Aktuárské vědy

Antonín Zelenka

Rentrée en validité dans l'assurance-invalidité. II.

Aktuárské vědy, Vol. 8 (1948), No. 3, 95–114

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144727`

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

RENTRÉE EN VALIDITÉ DANS L'ASSURANCE-INVALIDITÉ

Par Dr ANT. ZELENKA, Genève

ČESKOSLOV. MATEMAT... KNIHOVNA ... JEDNOTA ... FYSIKÁLNÍ

V.

Nous avons vu dans le système sans rentrée en validité l'importance des intégrales $\int\limits_0^\infty l^{aa}_{x+t} e^{-\delta t}\,dt$ et $\int\limits_0^\infty l^{ii}_{x+t} e^{-\delta t}\,dt$. Cherchons donc ce que représentent ces intégrales dans le système général. En tirant l^{aa}_{x+t} de la deuxième équation de (V) on obtient

$$\int\limits_0^\infty l^{aa}_{x+t} e^{-\delta t}\,dt = l^{aa}_x \int\limits_0^\infty p^a(x, x+t)\, e^{-\delta t}\,dt + \int\limits_{t=0}^{\infty} \int\limits_{\tau=0}^{t} l^{ii}_{x+\tau}\varrho_{x+\tau}\, p^a(x+\tau, x+t)\, e^{-\delta t}\,d\tau\,dt =$$

$$= l^{aa}_x a_x + \int\limits_{\tau=0}^{\infty} \int\limits_{t=\tau}^{\infty} l^{ii}_{x+\tau}\varrho_{x+\tau}\, p^a(x+\tau, x+t)\, e^{-\delta(t-\tau)} e^{-\delta\tau}\,dt\,d\tau =$$

$$= l^{aa}_x a_x + \int\limits_{\tau=0}^{\infty} l^{ii}_{x+\tau}\varrho_{x+\tau}\, a^a_{x+\tau}\, e^{-\delta t}\,d\tau. \tag{11}$$

Par un processus analogue, on arrive à

$$\int\limits_0^\infty l^{ii}_{x+t} e^{-\delta t}\,dt = l^{ii}_x a^i_x + \int\limits_{\tau=0}^{\infty} l^{aa}_{x+\tau}\nu_{x+\tau}\, a^i_{x+\tau}\, e^{-\delta\tau}\,d\tau. \tag{12}$$

L'intégrale qui figure dans l'équation (12) est de même forme que l'intégrale qui dans le système sans rentrée en validité donne la valeur de $l^{aa}_x a^{ai}_x$. Mais dans le système général il faut se rendre compte que l^{aa}_{x+t} englobe, en plus des personnes qui étaient valides à l'âge x, les personnes qui étaient invalides à l'âge x et qui sont rentrées en validité.

L'expression $\int\limits_{\tau=0}^{\infty} l^{ii}_{x+\tau}\varrho_{x+\tau}\, a^a_{x+\tau}\, e^{-\delta\tau}\,d\tau$ qui apparaît pour la première fois représente la valeur des rentes d'activité qui seront servies après le retour en validité. Il est évident qu'ici comme dans le système sans rentrées en validité, $l^{ii}_{x+\tau}$ provient des personnes qui étaient, à l'âge x, soit invalides soit valides.

Si l'on entend par a^{aa}_x la valeur actuelle d'une rente d'activité sur la tête d'un valide d'âge x, cette rente couvrant toute période d'activité, c'est-à-dire non seulement la première période avant l'invalidité, mais aussi les périodes d'activité qui peuvent suivre une rentrée en validité (le cas échéant, plusieurs rentrées en validité), on voit que seulement pour $x = x_0$ où $l^{ii}_{x_0} = 0$ est valable la formule

$$l^{aa}_{x_0} a^{aa}_{x_0} = \int\limits_{t=0}^{\infty} l^{aa}_{x_0+t} e^{-\delta t}\, dt = l^{aa}_{x_0} a^{a}_{x_0} + \int\limits_{t=0}^{\infty} l^{ii}_{x_0+t} \varrho_{x_0+t} a^{a}_{x_0+t} e^{-\delta t}\, dt. \tag{13}$$

De même ce n'est que pour le même âge $x = x_0$ où

$$l^{aa}_{x_0} a^{ai}_{x_0} = \int\limits_{t=0}^{\infty} l^{ii}_{x_0+t} e^{-\delta t}\, dt = \int\limits_{t=0}^{\infty} l^{aa}_{x_0+t} \nu_{x_0+t} a^{i}_{x_0+t} e^{-\delta t}\, dt \tag{14}$$

a^{ai}_x étant la valeur actuelle d'une rente d'invalidité sur la tête d'un valide d'âge x, cette rente couvrant toute période possible d'invalidité future.

Pour établir les valeurs actuelles des différentes catégories de rentes pour un âge x quelconque, il est utile de diviser l^{aa}_{x+t} en trois composantes:

${}^1l^{aa}_{x+t}$ représente les valides d'âge $x + t$ qui n'ont jamais quitté la classe des valides dans l'intervalle $(x, x + t)$;

${}^2l^{aa}_{x+t}$ représente les valides d'âge $x + t$ qui étaient valides à l'âge x et qui, dans l'intervalle $(x, x + t)$, sont devenus au moins une fois invalides;

${}^3l^{aa}_{x+t}$ représente les valides d'âge $x + t$ qui étaient invalides à l'âge x.

De même façon, l^{ii}_{x+t} est formé des trois composantes suivantes:

${}^1l^{ii}_{x+t}$ englobant les invalides d'âge $x + t$ qui n'ont jamais quitté la classe des invalides dans l'intervalle $(x, x + t)$;

${}^2l^{ii}_{x+t}$ englobant les invalides d'âge $x + t$ qui étaient invalides à l'âge x et qui, dans l'intervalle $(x, x + t)$, sont devenus au moins une fois valides;

${}^3l^{ii}_{x+t}$ englobant les invalides d'âge $x + t$ qui étaient valides à l'âge x.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} l^{aa}_{x+t} &= {}^1l^{aa}_{x+t} + {}^2l^{aa}_{x+t} + {}^3l^{aa}_{x+t} \\ l^{ii}_{x+t} &= {}^1l^{ii}_{x+t} + {}^2l^{ii}_{x+t} + {}^3l^{ii}_{x+t} \end{aligned} \tag{15}$$

et

$$\begin{aligned} {}^1l^{aa}_{x+t} &= l^{aa}_{x} p^{a}(x, x + t) \\ {}^1l^{ii}_{x+t} &= l^{ii}_{x} p^{i}(x, x + t). \end{aligned} \tag{16}$$

En vertu des définitions de a^{aa}_x et a^{ai}_x, on obtient

JEDNOTA ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ KNIHOVNA

$$l_x^{aa} a_x^{aa} = \int_{t=0}^{\infty} ({}^1l_{x+t}^{aa} + {}^2l_{x+t}^{aa})\, e^{-\delta t}\, dt$$

$$l_x^{aa} a_x^{ai} = \int_{t=0}^{\infty} {}^3l_{x+t}^{ii} e^{-\delta t}\, dt.$$

Introduisons la notation a_x^{ii} pour désigner la valeur actuelle d'une rente d'invalidité sur la tête d'un invalide d'âge x qui couvre toute période possible d'invalidité, c'est-à-dire non seulement la première invalidité avant une rentrée éventuelle en validité, mais aussi d'autres périodes d'invalidité qui peuvent avoir lieu après des rentrées en validité. On obtient

$$l_x^{ii} a_x^{ii} = \int_0^{\infty} ({}^1l_{x+t}^{ii} + {}^2l_{x+t}^{ii})\, e^{-\delta t}\, dt.$$

Notons encore par a_x^{ia} la valeur actuelle d'une rente d'activité (pour toute période d'activité) sur la tête d'un invalide d'âge x:

$$l_x^{ii} a_x^{ia} = \int_0^{\infty} {}^3l_{x+t}^{aa} e^{-\delta t}\, dt.$$

Tirant ${}^1l_{x+t}^{aa}$ de (16), on arrive à

$$a_x^{aa} = a_x^{a} + \frac{1}{l_x^{aa}} \int_0^{\infty} {}^2l_{x+t}^{aa} e^{-\delta t}\, dt.$$

L'intégrale $\frac{1}{l_x^{aa}} \int_0^{\infty} {}^2l_{x+t}^{aa} e^{-\delta t}\, dt = a_x^{aia}$ représente la valeur actuelle sur la tête d'un valide d'âge x d'une rente couvrant toutes les périodes d'activité qui peuvent éventuellement se présenter à partir du moment où la tête est devenue une première fois invalide. On peut écrire

$$a_x^{aa} = a_x^{a} + a_x^{aia}.$$

Par un processus analogue on obtient

$$a_x^{ii} = a_x^{i} + a_x^{iai}$$

où $a_x^{iai} = \frac{1}{l_x^{ii}} \int_0^{\infty} {}^2l_{x+t}^{ii} e^{-\delta t}\, dt$ est la valeur actuelle sur la tête d'un invalide d'âge x d'une rente couvrant toutes les périodes d'invalidité qui peuvent éventuellement se présenter à partir du moment où la tête est une première fois rentrée en validité.

En raison des équations (15), on arrive à

$$\int_0^{\infty} l_{x+t}^{aa} e^{-\delta t}\, dt = l_x^{aa} a_x^{aa} + l_x^{ii} a_x^{ia} = l_x^{aa} a_x^{a} + l_x^{aa} a_x^{aia} + l_x^{ii} a_x^{ia} \tag{17}$$

$$\int_0^\infty l^{ii}_{x+t} e^{-\delta t}\, dt = l^{ii}_x a^{ii}_x + l^{aa}_x a^{ai}_x = l^{ii}_x a^{i}_x + l^{ii}_x a^{iai}_x + l^{aa}_x a^{ai}_x . \tag{17a}$$

La comparaison de ces relations avec celles que donnent les équations (11) et (12) montrent que

$$\int_0^\infty l^{aa}_{x+t} \nu_{x+t} a^{i}_{x+t} e^{-\delta t}\, dt = l^{aa}_x a^{ai}_x + l^{ii}_x a^{iai}_x \tag{18}$$

$$\int_0^\infty l^{ii}_{x+t} \varrho_{x+t} a^{a}_{x+t} e^{-\delta t}\, dt = l^{ii}_x a^{ia}_x + l^{aa}_x a^{aia}_x . \tag{18a}$$

Les formules (18) et (18a) mettent en lumière la différence entre le système général et le système sans rentrées en validité.

Remarquons encore que l'addition membre à membre des équations (17) et (17a) permet d'établir la relation

$$l_x a_x = l^{aa}_x (a^{aa}_x + a^{ai}_x) + l^{ii}_x (a^{ii}_x + a^{ia}_x) \tag{19}$$

qui prend la place de la relation de Schaertlin (5) obtenu pour un système sans rentrées en validité.

Pour calculer les valeurs numériques de a^{aa}_x et a^{ai}_x on a les deux équations (18) ou — ce qui revient au même — les deux équations (17); mais, dans ces équations interviennent quatre valeurs a^{ai}_x, a^{ia}_x, a^{aia}_x et a^{iai}_x. Il est donc indispensable d'établir encore d'autres relations.

Si l'on pose

$$l^{aa}_{[x]+t} = {}^1l^{aa}_{x+t} + {}^2l^{aa}_{x+t}, \quad l^{ii}_{[x]+t} = {}^3l^{ii}_{x+t}$$

on voit — en vertu des définitions de ${}^1l^{aa}_{x+t}$, ${}^2l^{aa}_{x+t}$ et ${}^3l^{ii}_{x+t}$ — que $l^{aa}_{[x]+t}$ et $l^{ii}_{[x]+t}$ est une intégrale particulière du système (I) qui pour $t = 0$ prend les valeurs $l^{aa}_{[x]} = l^{aa}_x$ et $l^{ii}_{[x]} = 0$.

Les valeurs a^{aa}_x et a^{ai}_x peuvent être établies à l'aide de $l^{aa}_{[x]+t}$ et $l^{ii}_{[x]+t}$ comme les valeurs $a^{aa}_{x_0}$ et $a^{ai}_{x_0}$ ont été établies à l'aide de $l^{aa}_{x_0+t}$ et $l^{ii}_{x_0+t}$ par les formules (13) et (14):

$$l^{aa}_x a^{aa}_x = \int_0^\infty l^{aa}_{[x]+t} e^{-\delta t} dt = l^{aa}_x a^{a}_x + \int_0^\infty l^{ii}_{[x]+t} \varrho_{x+t} a^{a}_{x+t} e^{-\delta t}\, dt \tag{20}$$

$$l^{aa}_x a^{ai}_x = \int_0^\infty l^{ii}_{[x]+t} e^{-\delta t}\, dt = \int_0^\infty l^{aa}_{[x]+t} \nu_{x+t} a^{i}_{x+t} e^{-\delta t}\, dt . \tag{21}$$

Il ressort de l'équation (20) que

$$l_x^{aa} a_x^{aia} = \int_0^\infty l_{[x]+t}^{ii} \varrho_{x+t} a_{x+t}^{a} e^{-\delta t} dt = \int_0^\infty {}^3l_{x+t}^{ii} \varrho_{x+t} a_{x+t}^{a} e^{-\delta t} dt. \qquad (22)$$

En remplaçant a_x^{ai} dans l'équation (18) par la formule (21) on obtient

$$l_x^{ii} a_x^{iai} = \int_0^\infty (l_{x+t}^{aa} - l_{[x]+t}^{aa}) \, \nu_{x+t} a_{x+t}^{i} e^{-\delta t} dt = \int_0^\infty {}^3l_{x+t}^{aa} \nu_{x+t} a_{x+t}^{i} e^{-\delta t} dt \qquad (23)$$

Ces deux formules (22) et (23) montrent bien que a_x^{aia} et a_x^{iai} se rapportent à des personnes qui ayant quitté la classe à laquelle elles appartenaient à l'âge x rentrent ensuite dans cette classe.

Si l'on remplace dans l'équation de (18a) a_x^{aia} par sa valeur tirée de (22), on obtient pour a_x^{ia} l'expression

$$l_x^{ii} a_x^{ia} = \int_0^\infty (l_{x+t}^{ii} - l_{[x]+t}^{ii}) \, \varrho_{x+t} a_{x+t}^{a} e^{-\delta t} dt.$$

Il faut encore établir les formules pour les valeurs actuelles des assurances au décès. A cette fin-là, partons de

$$l_{x+t} \mu_{x+t} = l_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{a} + l_{x+t}^{ii} \mu_{x+t}^{i}.$$

Après multiplication par $e^{-\delta t}$, l'intégration dans l'intervalle $(0, \infty)$ donne

$$l_x A_x = \int_0^\infty l_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{a} e^{-\delta t} dt + \int_0^\infty l_{x+t}^{ii} \mu_{x+t}^{i} e^{-\delta t} dt.$$

En raison de (15), on peut écrire

$$\int_0^\infty l_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{a} e^{-\delta t} dt = \int_0^\infty {}^1l_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{a} e^{-\delta t} dt + \int_0^\infty {}^2l_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{a} e^{-\delta t} dt + \int_0^\infty {}^3l_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{a} e^{-\delta t} dt$$

$$\int_0^\infty l_{x+t}^{ii} \mu_{x+t}^{i} e^{-\delta t} dt = \int_0^\infty {}^1l_{x+t}^{ii} \mu_{x+t}^{i} e^{-\delta t} dt + \int_0^\infty {}^2l_{x+t}^{ii} \mu_{x+t}^{i} e^{-\delta t} dt + \int_0^\infty {}^3l_{x+t}^{ii} \mu_{x+t}^{i} e^{-\delta t} dt.$$

Adoptons pour les valeurs actuelles des assurances au décès la notation:

A_x^{aa}, s'il s'agit d'un valide d'âge x décédant comme valide;
A_x^{ai} s'il s'agit d'un valide d'âge x décédant comme invalide;
A_x^{ii}, s'il s'agit d'un invalide d'âge x décédant comme invalide;
A_x^{ia}, s'il s'agit d'un invalide d'âge x décédant comme valide.

En se basant sur les définitions données pour ${}^{1}l^{aa}_{x+t}, \ldots, {}^{3}l^{ii}_{x+t}$ on peut conclure que

$$l^{aa}_x A^{aa}_x = \int_0^\infty ({}^{1}l^{aa}_{x+t} + {}^{2}l^{aa}_{x+t})\, \mu^a_{x+t} e^{-\delta t}\, dt \qquad l^{aa}_x A^{ai}_x = \int_0^\infty {}^{3}l^{ii}_{x+t} \mu^i_{x+t} e^{-\delta t}\, dt$$

$$l^{ii}_x A^{ii}_x = \int_0^\infty ({}^{1}l^{ii}_{x+t} + {}^{2}l^{ii}_{x+t})\, \mu^i_{x+t} e^{-\delta t}\, dt \qquad l^{ii}_x A^{ia}_x = \int_0^\infty {}^{3}l^{aa}_{x+t} \mu^a_{x+t} e^{-\delta t}\, dt.$$

En rappelant que ${}^{1}l^{aa}_{x+t} = l^{aa}_x p^a(x, x+t)$ et que ${}^{1}l^{ii}_{x+t} = l^{ii}_x p^i(x, x+t)$, on obtient

$$A^{aa}_x = A^a_x + A^{aia}_x$$
$$A^{ii}_x = A^i_x + A^{iai}_x$$

où $A^{aia}_x = \frac{1}{l^{aa}_x} \int_0^\infty {}^{2}l^{aa}_{x+t} \mu^a_{x+t} e^{-\delta t}\, dt$ représente la valeur actuelle sur la tête d'un valide d'âge x d'une assurance au décès, si la tête décède comme valide mais a passé auparavant par une période au moins d'invalidité,

et $A^{iai}_x = \frac{1}{l^{ii}_x} \int_0^\infty {}^{2}l^{ii}_{x+t} \mu^i_{x+t} e^{-\delta t}\, dt$ représente la valeur actuelle sur la tête d'un invalide d'âge x d'une assurance au décès, si la tête décède comme invalide mais a passé auparavant par une période au moins de validité.

Il s'ensuit que

$$\int_0^\infty l^{aa}_{x+t} \mu^a_{x+t} e^{-\delta t}\, dt = l^{aa}_x A^{aa}_x + l^{ii}_x A^{ia}_x = l^{aa}_x A^a_x + l^{aa}_x A^{aia}_x + l^{ii}_x A^{ia}_x \tag{24}$$

$$\int_0^\infty l^{ii}_{x+t} \mu^i_{x+t} e^{-\delta t}\, dt = l^{ii}_x A^{ii}_x + l^{aa}_x A^{ai}_x = l^{ii}_x A^i_x + l^{ii}_x A^{iai}_x + l^{aa}_x A^{ai}_x \tag{24a}$$

On voit aussi que

$$l_x A_x = l^{aa}_x (A^{aa}_x + A^{ai}_x) + l^{ii}_x (A^{ii}_x + A^{ia}_x) \tag{25}$$

qui remplace la relation (6) obtenue dans le système sans rentrées en validité. Il est évident que l'on peut obtenir une relation analogue et plus générale pour des assurances dont le montant payé au décès est $\varphi(t)$ et ne dépend que de t.

On peut établir des formules qui rappellent davantage les formules connues pour le cas sans rentrées en validité en substituant dans

$\int\limits_0^\infty l^{ii}_{x+t}\mu^i_{x+t}e^{-\delta t}\,dt$ à l^{ii}_{x+t}, sa valeur tirée de la deuxième équation du système (V):

$$\int\limits_0^\infty l^{ii}_{x+t}\mu^i_{x+t}e^{-\delta t}\,dt = l^{ii}_x\int\limits_0^\infty p^i(x, x+t)\,\mu^i_{x+t}e^{-\delta t}\,dt +$$

$$+\int\limits_{t=0}^\infty\int\limits_{\tau=0}^t l^{aa}_{x+\tau}\nu_{x+\tau}p^i(x+\tau, x+t)\,\mu^i_{x+t}e^{-\delta t}\,d\tau\,dt =$$

$$= l^{ii}_x A^i_x + \int\limits_{\tau=0}^\infty\int\limits_{t=\tau}^\infty l^{aa}_{x+\tau}\nu_{x+\tau}e^{-\delta\tau}p^i(x+\tau, x+t)\,\mu^i_{x+t}e^{-\delta(t-\tau)}\,dt\,d\tau =$$

$$= l^{ii}_x A^i_x + \int\limits_{\tau=0}^\infty l^{aa}_{x+\tau}\nu_{x+\tau}A^i_{x+\tau}e^{-\delta\tau}\,d\tau.$$

Donc, en vertu de (24), on obtient

$$\int\limits_0^\infty l^{aa}_{x+t}\nu_{x+t}A^i_{x+t}e^{-\delta t}\,dt = l^{aa}_x A^{ai}_x + l^{ii}_x A^{iai}_a. \tag{26}$$

De même, en transformant $\int\limits_0^\infty l^{aa}_{x+t}\mu^a_{x+t}e^{-\delta t}\,dt$, on obtient

$$\int\limits_0^\infty l^{ii}_{x+t}\varrho_{x+t}A^a_{x+t}e^{-\delta t}\,dt = l^{ii}_x A^{ia}_x + l^{aa}_x A^{aia}_x \tag{27}$$

En revenant à l'intégrale particulière $l^{aa}_{[x]+t}$, $l^{ii}_{[x]+t}$ introduite ci-dessus, on peut écrire

$$l^{aa}_x A^{aa}_x = \int\limits_0^\infty l^{aa}_{[x]+t}\mu^a_{x+t}e^{-\delta t}\,dt = l^{aa}_x A^a_x + \int\limits_0^\infty l^{ii}_{[x]+t}\varrho_{x+t}A^a_{x+t}e^{-\delta t}\,dt$$

$$l^{aa}_x A^{ai}_x = \int\limits_0^\infty l^{ii}_{[x]+t}\mu^i_{x+t}e^{-\delta t}\,dt = \int\limits_0^\infty l^{aa}_{[x]+t}\nu_{x+t}A^i_{x+t}e^{-\delta t}\,dt.$$

En conséquence

$$l^{aa}_x A^{aia}_x = \int\limits_0^\infty l^{ii}_{[x]+t}\varrho_{x+t}A^a_{x+t}e^{-\delta t}\,dt \tag{28}$$

$$l^{ii}_x A^{iai}_x = \int\limits_0^\infty l^{aa}_{x+t}\nu_{x+t}A^i_{x+t}e^{-\delta t}\,dt - l^{aa}_x A^{ai}_x = \int\limits_0^\infty (l^{aa}_{x+t} - l^{aa}_{[x]+t})\,\nu_{x+t}A^i_{x+t}e^{-\delta t}\,dt \tag{29}$$

et, ensuite

$$l^{ii}_x A^{ia}_x = \int\limits_0^\infty l^{ii}_{x+t}\varrho_{x+t}A^a_{x+t}e^{-\delta t}\,dt - l^{aa}_x A^{aia}_x = \int\limits_0^\infty (l^{ii}_{x+t} - l^{ii}_{[x]+t})\,\varrho_{x+t}A^a_{x+t}e^{-\delta t}\,dt. \tag{29a}$$

VI.

Le calcul numérique des valeurs a_x^{aa} etc d'après les formules. établies au chapitre précédent est compliqué. A part des ordres simples l_x^a et l_x^i et des ordres composés $l_{x_0+t}^{aa}$, $l_{x_0+t}^{ii}$ — x_0 étant l'âge initial où l'on suppose qu'il n'y a pas encore des invalides, par exemple $x_0 = 15$ — il faudrait calculer pour chaque âge x l'intégrale particulière du système (I) dont les valeurs initiales pour cet âge sont $l_{x_0+(x-x_0)}^{aa}$, 0. C'est pourquoi pour une application pratique, il est utile d'établir des formules qui, tout en évitant ce travail, permettraient d'obtenir des valeurs suffisamment approchées.

Mais auparavant, il est intéressant de faire quelques remarques sur les intégrales du système (I). Pour simplifier les notations et les formules qui suivront, écrivons $l_{x(x_k)}^{aa}$ et $l_{x(x_k)}^{ii}$ pour l'intégrale qui passe par le point x_k, c'est-à-dire qui prend les valeurs initiales $l_{x_k(x_k)}^{aa} = l_{x_0+(x_k-x_0)}^{aa}$, $l_{x_k(x_k)}^{ii} = 0$; au chapitre précédent, nous avons noté $l_{[x_k]+(x-x_k)}^{aa}$ qui est maintenant noté par $l_{x(x_k)}^{aa}$.

Si nous connaissons deux intégrales particulières $l_{x(x_0)}^{aa}$, $l_{x(x_0)}^{ii}$ et $l_{(x(x_1)}^{aa}$, $l_{x(x_1)}^{ii}$, on sait que toute autre intégrale est une fonction linéaire de ces deux intégrales; donc, l'intégrale particulière qui pour $x = x_2$ prend les valeurs $l_{x_2(x_2)}^{aa} = l_{x_2(x_0)}^{aa}$, $l_{x_2(x_2)}^{ii} = 0$ est représentée par

$$\begin{aligned} l_{x(x_2)}^{aa} &= C_1 l_{x(x_0)}^{aa} + C_2 l_{x(x_1)}^{aa} \\ l_{x(x_2)}^{ii} &= C_1 l_{x(x_0)}^{ii} + C_2 l_{x(x_1)}^{ii} \end{aligned} \tag{30}$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées par les conditions initiales

$$\begin{aligned} l_{x_2(x_2)}^{aa} = l_{x_2(x_0)}^{aa} &= C_1 l_{x_2(x_0)}^{aa} + C_2 l_{x_2(x_1)}^{aa} \\ l_{x_2(x_2)}^{ii} = \quad 0 \quad &= C_1 l_{x_2(x_0)}^{ii} + C_2 l_{x_2(x_1)}^{ii} \end{aligned}$$

qui donnent

$$C_1 = \frac{l_{x_2(x_0)}^{aa} l_{x_2(x_1)}^{ii}}{l_{x_2(x_0)}^{aa} l_{x_2(x_1)}^{ii} - l_{x_2(x_1)}^{aa} l_{x_2(x_0)}^{ii}}$$

$$C_2 = \frac{-\, l_{x_2(x_1)}^{aa} l_{x_2(x_0)}^{ii}}{l_{x_2(x_0)}^{aa} l_{x_2(x_1)}^{ii} - l_{x_2(x_1)}^{aa} l_{x_2(x_0)}^{ii}}.$$

Pour établir les valeurs de différentes catégories de rentes, il n'est pas nécessaire de calculer effectivement $l_{x(x_2)}^{aa}$ et $l_{x(x_2)}^{ii}$ et l'on peut utiliser les grandeurs calculées pour $l^{aa}_{x(x_0)}$, $l^{ii}_{x(x_0)}$ d'une part et pour $l^{aa}_{x(x_1)}$, $l^{ii}_{x(x_1)}$ d'autre part. Posons

$$D^{aa}_{x(x_k)} = l^{aa}_{x(x_k)} e^{\delta x} \qquad N^{aa}_{x(x_k)} = \int_0^\infty D^{aa}_{x+t(x_k)}\, dt \quad k = 0, 1, 2$$

$$D^{ai}_{x(x_k)} = l^{aa}_{x(x_k)} \nu_x a^i_x e^{\delta x} \quad N^{ai}_{x(x_k)} = \int_0^\infty D^{ai}_{x+t(x_k)}\, dt \quad k = 0, 1, 2$$

$$*a^{aa}_{x(x_k)} = \frac{N^{aa}_{x(x_k)}}{D^{aa}_{x(x_k)}} \qquad *a^{ai}_{x(x_k)} = \frac{N^{ai}_{x(x_k)}}{D^{aa}_{x(x_k)}}.$$

Pour éviter tout malentendu il est utile de souligner que les symboles $*a$ sont seulement des grandeurs auxiliaires et ne représentent les valeurs actuelles des rentes que si $x = x_k$, comme nous l'avons montré au chapitre précédent [formules (13), (14), (20) et (21)]; on a donc

$$*a^{aa}_{x_k(x_k)} = a^{aa}_{x_k} \quad *a^{ai}_{x_k(x_k)} = a^{ai}_{x_k}.$$

En vertu de (30), on obtient

$$D^{aa}_{x(x_2)} = C_1 D^{aa}_{x(x_0)} + C_2 D^{aa}_{x(x_1)}$$

$$N^{aa}_{x(x_2)} = C_1 N^{aa}_{x(x_0)} + C_2 N^{aa}_{x(x_1)}$$

$$\frac{N^{aa}_{x_2(x_2)}}{D^{aa}_{x_2(x_2)}} = C_1 \frac{N^{aa}_{x_2(x_0)}}{D^{aa}_{x_2(x_2)}} + C_2 \frac{N^{aa}_{x_2(x_1)}}{D^{aa}_{x_2(x_2)}}$$

et, car $D^{aa}_{x_2(x_2)} = D^{aa}_{x_2(x_0)}$, on arrive à

$$a^{aa}_{x_2} = C_1 {*a^{aa}_{x_2(x_0)}} + C_2 {*a^{aa}_{x_2(x_1)}} \frac{D^{aa}_{x_2(x_1)}}{D^{aa}_{x_2(x_0)}}. \tag{31}$$

Par un processus analogue, on obtient

$$a^{ai}_{x_2} = C_1 {*a^{ai}_{x_2(x_0)}} + C_2 {*a^{ai}_{x_2(x_1)}} \frac{D^{aa}_{x_2(x_1)}}{D^{aa}_{x_2(x_0)}}. \tag{32}$$

A l'aide de ces formules on peut calculer les valeurs de a^{aa}_x et a^{ai}_x pour un âge quelconque, si l'on connaît les deux intégrales particulières $l^{aa}_{x(x_0)}$, $l^{ii}_{x(x_0)}$ et $l^{aa}_{x(x_1)}$, $l^{ii}_{x(x_1)}$ et si l'on a une fois établi les données auxiliaires $D^{aa}_{x(x_0)}$ $N^{aa}_{x(x_0)}$ etc.

Il est facile à partir des valeurs de a^{aa}_x et de a^{ai}_x données par les formules (31) et (32) de calculer les valeurs de a^{ii}_x et de a^{ia}_x. En multipliant l'équation (18) par e $^{-\delta x}$, on obtient

$$N^{ai}_{x(x_0)} = D^{aa}_{x(x_0)}a^{ai}_x + l^{ii}_{x(x_0)}e^{-\delta x}a^{iai}_x$$

$$a^{iai}_x = \frac{l^{aa}_{x(x_0)}}{l^{ii}_{x(x_0)}}({}^*a^{ai}_{x(x_0)} - a^{ai}_x) \tag{33}$$

ce qui conduit à $a^{ii}_x = a^{i}_x + a^{iai}_x$.

Pour obtenir a^{ia}_x, on part de l'équation (17) qui après multiplication par e $^{-\delta x}$ donne

$$N^{aa}_{x(x_0)} = D^{aa}_{x(x_0)}a^{aa}_x + l^{ii}_{x(x_0)}e^{-\delta x}a^{ia}_x.$$

$$a^{ia}_x = \frac{l^{aa}_{x(x_0)}}{l^{ii}_{x(x_0)}}({}^*a^{aa}_{x(x_0)} - a^{aa}_x). \tag{34}$$

Il reste à établir les formules d'une assurance au décès; à cette fin, adoptons la notation:

$$C^{aa}_{x(x_k)} = l^{aa}_{x(x_k)}\mu^a_x e^{-\delta x} \qquad C^{ai}_{x(x_k)} = l^{aa}_{x(x_k)}\nu_x A^i_x e^{-\delta x}$$

$$M^{aa}_{x(x_k)} = \int_{t=0}^{\infty} C^{aa}_{x+t(x_k)}\,dt \qquad M^{ai}_{x(x_k)} = \int_{t=0}^{\infty} C^{ai}_{x+t(x_k)}\,dt$$

$${}^*A^{aa}_{x(x_k)} = \frac{M^{aa}_{x(x_k)}}{D^{aa}_{x(x_k)}} \qquad {}^*A^{ai}_{x(x_k)} = \frac{M^{ai}_{x(x_k)}}{D^{aa}_{x(x_k)}}$$

Remarquons de nouveau que les symboles $^*A$ ne représentent pas pour un x quelconque une valeur actuelle et que seulement pour $x = x_k$ on obtient

$${}^*A^{aa}_{x_k(x_k)} = A^{aa}_{x_k} \quad {}^*A^{ai}_{x_k(x_k)} = A^{ai}_{x_k}.$$

Par le même processus que ci-dessus, on arrive à

$$A^{aa}_x = C_1{}^*A^{aa}_{x(x_0)} + C_2\frac{D^{aa}_{x(x_1)}}{D^{aa}_{x(x_0)}}{}^*A^{aa}_{x(x_1)} \tag{35}$$

$$A^{ai}_x = C_1{}^*A^{ai}_{x(x_0)} + C_2\frac{D^{aa}_{x(x_1)}}{D^{aa}_{x(x_0)}}{}^*A^{ai}_{x(x_1)} \tag{36}$$

et, en partant des relations (26) et (24) respectivement, on obtient

$$A^{iai}_x = \frac{l^{aa}_{x(x_0)}}{l^{ii}_{x(x_0)}}({}^*A^{ai}_{x(x_0)} - A^{ai}_x) \tag{37}$$

ČESKOSLOV. MATEMATICKÁ A FYSIKÁLNÍ KNIHOVNA

$$A_x^{ia} = \frac{l_{x(x_0)}^{aa}}{l_{x(x_0)}^{ii}} \left({}^*A_{x(x_0)}^{aa} - A_x^{aa}\right). \tag{38}$$

En résumé, on voit que les formules ainsi établies permettent de calculer les valeurs exactes de a_x^{aa}, a_x^{ai}, a_x^{ii} et a_x^{ia} et de A_x^{aa}, A_x^{ai}, A_x^{ii}, A_x^{ia}. Mais ces calculs restent toujours compliqués, car il faut procéder aux opérations suivantes:

a) calculer les deux intégrales particulières du système (I);

b) calculer $D_{x(x_0)}^{aa}$, $D_{x(x_0)}^{ai}$, $C_{x(x_0)}^{aa}$, $C_{x(x_0)}^{ai}$, $N_{x(x_0)}^{aa}$, $N_{x(x_0)}^{ai}$, $M_{x(x_0)}^{aa}$, $M_{x(x_0)}^{ai}$ et la même série pour l'indice x_1;

c) établir les grandeurs auxiliaires ${}^*a_{x(x_0)}^{aa}$, ${}^*a_{x(x_0)}^{ai}$, ${}^*A_{x(x_0)}^{aa}$, ${}^*A_{x(x_0)}^{ai}$ et les mêmes expressions pour l'indice x_1;

d) enfin, à l'aide des formules (31) à (38), calculer toutes les valeurs actuelles.

Remarquons encore que pour les âges x compris entre x_0 et x_1 on arrive à des valeurs de $l_{x(x_1)}^{ii}$ négatives ce qui n'est évidemment susceptible d'aucune interprétation directe, come d'ailleurs la plupart des expressions auxiliaires que nous avons utilisées.

VII.

Ayant montré que l'établissement des valeurs exactes demande de longs calculs, essayons maintenant d'établir des valeurs approchées. Il est toujours indispensable de calculer les ordres simples l_x^a et l_x^i et une intégrale particulière du système (I), généralement les ordres composés $l_{x(x_0)}^{aa}$ et $l_{x(x_0)}^{ii}$ qui commencent à un âge assez bas — par exemple $x_0 = 15$ — où l'on suppose qu'il n'existe pas encore des invalides. Tâchons donc d'obtenir les formules pour des valeurs approchées en n'utilisant que les ordres ci-dessus indiqués. Les valeurs les plus importantes pour toutes les évaluations actuarielles sont celles de a_x^{aa} et de a_x^{ai}.

En partant des équations (33) et (34), on obtient

$$a_x^{aa} = {}^*a_{x(x_0)}^{aa} - \frac{l_{x(x_0)}^{ii}}{l_{x(x_0)}^{aa}}\, a_x^{ia} \tag{39}$$

$$a_x^{ai} = {}^*a_{x(x_0)}^{ai} - \frac{l_{x(x_0)}^{ii}}{l_{x(x_0)}^{aa}}\, a_x^{iai} \tag{40}$$

Il en résulte que

$$a_x^{aa} \leqq {}^*a_{x(x_0)}^{aa}$$
$$a_x^{ai} \leqq {}^*a_{x(x_0)}^{ai}$$

ce qui donne des limites supérieures. Il n'est pas difficile d'établir des limites inférieures. De la relation $a_x^{aa} = a_x^{a} + a_x^{aia}$, il suit que $a_x^{aa} \geqq a_x^{a}$, ce qui nous permet de connaître l'intervalle à l'intérieur duquel se trouve la valeur exacte;

$$a_x^{a} \leqq a_x^{aa} \leqq {}^*a_{x(x_0)}^{aa}. \tag{41}$$

Pour obtenir une limite inférieure pour a_x^{ai}, partons de l'ordre simple l_x^{a} et introduisons l'expression

$${}^{(1)}a_x^{ai} = \int_0^{\infty} p^{a}(x, x+t)\, v_{x+t} a_{x+t}^{i} e^{-\delta t}\, dt$$

qui représente la valeur actuelle d'une rente d'invalidité sur la tête d'un valide d'âge x qui est servie seulement pour la première période d'invalidité. Il est évident que ${}^{(1)}a_x^{ai}$ est plus petite que a_x^{ai}; en effet, de l'équation (21) qui peut être écrite sous la forme

$$l_x^{aa} a_x^{ai} = \int_0^{\infty} ({}^1l_{x+t}^{aa} + {}^2l_{x+t}^{aa})\, v_{x+t} a_{x+t}^{i} e^{-\delta t}\, dt$$

il résulte que

$$a_x^{ai} = {}^{(1)}a_x^{ai} + \frac{1}{l_x^{aa}} \int_0^{\infty} {}^2l_{x+t}^{aa} v_{x+t} a_{x+t}^{i} e^{-\delta t}\, dt.$$

Ainsi, la valeur exacte se trouve à l'intérieur de l'intervalle défini par les inégalités

$${}^{(1)}a_x^{ai} \leqq a_x^{ai} \leqq {}^*a_{x(x_0)}^{ai} \tag{42}$$

Les formules (39) et (40) permettent d'estimer l'erreur commise en remplaçant les valeurs exactes par les valeurs approchées ${}^*a_{x(x_0)}^{aa}$ et ${}^*a_{x(x_0)}^{ai}$. Remarquons d'abord qu'elles donnent les valeurs exactes pour l'âge initial x_0. Pour les autres âges, la différence est représentée par le produit de deux coefficients, dont le premier est $\dfrac{l_{x(x_0)}^{ii}}{l_{x(x_0)}^{aa}}$, l'autre a_x^{ia} et a_x^{iai} respectivement. Pour les âges pas trop élevés, le quotient $\dfrac{l_{x(x_0)}^{ii}}{l_{x(x_0)}^{aa}}$ prend une valeur très petite. Quand ce coefficient atteint une valeur plus grande, c'est-à-dire pour les âges plus élevés, c'est ϱ_x qui s'abaisse sensiblement et, par conséquent, les grandeurs de a_x^{ia} et a_x^{iai} deviennent assez petit de sorte que le produit reste toujours petit.

Il y a encore une autre raison pour que l'on puisse se contenter, dans les applications pratiques, des formules approchées. Les valeurs de a_x^{aa} et de a_x^{ai} ne sont que des auxiliaires du calcul des primes ou des réserves. Il est donc utile de se rendre compte quelles erreurs résultertont de l'usage des valeurs approchées. Pour calculer une prime soit individuelle soit moyenne on prend une fraction dont le nominateur contient a_x^{ai} et le dénominateur a_x^{aa}. En substituant les valeurs exactes par les valeurs approchées, on estime le nominateur et le dénominateur au-dessus de leurs valeur exactes. Il s'ensuit que ces deux erreurs se compensent partiellement de sorte que l'erreur sur la valeur exacte d'une prime est plus petite que l'erreur sur la valeur des auxiliaires.

L'évaluation des espérances et des engagements d'un organisme assureur qui couvre M_x assurée valides d'âge x et J_x bénéficiaires invalides d'âge x, conduit aux formules

$$H_1 = M_x a_x^{aa} + J_x a_x^{ia}$$
$$H_2 = M_x a_x^{ai} + J_x a_x^{ii}$$

H_1, étant la valeur actuelle des primes et H_2 étant la valeur actuelle des rentes d'invalidité. Les valeurs approchées

$$H_1{}^* = M_x{}^* a_{x(x_0)}^{aa}$$
$$H_2{}^* = M_x{}^* a_{x(x_0)}^{ai} + J_x a_x^{i}$$

introduisent les erreurs

$$H_1{}^* - H_1 = M_x({}^*a_{x(x_0)}^{aa} - a_x^{aa}) - J_x a_x^{ia}$$
$$H_2{}^* - H_2 = M_x({}^*a_{x(x_0)}^{ai} - a_x^{ai}) + J_x(a_x^{i} - a_x^{ii}).$$

En substituant à ${}^*a_{x(x_0)}^{aa}$ et ${}^*a_{x(x_0)}^{ai}$ leurs valeurs tirées de (39) et (40) et en posant $a_x^{ii} = a_x^{i} + a_x^{iai}$, on obtient

$$H_1{}^* - H_1 = (M_x \frac{l_{x(x_0)}^{ii}}{l_{x(x_0)}^{aa}} - J_x)\, a_x^{ia}$$

$$H_2{}^* - H_2 = (M_x \frac{l_{x(x_0)}^{ii}}{l_{x(x_0)}^{aa}} - J_x)\, a_x^{iai}.$$

Il en résulte que les erreurs diminuent lorsque $\frac{J_x}{M_x}$ s'approche de $\frac{l^{ii}_{x(x_0)}}{l^{aa}_{x(x_0)}}$ et s'annule si ces deux proportions sont égales. De plus, les formules établies permettent de savoir, sans calcul laborieux, si l'erreur est positive ou négative.

Par un processus analogue, on peut établir des valeurs approchées pour l'assurance au décès. En partant des équations (37) et (38), on obtient

$$A^{aa}_x = {}^*A^{aa}_{x(x_0)} - \frac{l^{ii}_{x(x_0)}}{l^{aa}_{x(x_0)}} A^{ia}_x$$
$$A^{ai}_x = {}^*A^{ai}_{x(x_0)} - \frac{l^{ii}_{x(x_0)}}{l^{aa}_{x(x_0)}} A^{iai}_x$$

ce qui permet d'établir les inégalités

$$A^{a}_x \leqq A^{aa}_x \leqq {}^*A^{aa}_{x(x_0)}$$
$${}^{(1)}A^{ai}_x \leqq A^{ai}_x \leqq {}^*A^{ai}_{x(x_0)}$$

où

$${}^{(1)}A^{ai}_x = \int_0^\omega p^{a}(x, x+t)\, \nu_{x+t} A^{i}_{x+t} e^{-\delta t}\, dt.$$

Les valeurs approchées ${}^*A^{aa}_{x(x_0)}$ et ${}^*A^{ai}_{x(x_0)}$ sont plus grandes que les valeurs exactes, mais l'erreur reste toujours relativement petite. De plus, les conclusions sur les primes et sur les valeurs des engagements restent valables. En remplaçant les valeurs exactes

$$H_3 = M_x A^{aa}_x + J_x A^{ia}_x$$
$$H_4 = M_x A^{ai}_x + J_x A^{ii}_x$$

par les valeurs approchées

$$H_3{}^* = M_x {}^*A^{aa}_{x(x_0)}$$
$$H_4{}^* = M_x {}^*A^{ai}_{x(x_0)} + J_x A^{i}_x$$

les erreurs sont

$$H_3{}^* - H_3 = \left(M_x \frac{l^{ii}_{x(x_0)}}{l^{aa}_{x(x_0)}} - J_x\right) A^{ia}_x$$
$$H_4{}^* - H_4 = \left(M_x \frac{l^{ii}_{x(x_0)}}{l^{aa}_{x(x_0)}} - J_x\right) A^{iai}_x.$$

VIII.

Il s'avère utile d'accompagner chaque étude actuarielle d'une démonstration numérique. Dans notre cas, un tel exemple est assez difficile, par suite de ce qu'il n'existe pas un matériel statistique homogène, dans lequel on pourrait puiser les séries de tous les taux nécessaires, notamment les valeurs des taux de rentrées en validité. Faute de mieux, dans l'exemple numérique suivant, nous choisissons les taux de rentrées en validité d'une manière assez arbitraire, toutefois d'une telle manière que les taux pris en calcul répondraient aux expériences générales.

Remarquons encore que pour simplifier les travaux numériques, on a eu recours à des formules discontinues.

Donc, l'exemple numérique est basé sur les taux suivants:

a) les taux de mortalité q_x sont ceux de la population tchécoslovaque, hommes, 1929—1932;

b) les taux d'entrée en invalidité i_x et

c) les taux d'élimination des invalides s_x^i sont ceux des hommes assurés de l'Institut Général de Retraites, selon „Bases de calcul de l'assurance pension", Truksa-Vacek, Prague 1944, s_x^i étant légèrement modifié, de sorte que $s_x^i = q_x$ pour les âges $x \geqq 77$;

d) les taux de rentrée en validité r_x sont indiqués dans le tableau 1; ces taux sont pour les âges $x \leqq 35$ la moitié des taux s_x^i et le quotient $\dfrac{r_x}{s_x}$ diminue linéairement pour devenir égal à 0 à l'âge de 60 ans.

Les trois premiers taux permettent d'établir les ordres composés l_x^{aa} et l_x^{ii} ce qui a été effectué pour l_x^{ii} selon la formule (9) et pour l_x^{aa} par $l_x^{aa} = l_x - l_x^{ii}$.

Si les rentrées en validité n'avaient pas lieu, l'ordre l_x^{aa} permet d'établir les taux de mortalité des valides ${}^{\mathrm{I}}q_x^a$. Dans le système avec les rentrées en validité, ${}^{\mathrm{II}}q_x^a$ est

$$ {}^{\mathrm{II}}q_x^a = 1 - \frac{l_{x+1}^{aa} - \frac{1}{2} l_x^{ii} r_x}{l_x^{aa} + \frac{1}{2} l_x^{ii} r_x} + i_x. $$

Ayant calculé ${}^{\mathrm{III}}q_x^a$, on peut construire l'ordre simple l_x^a qui se trouve aussi dans le tableau 1.

Tab. 1.

x	l_x	l_x^{aa}	l_x^{ii}	l_x^{a}	l_x^{i}	s_x^{i}	r_x
15	100 000	100 000	—	100 000	100 000	0,1626	0,0813
16	99 761	99 651	110	99 651	83 740	0,1600	0,0800
17	99 475	99 273	202	99 264	70 342	0,1568	0,0784
18	99 143	98 863	280	98 838	59 312	0,1530	0,0765
19	98 772	98 425	347	98 378	50 237	0,1490	0,0745
20	98 371	97 996	405	97 893	42,752	0,1448	0,0724
21	97 949	97 494	455	97 392	36 562	0,1400	0,0700
22	97 512	97 012	500	96 879	31 443	0,1353	0,06765
23	97 065	96 524	541	96 358	27 189	0,1301	0,06505
24	96 614	96 035	579	95 835	23 652	0,1255	0,06275
25	96 164	95 550	614	95 315	20 684	0,1212	0,0611
26	95 726	95 079	647	94 808	18 156	0,1178	0,0589
27	95 303	94 616	687	94 308	16 017	0,1095	0,05475
28	94 889	94 161	728	93 817	14 263	0,1039	0,05195
29	94 471	93 703	768	93 324	12 781	0,0983	0,04915
30	94 044	93 236	808	92 821	11 525	0,0922	0,0461
31	93 608	92 750	858	92 300	10 462	0,0860	0,0430
32	93 161	92 253	908	91 768	9 562	0,0816	0,0408
33	92 702	91 735	967	91 216	8 782	0,0786	0,0393
34	92 228	91 187	1 041	90 633	8 092	0,0767	0,03835
35	91 739	90 611	1 128	90 021	7 471	0,0751	0,03755
36	91 233	89 998	1 235	89 370	6 910	0,0724	0,0348
37	90 707	89 345	1 362	88 679	6 410	0,0701	0,0322
38	90 159	88 651	1 508	87 947	5 961	0,0673	0,0296
39	89 586	87 914	1 672	87 172	5 560	0,0645	0,0271
40	88 986	87 133	1 853	86 353	5 201	0,0617	0,0247
41	88 357	86 297	2 060	85 479	4 880	0,0593	0,0225
42	87 699	85 393	2 306	84 538	4 591	0,0571	0,0206
43	87 011	84 430	2 581	83 528	4 329	0,0552	0,0188
44	86 291	83 401	2 890	82 472	4 090	0,0533	0,0171
45	85 538	82 291	3 247	81 326	3 872	0,0516	0,0155
46	84 748	81 107	3 641	81 107	3 672	0,0500	0,0140
47	83 917	79 849	4 068	78 815	3 488	0,0487	0,0127
48	83 041	78 478	4 563	77 411	3 318	0,0476	0,0114
49	82 114	76 979	5 135	75 881	3 160	0,0468	0,0103
50	81 131	75 349	5 782	74 223	3 012	0,0463	0,0093
51	80 088	73 558	6 530	72 407	2 873	0,0459	0,0083
52	78 984	71 597	7 387	70 424	2 741	0,0455	0,0073
53	77 819	69 781	8 338	68 290	2 616	0,0453	0,0063
54	76 592	67 219	9 373	66 016	2 497	0,0452	0,0054
55	75 302	64 796	10 506	63 587	2 384	0,0452	0,0045
56	73 449	62 214	11 735	61 008	2 276	0,0451	0,0036
57	72 529	59 462	13 067	58 269	2 173	0,0451	0,0027
58	71 037	56 519	14 518	55 351	2 075	0,0450	0,0018
59	69 467	53 354	16 113	52 226	1 982	0,0450	0,0009
60	67 811	49 972	17 839	48 902	1 893	0,0451	0,0000
61	66 062	46 375	19 687	45 382	1 808	0,0453	0,0000
62	64 214	42 613	21 601	41 701	1 726	0,0455	

x	l_x	l_x^{aa}	l_x^{ii}	l_x^{a}	l_x^{i}	s_x^{i}	r_x
63	62 263	38 713	23 550	37 885	1 647	0,0459	
64	60 206	34 745	25 461	34 002	1 571	0,0469	
65	58 046	30 790	27 256	30 132	1 497	0,0484	
66	55 785	26 919	28 866	26 344	1 425	0,0504	
67	53 426	23 168	30 258	22 673	1 353	0,0528	
68	50 971	19 602	31 369	19 183	1 282	0,0561	
69	48 420	16 302	32 118	15 954	1 210	0,0598	
70	45 776	13 289	32 487	13 005	1 138	0,0642	
71	43 041	10 607	32 434	10 380	1 065	0,0692	
72	40 224	8 242	31 982	8 066	991	0,0750	
73	37 339	6 161	31 178	6 029	917	0,0812	
74	34 405	4 325	30 080	4 232	843	0,0879	
75	31 447	2 766	28 621	2 707	769	0,0951	
76	28 493	1 474	27 019	1 443	696	0,1029	
77	25 573	411	25 162	402	624	0,11166	
78	22 718		22 718		554	0,12157	
79	19 946		19 956		487	0,13229	
80	17 316		17 316		423	0,14387	
81	14 825		14 825		362	0,15630	
82	12 508		12 508		305	0,16949	
83	10 388		10 388		253	0,18329	
84	8 484		8 484		207	0,19753	
85	6 808		6 808		166	0,21211	
86	5 364		5 364		131	0,22694	
87	4 147		4 147		101	0,24205	
88	3 143		3 143		77	0,25745	
89	2 334		2 334		57	0,27322	
90	1 696		1 696		41	0,28936	
91	1 205		1 205		29	0,30589	
92	836		836		20	0,32279	
93	566		566		14	0,34004	
94	374		374		9	0,35763	
95	240		240		6	0,37552	
96	150		150		4	0,39372	
97	91		91		2	0,41221	
98	53		53		1	0,43196	
99	30		30				
100	17						

La comparaison de ${}^{\mathrm{I}}q_x^a$ et ${}^{\mathrm{II}}q_x^a$ montre (Tab. 2), en effet, que ${}^{\mathrm{I}}q_x^a < {}^{\mathrm{II}}q_x^a$ pour les âges $x < 60$.

Pour calculer les valeurs précises de a_x^{aa} et a_x^{ai}, on a d'abord établi les ordres $l^{aa}_{x(x_i)}$ et $l^{ii}_{x(x_i)}$ pour les âges $x_i = 25$, 35, 45 et 55 et quelques-unes de ces valeurs sont reproduites dans le tableau 3.

Tab. 2.

x	${}^{\text{I}}q_x^a$	${}^{\text{II}}q_x^a$
20	0,0036	0,0039
30	0,0038	0,0042
40	0,0058	0,0063
50	0,0100	0,0101
60	0,0177	0,0177
70	0,0438	0,0438

Tab. 3.

x	$l_{x(xi)}^{aa}$					$l_{x(xi)}^{ii}$				
	$x_i = 15$	$x_i = 25$	$x_i = 35$	$x_i = 45$	$x_i = 55$	$x_i = 15$	$x_i = 25$	$x_i = 35$	$x_i = 45$	$x_i = 55$
15	100 000	0				0				
20	97 966	405				405				
25	95 550	95 550				614	0			
30	93 236	93 102				808	466			
35	90 611	90 421	90 611			1 128	905	0		
40	87 133	86 919	86 977			1 853	1 697	1 068		
45	82 291	82 075	82 072	82 291		3 247	3 126	2 658	0	
50	75 349	75 146	75 117	75 170		5 782	5 678	5 314	3 250	
55	64 796	64 618	64 583	64 564	64 796	10 506	10 408	10 118	8 485	0
60	49 972	49 834	49 804	49 772	49 861	17 839	17 736	17 499	16 198	9 485
65	30 790	30 705	30 686	30 667	30 722	27 256	27 138	26 942	25 904	20 616
70	13 289	13 252	13 244	13 236	13 260	32 487	32 365	32 210	31 414	27 419
75	2 766	2 758	2 756	2 755	2 760	28 681	28 579	28 470	27 928	25 243

Les valeurs de $a_x^{aa(12)}$ et a_x^{ai}, ${}^*a_x^{aa(12)}$ et ${}^*a_x^{ai}$ ainsi que de $a_x^{a(12)}$ et ${}^{(1)}a_x^{ai}$ ont été établies moyennant des formules courantes — par exemple ${}^*D_x^{ai} = l_x^{aa} i_x v^{x+\frac{1}{2}} a_{x+\frac{1}{2}}^{i(12)}$ — sous la supposition que les annuités sont payées mensuellement et que, par exemple, $a_x^{i(12)} = a_x^i - 0{,}464$.

La comparaison de valeurs précises avec les valeurs approchées s'interprète dans les tableaux suivants:

x	$a_x^{a(12)}$	$a_x^{aa(12)}$	${}^*a_x^{aa(12)}$
15	21,089	21,213	21,213
25	18,926	19,015	19,052
35	15,928	15,992	16,029
45	12,173	12,204	12,237
55	8,019	8,022	8,036
65	4,333	4,333	4,333

x	${}^{(1)}a_x^{ai}$	a_x^{ai}	${}^*a_x^{ai}$
15	1,385	1,408	1,408
25	1,954	1,978	1,984
35	2,756	2,780	2,788
45	3,774	3,789	3,803
55	4,773	4,775	4,784
65	4,860	4,860	4,860

On voit que les différences entre les valeurs précises $a_x^{aa(12)}$ et a_x^{ai} et les valeurs approchées ${}^*a_x^{aa(12)}$ et ${}^*a_x^{ai}$ sont d'ordre minime, quoique les taux r_x de rentrée en validité soient assez élevés et qu'on pourrait s'attendre à ce que l'influence des rentrées en validité se manifeste assez sensiblement.

Comparons encore les valeurs précises et les valeurs approchées pour les primes individuelles,

$$ {}^{(1)}p_x^{ai} = \frac{{}^{(1)}a_x^{ai}}{a_x^{a(12)}}, \quad p_x^{ai} = \frac{a_x^{ai}}{a_x^{aa(12)}} \quad \text{et} \quad {}^*p_x^{ai} = \frac{{}^*a_x^{ai}}{{}^*a_x^{aa(12)}} $$

dans le tableau ci-dessous:

JEDNOTA ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ * KNIHOVNA

x	$100.{}^{(1)}p_x^{ai}$	$100.\,p_x^{ai}$	$100.\,{}^*p_x^{ai}$
15	6,57	6,64	6,64
25	10,32	10,40	10,41
35	17,30	17,38	17,39
45	31,00	31,05	31,08
55	59,52	59,52	59,53
65	112,16	112,16	112,16

Ces résultats montrent que les différences entre les valeurs exactes et les valeurs approchées sont pratiquement négligeables, car les erreurs restent entièrement dans le cadre de la précision qu'on pourrait obtenir du tout.

L'établissement des valeurs approchées et des valeurs précises nous permet, finalement, de calculer à titre d'example quelques valeurs de a_x^{iai} et de a_x^{ia} moyennant des formules (33) et (34):

x	a_x^{iai}	a_x^{ia}
25	0,813	5,888
35	0,688	2,985
45	0,331	0,837
55	0,056	0,086

Quoique ces valeurs soient d'ordre normal, leur intervention dans les applications pratiques n'est nullement essentielle comme nous l'avons démontré ci-dessus.

L'exemple numérique met en lumière la conclusion à laquelle nous sommes arrivés dans le chapitre précédent que pour les buts d'une application pratique, les formules approchées sont tout à fait satisfaisantes et qu'il n'est pas nécessaire de procéder aux calculs laborieux permettant d'établir les valeurs précises.

JEDNOTA ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ KNIHOVNA

SOLUTION OF A SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS WITH LARGE COEFFICIENTS IN THE DIAGONAL

By Josef Bílý

In the course of the solution of a certain practical problem occurring in economic life and described below, there arises a system of linear equations which generally has large (in absolute value) coefficients in the diagonal. The aim of this paper is to describe methods of solution of such equations and by the use of matrix calculus to derive the conditions of application of the described methods of solution and their use in the solution of a certain practical problem. The numerical solution of a system of n linearly independent linear equations in n unknowns involves considerable difficulty when the number of unkowns becomes large, since it is necessary to carry out a large number of multiplications each including a certain error and add the results, thus increasing the error. For the solution of such systems of linear equations it is customary to use either the method of successive elimination or the evaluation of determinants in the numerator and denominator of the formula for the solution of systems of linear equations. (An exhaustive review of the methods in question is to be found in Psychometrica, Vol. 6., 1941, Paul S. Dwyer in the article „The solution of simultaneous equations".) In the method of successive elimination (see Láska-Hruška, Theorie a praxe numerického počítání, Praha 1934, p. 303), we decrease the number of unknowns and equations by one, so