 &= x_2 \\ X_3 &= x_3 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ X_n &= x_n \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Si nous désignons par $\mathbf{C}$ la matrice de cette substitution, nous pouvons écrire symboliquement:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Cx}. \tag{4}$$

On en déduit pour la transformation inverse:

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}. \tag{5}$$

Par la substitution (5) la forme quadratique $A(x, x)$ se transforme en une forme quadratique des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qui sera désignée par $A'(X, X)$, les coefficients de cette nouvelle forme quadratique l'étant par a'_{ik} et la matrice de cette forme par $\mathbf{A}'$.

De la théorie de la transformation des formes quadratiques on déduit immédiatement la relation:

$$\mathbf{A}' = \overline{\mathbf{C}^{-1}}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}. \tag{6}$$

On en tire facilement ce résultat auxiliaire:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme quadratique $A(x, x)$ soit définie, positive (négative), sous l'hypothèse que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifient la relation $L(x) = 0$ est que la forme quadratique $A'(X, X)$ soit définie, positive (négative) sous l'hypothèse que $X_1 = 0$ c'est-à-dire que la forme quadratique $\sum\limits_{i,k=2}^{n} a'_{ik}X_iX_k$ soit définie, positive (négative).

Pour le but que nous poursuivons, il sufit établir les conditions nécessaires et suffisantes pour que la forme quadratique $\sum\limits_{i,k=2}^{n} a'_{ik}X_iX_k$ soit définie, positive (négative).

Soient, en notation symbolique, $K_1, K_2, \ldots, K_N$ toutes les combinaisons possibles d'ordre $r - 1$ des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$: donc $N = \binom{n}{r-1}$ r peut prendre ici les valeurs entières de 2 à n et l'ordre des combinaisons est d'abord quelconque. Soit α_{uv} la valeur du mineur de rang $(r - 1)$ formé à partir de la matrice $\mathbf{A}$ avec les lignes et les colonnes dont les rangs sont donnés par les nombres employés respectivement dans les combinaisons K_u et K_v. Donnons un sens analogue à l'expression α'_{uv} associée à la matrice $\mathbf{A}'$ et de même à γ_{uv} associée à la matrice $\|C_{ik}\|$ où C_{ik} est le complément formé après suppression de la i-ième ligne et de la k-ième colonne de la matrice $\mathbf{C}$, c'est-à-dire de la matrice de la transformation (3). Pour ce, nous formons ces mineurs de telle sorte que leurs lignes et leurs colonnes se suivent dans l'ordre qu'elles ont dans la matrice dont ils sont extraits.

Désignons en outre par $\|\alpha_{uv}\|$ la matrice d'ordre N:

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, \ldots, & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, \ldots, & \alpha_{2N} \\ \vdots & & \\ \alpha_{N1}, & \alpha_{N2}, \ldots, & \alpha_{NN} \end{Vmatrix}$$

C'est donc une matrice dont les éléments sont tous les mineurs de rang $(r - 1)$ de la matrice $\mathbf{A}$. Par analogie définissons la matrice $\|\alpha'_{uv}\|$ et la matrice $\|\gamma_{uv}\|$. Un théorème connu de la théorie des matrices est:

Si la matrice $\mathbf{A}$ est égale au produit des matrices $\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \ldots, \mathbf{A}^{(m)}$ c'est-à-dire si on a $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A}^{(2)} \ldots \mathbf{A}^{(m)}$, alors on a aussi $\|\alpha_{uv}\| = \|\alpha_{uv}^{(1)}\| \cdot \|\alpha_{uv}^{(2)}\| \ldots \|\alpha_{uv}^{(m)}\|$ où ces matrices sont formées à partir des mineurs des matrices $\mathbf{A}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \ldots, \mathbf{A}^{(m)}$ de la manière indiquée, le rang des mineurs étant le même dans toutes les matrices.

La matrice $\overline{\mathbf{C}^{-1}}$ qui se présente dans la relation (6) est la matrice

$$\begin{Vmatrix} \frac{C_{11}}{c_1}, & \frac{C_{12}}{c_1}, \ldots, & \frac{C_{1n}}{c_1} \\ \frac{C_{21}}{c_1}, & \frac{C_{22}}{c_1}, \ldots, & \frac{C_{2n}}{c_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{C_{n1}}{c_1}, & \frac{C_{n2}}{c_1}, \ldots, & \frac{C_{nn}}{c_1} \end{Vmatrix}$$

Si on forme à partir de cette matrice ses mineurs de rang $(r - 1)$, on trouve que cette matrice est égale au produit $\frac{1}{c_1^{\,r-1}} \|\gamma_{uv}\|$, où $\|\gamma_{uv}\|$ a le sens donné plus haut. De cela et du théorème qu'on vient de voir sur le produit de matrices formées de mineurs de matrices données, on déduit d'après (6) la relation:

$$\|\alpha'_{uv}\| = \frac{1}{c_1^{2r-2}} \|\gamma_{uv}\| \cdot \|\alpha_{uv}\| \cdot \|\gamma_{uv}\|, \tag{7}$$

car on voit immédiatement que la matrice formée des mineurs de la matrice associée à une matrice donnée est égale à la matrice associée à la matrice formée avec les mineurs de même rang de la matrice donnée.

Déterminons maintenant l'ordre des combinaisons $K_1, K_2, \ldots, K_N$ de telle sorte qu'on ait:

$$K_1 \equiv (2, 3, \ldots, r), K_2 \equiv (1, 3, \ldots, r), \ldots, K_j \equiv (1, 2, \ldots, j-1, j+ \\ + 1, \ldots, r), \ldots, K_r \equiv (1, 2, \ldots, r-1) \tag{8}$$

Les combinaisons restantes, c'est-à-dire $K_{r+1}, K_{+2}, \ldots, K_N$ peuvent être quelconques, mais elles doivent être telles que l'ensemble des N combinaisons ainsi désignées épuisent l'ensemble des N différentes combinaisons. Alors il en résulte pour α'_{11} l'équation:

$$\alpha_{11}' = \begin{vmatrix} a'_{22}, & a'_{23}, & \ldots, & a'_{2r} \\ a'_{32}, & a'_{33}, & \ldots, & a'_{3r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{r2}, & a'_{r3}, & \ldots, & a'_{rr} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Et d'après (7) nous obtenons:

$$\alpha'_{11} = \frac{1}{c_1^{2r-2}} \sum_{u,v=1}^{N} \gamma_{1u} \alpha_{uv} \gamma_{1v}. \tag{10}$$

Calculons maintenant l'expression γ_{1u}. Posons d'abord $1 \leqq u \leqq r$. Alors γ_{1u} est le mineur de la matrice $\|C_{ik}\|$ formé des lignes de rang $(2, 3, \ldots, r)$ et des colonnes de rang $(1, 2, \ldots, u-1, u+1, \ldots, r)$ selon (8).

Mais d'autre part γ_{1u} est aussi le mineur du déterminant réciproque au déterminant de la matrice $\mathbf{C}$; selon [1], théorème a) paragraphe 60, γ_{1u} est égal au mineur de rang $(n-r+1)$ formé des lignes de rang $1, r+1, r+2, \ldots, n$ et des colonnes de rang $u, r+1, r+2, \ldots, n$ de la matrice $\mathbf{C}$, multiplié par l'expression $c_1^{r-2}(-1)^{u+1}$.

Etant donné que la matrice $\mathbf{C}$ est de la forme:

$$\begin{Vmatrix} c_1, & c_2, & c_3, & \ldots, & c_n \\ 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{Vmatrix}$$

on voit immédiatement que:

$$\gamma_{1u} = (-1)^{u+1} c_1^{r-2} c_u \quad (u = 1, 2, \ldots, r). \tag{11}$$

Soit maintenant $r + 1 \leqq u \leqq n$. Nous obtenons alors par un raisonnement tout à fait analogue:

$$\gamma_{1u} = 0 \quad (u = r+1, r+2, \ldots, n). \tag{12}$$

D'après (10), (11) et (12), il vient alors:

$$\alpha'_{11} = \frac{1}{c_1^2} \sum_{u,v=1}^{r} (-1)^{u+v} c_u c_v \alpha_{uv}. \tag{13}$$

Comme d'après (8) α_{uv} est pour $1 \leqq u, v, \leqq r$ le mineur formé en barrant la u-ième ligne et la v-ième colonne dans la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1r} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1}, & a_{r2}, & \ldots, & a_{rr} \end{Vmatrix},$$

nous pouvons écrire d'après (9) et (13):

$$\begin{vmatrix} a_{22}', & a_{23}', & \ldots, & a_{2r}' \\ a_{32}', & a_{33}', & \ldots, & a_{3r}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r2}', & a_{r3}', & \ldots, & a_{rr}' \end{vmatrix} = -\frac{1}{c_1^2} \begin{vmatrix} 0, & c_1, & c_2, & \ldots, & c_r \\ c_1, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1r} \\ c_2, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_r, & a_{r1}, & a_{r2}, & \ldots, & a_{rr} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Pour $r = n$, il résulte de (1) que:

$$\begin{vmatrix} a_{22}', & a_{23}', & \ldots, & a_{2n}' \\ a_{32}', & a_{33}', & \ldots, & a_{3n}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{n2}, & a_{n3}', & \ldots, & a'_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

c'est-à-dire que la forme quadratique $\sum\limits_{i,k=2}^{n} a_{ik}' X_i X_k$ a la valeur $(n-1)$ et d'après (14) et [1], paragraphe 103, théorème d), on peut énoncer:

La condition nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique $\sum\limits_{i,k=2}^{n} a_{ik}' X_i X_k$ soit définie, positive (négative) est que les termes de la suite

$$-\frac{1}{c_1^2} \begin{vmatrix} 0, & c_1 \\ c_1, & a_{11} \end{vmatrix}, \quad -\frac{1}{c_1^2} \begin{vmatrix} 0, & c_1, & c_2 \\ c_1, & a_{11}, & a_{12} \\ c_2, & a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}, \quad -\frac{1}{c_1^2} \begin{vmatrix} 0, & c_1, & c_2, & c_3 \\ c_1, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ c_2, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ c_3, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\ldots, -\frac{1}{c_1^2} \begin{vmatrix} 0, & c_1, & c_2, & \ldots, & c_n \\ c_1, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ c_2, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n, & a_{n1}, & a_{n2} & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

soient de même signe (de signes alternés).

Et d'après le résultat auxiliaire donné plus haut, notre théorème est alors tout à fait évident.

Le procédé de démonstration de notre théorème peut être étendu à un cas plus général où, au lieu d'une seule condition linéaire $L(x) = 0$, on en donne plusieurs. Ainsi dans le cas de deux conditions linéaires on obtient le résultat suivant:

Soit $A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ une forme quadratique de matrice $\mathbf{A}$ et soient $L_1(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{1i}x_i$ et $L_2(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{2i}x_i$ deux formes indépendantes pour lesquelles $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, si on a en outre

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & c_{11}, & c_{12}, \ldots, c_{1n} \\ 0, & 0, & c_{21}, & c_{22}, \ldots, c_{2n} \\ c_{11}, & c_{21}, & a_{11}, & a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ c_{12}, & c_{22}, & a_{21}, & a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n}, & c_{2n}, & a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{14'}$$

alors la condition nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique $A(x, x)$ soit définie, positive (négative), sous l'hypothèse que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifient les relations linéaires $L_1(x) = 0$ et $L_2(x) = 0$, est que les termes de la suite

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & c_{11}, & c_{12} \\ 0, & 0, & c_{21}, & c_{22} \\ c_{11}, & c_{21}, & a_{11}, & a_{12} \\ c_{12}, & c_{22}, & a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0, & 0, & c_{11}, & c_{12}, & c_{13} \\ 0, & 0, & c_{21}, & c_{22}, & c_{23} \\ c_{11}, & c_{21}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ c_{12}, & c_{22}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ c_{13}, & c_{23}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} 0, & 0, & c_{11}, & c_{12}, \ldots, c_{1n} \\ 0, & 0, & c_{21}, & c_{22}, \ldots, c_{2n} \\ c_{11}, & c_{21}, & a_{11}, & a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ c_{12}, & c_{22}, & a_{21}, & a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n}, & c_{2n}, & a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{vmatrix} \tag{15}$$

soient de même signe (de signes alternés).

Pour le démontrer, nous emploierons la transformation régulière

$$X_1 = L_1(x),\ X_2 = L_2(x),\ X_3 = x_3,\ X_4 = x_4, \ldots, X_n = x_n. \tag{16}$$

Par cette transformation la forme quadratique $A(x, x)$ se transforme en une autre forme quadratique $A'(X, X)$ dont la matrice $\mathbf{A}'$ vérifie encore la relation (6) où $\mathbf{C}$ désigne évidemment alors la matrice de la transformation (16). De nouveau on en tire facilement qu'il suffit d'examiner les conditions pour que la forme quadratique $\sum_{i,k=3}^{n} a_{ik}'X_iX_k$ soit définie, positive (négative). Pour cela formons la matrice des mineurs de rang $(r - 2)$ de la matrice $\mathbf{A}'$ $(r \geqq 3)$.

On obtient par analogie avec (7) la formule

$$\|\alpha'_{uv}\| = \frac{1}{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^{2r-4}} \|\gamma_{uv}\| \cdot \|\alpha_{uv}\| \cdot \|\overline{\gamma_{uv}}\| \tag{17}$$

où, bien entendu, chaque élément de chaque matrice est un mineur de rang $(r - 2)$.

De toutes les combinaisons possibles de rang $(r - 2)$ des nombres $1, 2, \ldots, n$, considérons maintenant les combinaisons

$$K_1 = (3, 4, \ldots, r),\ K_2 = (2, 4, \ldots, r),\ K_3 = (2, 3, 5, \ldots, r), \ldots, \tag{18}$$
$$\ldots, K_{\binom{r}{2}} = (1, 2, \ldots, r - 2),$$

c'est-à-dire toutes les combinaisons de rang $(r - 2)$ des nombres $1, 2, \ldots, r$.

Alors on a

$$\alpha'_{11} = \begin{vmatrix} a_{33}', & a_{34}', & \ldots, & a_{3r}' \\ a_{43}', & a_{44}', & \ldots, & a_{4r}' \\ \vdots & & & \\ a_{r3}', & a_{r4}', & \ldots, & a_{.r}' \end{vmatrix} \tag{19}$$

Et d'après (17)

$$\alpha'_{11} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^{4-2r} \sum_{u,v=1}^{N'} \gamma_{1u} \alpha_{uv} \gamma_{1v} \qquad \left(N' = \binom{n}{r-2}\right) \tag{20}$$

Par un raisonnement plus détaillé, on obtient le résultat suivant, analogue à (11):

Si $1 \leqq u \leqq \binom{r}{2}$, et soit K_u une combinaison de rang $(r - 2)$ des nombres $1, 2, \ldots, r$, qui ne fasse pas intervenir les nombres h et j, $(h < j)$ alors on a:

$$\gamma_{1u} = (-1)^{h+j+1} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^{r-3} \begin{vmatrix} c_{1h}, & c_{1j} \\ c_{2h}, & c_{2j} \end{vmatrix} \tag{21}$$
$$\left(1 \leqq u \leqq \binom{r}{2},\ 1 \leqq h \leqq j \leqq r\right)$$

Mais si $\binom{r}{2} < u \leqq N'$ alors on a:

$$\gamma_{1u} = 0. \tag{22}$$

De (20), (21) et (22) on tire

$$\alpha'_{11} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^{-2} \sum_{\substack{h,j,h',j'=1 \\ h<j,h'<j'}}^{r} (-1)^{h+j+h'+j'} \begin{vmatrix} c_{1h}, & c_{1j} \\ c_{2h}, & c_{2j} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{1h'}, & c_{1j'} \\ c_{2h'}, & c_{2j'} \end{vmatrix} \alpha_{uv} \tag{23}$$

où α_{uv} est le mineur de rang $(r - 2)$ formé à partir de la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1r} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2r} \\ \vdots & & & \\ a_{r1}, & a_{r2}, & \ldots, & a_{rr} \end{Vmatrix}$$

en y barrant la h-ième et la j-ième ligne et la h'-ième et la j'-ième colonne. On peut alors écrire d'après (23) et (19):

$$\begin{vmatrix} a_{33}', & a_{34}', & \ldots, & a_{3r}' \\ a_{43}', & a_{44}', & \ldots, & a_{4r}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r3}', & a_{r4}', & \ldots, & a_{rr}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12} \\ c_{21}, & c_{22} \end{vmatrix}^{-2} \begin{vmatrix} 0, & 0, & c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1r} \\ 0, & 0, & c_{21}, & c_{22}, & \ldots, & c_{2r} \\ c_{11}, & c_{21}, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1r} \\ c_{12}, & c_{22}, & a_{2j}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1r}, & c_{2r}, & a_{r1}, & a_{r2}, & \ldots, & a_{rr} \end{vmatrix}. \tag{24}$$

De là, étant donné (14), on tire facilement le résultat (15).

Une plus ample généralisation à p conditions linéaires $L_1(x) = 0$, $L_2(x) = 0, \ldots, L_p(x) = 0$, $(p < n)$ ne présente pas alors de grandes difficultés.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme quadratique $A(x, x)$ soit définie, positive (négative), sous l'hypothèse que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifient p conditions linéaires $L_1(x)$, $L_2(x), \ldots, L_p(x)$ est que les termes de la suite

$$\begin{vmatrix} 0, & \ldots, & 0, & c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0, & \ldots, & 0, & c_{p1}, & c_{p2}, & \ldots, & c_{pr} \\ c_{11}, & \ldots, & c_{p1}, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1r} \\ c_{12}, & \ldots, & c_{p2}, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ c_{1r}, & \ldots, & c_{pr}, & a_{r1}, & a_{r2}, & \ldots, & a_{rr} \end{vmatrix} \quad (r = p,\ \mathrm{p} + 1,\ \mathrm{p} + 2, \ldots, n). \tag{25}$$

soient de même signe (de signes alternés).

La démonstration détaillée du résultat (2) et du résultat général (25) ne se trouve pas dans la littérature que nous avons entre les mains. Ce n'est que dans [2] qu'est énoncé le résultat (2) qui n'y est démontré que pour $n = 2$ et $n = 3$, tandis que pour n quelconque, la démonstration manque.

Les notions dont il a été fait usage dans cet article (mineur, forme quadratique définie, positive (négative) sont conformes aux notions employées dans [1] et il en est de même pour la désignation des matrices.

Littérature:

[1.] BYDŽOVSKÝ: Úvod do theorie determinantů a matic a jejich užití (Edité en 1945).
[2.] R. G. D. ALLEN: Mathematical analysis for economists, Londres 1947.