Aktuárské vědy

Antonín Zelenka

# Rentrée en validité dans l'assurance-invalidité. I

*Aktuárské vědy*, Vol. 8 (1948), No. 2, 76–87

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144723

# RENTRÉE EN VALIDITÉ DANS L'ASSURANCE-INVALIDITÉ

Par Dr ANT ZELENKA, Genève

## Introduction.

Ce n'est pas par hasard que mon humble contribution aux hommâges du Prof. Dr E. Schoenbaum a pour sujet l'examen d'une question concernant l'établissement des ordres des valides et des invalides et des valeurs actuarielles qui en ressortent. C'est M. Schoenbaum qui a essentiellement approfondi les connaissances actuarielles sur tous les problèmes et qui a, le premier, démontré l'importance de certaines équations intégrales de Volterra pour les ordres des valides. Parmi ses travaux relatifs à ce sujet, notons les suivants:*)

Dans le présent article, je traite l'influence des rentrées en validité sur les ordres des valides et des invalides et les conséquences sur les valeurs actuarielles. Pour donner une image plus complète, je reproduis même certains résultats déjà bien connus et je tâche aussi, dans la mesure du possible, de faire une comparaison entre le système avec les rentrées en validité et le système sans rentrées en validité.

Quant à la notation utilisée dans cet article, j'indique que — pour simplifier l'impression, vu que les symboles sont assez souvent compliqués — je note par $a_x$ non surligné même les valeurs continues qui, normalement, sont notées par $\overline{a}_x$. Mais je suis sûr que cela n'occasionnera aucun malentendu, car les formules mettent en lumière de quelle valeur il s'agit.

## I.

Soit une population $L(x_0)$ de personnes d'âge $x_0$ et supposons que cette population soit „fermée", c'est-à-dire qu'elle ne reçoit aucune entrée et n'est assujettie qu'à des pertes par sorties. Après le temps $n$, la population est $L(x)$, où $x = x_0 + n$. Le nombre des sorties qui s'effectuent dans l'intervalle $(n, n + t)$ est

$$R(x, t) = L(x) - L(x + t)$$

où, selon ce qui précède, $R(x, t)$ n'est jamais négatif.

Cette population se divise en deux classes $L_1$ et $L_2$ qui s'excluent l'une l'autre. Tout individu de la population $L$ appartient à une de ces

*) E. SCHOENBAUM: Použití Volterrových integrálních rovnic v matematické statistice (Rozpravy České akademie 26, třída II, č. 26; 1917).

E. SCHOENBAUM: O jisté integrodifferenciální rovnici (Rozpravy České akademie 29, tř. II, č. 15; 1920).

deux classes et à une seule de telle sorte que

$$L(x) = L_1(x) + L_2(x).$$

Supposons qu'il existe des passages d'une classe à l'autre, dans les deux sens. Ces passages peuvent se succéder, c'est-à-dire qu'il y a toujours la possibilité de rentrée dans n'importe laquelle des deux classes. Nous distinguons des passages les sorties qui peuvent naturellement se produire au sein de $L_1$, comme au sein de $L_2$ et qui ont un caractère définitif.

La classe $L_1$ s'augmente par les passages en provenance de la classe $L_2$. Par contre, elle diminue soit par des passages à la classe $L_2$ soit par des sorties. Il y a donc

$$L_1(x + t) = L_1(x) + P_{21}(x, t) - P_{12}(x, t) - R_1(x, t) \qquad (1)$$

où $P_{12}(x, t)$ est le nombre des passages de la classe $L_1$ à la classe $L_2$ dans l'intervalle $(n, n + t)$.

$P_{21}(x, t)$ est le nombre des passages de la classe $L_2$ à la classe $L_1$ dans le même intervalle.

$R_1(x, t)$ est le nombre des sorties de la classe $L_1$ dans le même intervalle.

Remarquons que $R_1(x, t)$ englobe non seulement les sorties des individus qui appartenaient à la classe $L_1$ à l'époque $n$, mais aussi les sorties éventuelles des individus qui dans l'intervalle $(n, n + t)$ ont passé de la classe $L_2$ à la classe $L_1$.

De même on a

$$L_2(x + t) = L_2(x) + P_{12}(x, t) - P_{21}(x, t) - R_2(x, t) \qquad (2)$$

où $R_2(x, t)$ indique le nombre des sorties de la classe $L_2$ dans l'intervalle $(n, n + t)$.

La somme des relations (1) et (2) donne un résultat évident:

$$R(x, t) = R_1(x, t) + R_2(x, t).$$

Supposons que toutes les fonctions dont on fait usage sont dérivables et que les limites ci-dessous existent:

$$\frac{\mathrm{d}L_1(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{t\to 0} \frac{P_{21}(x, t)}{t} - \lim_{t\to 0} \frac{P_{12}(x, t)}{t} - \lim_{t\to 0} \frac{R_1(x, t)}{t}$$

$$\frac{\mathrm{d}L_2(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{t\to 0} \frac{P_{12}(x, t)}{t} - \lim_{t\to 0} \frac{P_{21}(x, t)}{t} - \lim_{t\to 0} \frac{R_2(x, t)}{t}$$

$$\frac{\mathrm{d}L(x)}{\mathrm{d}x} = -\lim_{t\to 0} \frac{R_1(x, t)}{t} - \lim_{t\to 0} \frac{R_2(x, t)}{t}.$$

Ayant introduit la notation

$$\lim_{t\to 0}\frac{P_{ik}(x,t)}{t}=L_i(x)\,\nu_{ik}(x)\quad i,k=1,2;\ i\neq k$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{R_k(x,t)}{t}=L_k(x)\,\mu_k(x)$$

où $\nu_{ik}(x)$ est le taux d'intensité des passages de $L_i$ à $L_k$ et $\mu_k(x)$ est le taux d'intensité des sorties de $L_k$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}L_1(x)}{\mathrm{d}x}=L_2(x)\,\nu_{21}(x)-L_1(x)\,[\nu_{12}(x)+\mu_1(x)]$$

$$\frac{\mathrm{d}L_2(x)}{\mathrm{d}x}=L_1(x)\,\nu_{12}(x)-L_2(x)\,[\nu_{21}(x)+\mu_2(x)]$$

$$\frac{\mathrm{d}L(x)}{\mathrm{d}x}=-L_1(x)\,\mu_1(x)-L_2(x)\,\mu_2(x)$$

Pour l'ordre d'activité, $L_1(x)$ représente la classe des valides, $L_2(x)$ la classe des invalides et $L(x)$ est la population totale des valides et des invalides. Si nous introduisons la notation courante dans les formules actuarielles, nous avons:

$\mu_1(x)=\mu_x^a=$ le taux instantané de mortalité des valides
$\mu_2(x)=\mu_x^i=$ le taux instantané de mortalité des invalides
$\nu_{12}(x)=\nu_x=$ le taux instantané d'entrée en invalidité
$\nu_{21}(x)=\varrho_x=$ le taux instantané de rentrée en validité.

On arrive ainsi aux équations bien connues:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}l_x^{aa}}{\mathrm{d}x}&=-l_x^{aa}(\mu_x^a+\nu_x)+l_x^{ii}\varrho_x\\ \frac{\mathrm{d}l_x^{ii}}{\mathrm{d}x}&=-l_x^{ii}(\mu_x^i+\varrho_x)+l_x^{aa}\nu_x.\end{aligned}\tag{I}$$

Ce système est d'une importance fondamentale pour toutes les questions se rapportant à la loi des valides et à la loi des invalides qui se trouvent à la base de tous les calculs actuariels dans l'assurance invalidité. Les équations (I) forment un système d'équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre; on sait que dans le cas où les fonctions $\mu_x^a$, $\mu_x^i$, $\nu_x$ et $\varrho_x$ sont continues dans l'intervalle $(x_0,\omega)$, il existe une solution unique $l_x^{aa}$ et $l_x^{ii}$ qui pour $x=x_0$ prend les valeurs choisies $l_{x_0}^{aa}$ et $l_{x_0}^{ii}$. La solution du système (I) conduit soit à une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre soit à une équation différentielle de Riccati.

Pour établir l'équation différentielle du deuxième ordre, on dérive la première équation du système et on élimine d'abord $\frac{dl_x^{ii}}{dx}$ à l'aide de la deuxième équation, puis $l_x^{ii}$ à l'aide de la première équation:

$$\frac{d^2 l_x^{aa}}{dx^2} = \frac{dl_x^{aa}}{dx}\left[\frac{\varrho_x'}{\varrho_x} - (\mu_x^a + \mu_x^i + \nu_x + \varrho_x)\right] + l_x^{aa}\left[\varrho_x \nu_x - (\mu_x^{a\prime} + \nu_x') + (\mu_x^a + \nu_x)\left(\frac{\varrho_x'}{\varrho_x} - \mu_x^i - \varrho_x\right)\right].$$

Pour établir l'équation de Riccati, on introduit deux fonctions auxiliaires $f(x)$ et $g(x)$ de sorte que

$$f(x) = l_x^{aa} + l_x^{ii} g(x). \tag{3}$$

Il résulte du système (I) que

$$\frac{dl_x^{aa}}{dx} + \frac{dl_x^{ii}}{dx} g(x) = l_x^{aa}[\nu_x g(x) - \mu_x^a - \nu_x] + l_x^{ii}[\varrho_x - (\mu_x^i + \varrho_x)\, g(x)].$$

En dérivant l'équation (3), on a:

$$\frac{dl_x^{aa}}{dx} + \frac{dl_x^{ii}}{dx} g(x) = \frac{df(x)}{dx} - l_x^{ii}\frac{dg(x)}{dx}.$$

Il en résulte que

$$\frac{df(x)}{dx} - l_x^{ii}\frac{dg(x)}{dx} = [f(x) - l_x^{ii} g(x)]\,.\,[\nu_x g(x) - \mu_x^a - \nu_x] + l_x^{ii}\,[\varrho_x - (\mu_x^i + \varrho_x)\, g(x)].$$

Imposons encore une deuxième condition aux fonctions $f(x)$ et $g(x)$

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x)\,[\nu_x g(x) - \mu_x^a - \nu_x].$$

On obtient ainsi

$$\frac{dg(x)}{dx} = \nu_x g^2(x) + g(x)\,[\mu_x^i + \varrho_x - \mu_x^a - \nu_x] - \varrho_x$$

qui est l'équation cherchée pour $g(x)$. Nous connaissons une solution explicite de l'équation de Riccati seulement dans quelques cas spéciaux quand les coefficients remplissent certaines conditions. Ces conditions signifient toujours qu'il existe entre ces coefficients une relation, de sorte qu'ils ne sont pas indépendants. Etant donné que dans notre cas les quatre fonctions $\mu_x^a$, $\mu_x^i$, $\nu_x$ et $\varrho_x$ sont, en général, indépendantes, l'équation n'admet pas une solution explicite.

Ainsi, on voit que le système (I), en général, ne permet donc pas une solution explicite pour les fonctions $l_x^{aa}$ et $l_x^{ii}$.

## II.

Avant de considérer le système général, il est utile de prendre le cas où $\varrho_x = 0$, c'est-à-dire où il n'existe aucune rentrée en validité. Nous nous bornerons à rappeler sommairement les résultats bien connus. Les équations (I) s'écrivent dans ce cas

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}l_x^{aa}}{\mathrm{d}x} &= -\, l_x^{aa}(\mu_x^a + \nu_x) \\ \frac{\mathrm{d}l_x^{ii}}{\mathrm{d}x} &= -\, l_x^{ii}\mu_x^i + l_x^{aa}\nu_x. \end{aligned} \tag{II}$$

Il est facile d'établir l'intégral qui pour $x = x_0$ prend les valeurs $l_{x_0}^{aa}$ et $l_{x_0}^{ii}$:

$$l_x^{aa} = l_{x_0}^{aa} e^{-\int\limits_0^{x-x_0} (\mu_{x_0+t}^a + \nu_{x_0+t})\,\mathrm{d}t}$$

$$l_x^{ii} = l_{x_0}^{ii} e^{-\int\limits_0^{x-x_0} \mu_{x_0+t}^i\,\mathrm{d}t} + \int\limits_{t=0}^{x-x_0} l_{x_0+t}^{aa}\nu_{x_0+t} e^{-\int\limits_{x_0+t}^{x} \mu_\tau^i\,\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}t$$

Introduisons une loi simple d'élimination des invalides par

$$l_x^i = l_{x_0}^i e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \mu_\tau^i\,\mathrm{d}\tau}$$

où

$$e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \mu_\tau^i\,\mathrm{d}\tau} = \frac{l_x^i}{l_{x_0}^i} = p^i(x_0, x)$$

représente la probabilité pour un invalide d'âge $x_0$ d'atteindre l'âge $x$. Ensuite, on peut écrire

$$l_x^{ii} = l_{x_0}^{ii} p^i(x_0, x) + \int\limits_0^{x_0-x} l_{x_0+t}^{aa}\nu_{x_0+t} p^i(x_0 + t, x)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

où l'on s'aperçoit d'une part le nombre des invalides d'âge $x_0$ qui ont atteint l'âge $x$ et, d'autre part, le nombre des personnes qui étaient valides à l'âge $x_0$, qui sont devenues invalides dans l'intervalle $(x_0, x)$ et ont atteint l'âge $x$.

La formule (4) qui peut s'écrire

$$l_{x+t}^{ii} = l_x^{ii} p^i(x, x+t) + \int\limits_0^{t} l_{x+\tau}^{aa}\nu_{x+\tau} p^i(x+\tau, x+t)\,\mathrm{d}\tau$$

permet d'établir facilement les relations de Schaertlin.[1]) La loi de survie

[1]) Dr. G. SCHAERTLIN: Contribution à la théorie mathématique de l'assurance en cas d'invalidité; Berne 1907.

$l_x$ de la population totale des valides et des invalides est

$$l_{x+t} = l^{aa}_{x+t} + l^{ii}_{x+t}.$$

Ayant multiplié cette relation par $e^{-\delta t}$, l'intégration par rapport à $t$ dans l'intervalle $(0, \infty)$ donne

$$\int_0^\infty l_{x+t} e^{-\delta t}\, dt = \int_0^\infty l^{aa}_{x+t} e^{-\delta t}\, dt + \int_0^\infty l^{ii}_{x+t} e^{-\delta t}\, dt$$

$$\int_0^\infty l^{ii}_{x+t} e^{-\delta t}\, dt = l^{ii}_x \int_0^\infty p^i(x, x+t)\, e^{-\delta t}\, dt + \int_{t=0}^{t=\infty} \int_{\tau=0}^{\tau=t} l^{aa}_{x+\tau} \nu_{x+\tau} p^i(x+\tau, x+t)\, . \\ . \, e^{-\delta t}\, d\tau\, dt.$$

En intervertissant les intégrations dans l'intégral double, il faut modifier convenablement les limites d'intégration (formule de Dirichlet):

$$\int_{t=0}^{t=\infty} \int_{\tau=0}^{\tau=t} l^{aa}_{x+\tau} \nu_{x+\tau} p^i(x+\tau, x+t)\, e^{-\delta t}\, d\tau\, dt = \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{t=\tau}^{\infty} l^{aa}_{x+\tau} \nu_{x+\tau} e^{-\delta t} \, . \\ . \, p^i(x+\tau, x+t)\, e^{-\delta(t-\tau)}\, dt\, d\tau =$$

$$= \int_{\tau=0}^{\infty} l^{aa}_{x+\tau} \nu_{x+\tau} e^{-\delta\tau} \left[\int_{t=\tau}^{\infty} p^i(x+\tau, x+t)\, e^{-\delta(t-\tau)}\, dt\right] d\tau =$$

$$= \int_{\tau=0}^{\infty} l^{aa}_{x+\tau} \nu_{x+\tau} a^i_{x+\tau}\, d\tau = l^{aa}_x a^{ai}_x.$$

Donc, on arrive à

$$l_x a_x = l^{aa}_x (a^{aa}_x + a^{ai}_x) + l^{ii}_x a^i_x \tag{5}$$



qui est la formule de Schaertlin.

Par le même processus, on peut établir une telle formule pour les valeurs actuelles des assurances au décès. Il ressort du système (II) que

$$l_x \mu_x = l^{aa}_x \mu^a_x + l^{ii}_x \mu^i_x$$

on obtient

$$\int_{t=0}^{\infty} l_{x+t} \mu_{x+t} e^{-\delta t}\, dt = \int_{t=0}^{\infty} l^{aa}_{x+t} \mu^a_{x+t} e^{-\delta t}\, dt + \int_{t=0}^{\infty} l^{ii}_{x+t} \mu^i_{x+t} e^{-\delta t}\, dt$$

$$\int_{t=0}^{\infty} l^{ii}_{x+t} \mu^i_{x+t} e^{-\delta t}\, dt = l^{ii}_x \int_0^\infty p^i(x, x+t)\, \mu^i_{x+t} e^{-\delta t}\, dt + \\ + \int_{t=0}^{\infty} \int_{\tau=0}^{\tau=t} l^{aa}_{x+\tau} \nu_{x+\tau} p^i(x+\tau, x+t)\, \mu^i_{x+t} e^{-\delta t}\, d\tau\, dt.$$

En intervertissant les intégrations dans l'intégral double, on obtient

$$\int_{\tau=0}^{\infty}\int_{t=\tau}^{\infty} l_{x+\tau}^{aa} \nu_{x+\tau} e^{-\delta\tau} p^{i}(x+\tau, x+t)\, e^{-\delta(t-\tau)}\, dt\, d\tau =$$

$$= \int_{\tau=0}^{\infty} l_{x+\tau}^{aa} \nu_{x+\tau} A_{x+\tau}^{i} e^{-\delta\tau}\, d\tau = l_x^{aa} A_x^{ai}.$$

Il s'ensuit que

$$l_x A_x = l_x^{aa}(A_x^{aa} + A_x^{ai}) + l_x^{ii} A_x^{i}. \tag{6}$$

On peut encore généraliser un peu ce résultat: au lieu de considérer des assurances au décès d'un montant égal à 1, on peut introduire des assurances de montant $\varphi(t)$ ne dépendant que de $t$. En introduisant la notation

$$l_x A_x(\varphi) = \int_{t=0}^{\infty} l_{x+t} \mu_{x+t} \varphi(t)\, e^{-\delta t}\, dt \quad \text{etc.}$$

le même processus que ci-dessus nous conduit à

$$l_x A_x(\varphi) = l_x^{aa}[A_x^{aa}(\varphi) + A_x^{ai}(\varphi)] + l_x^{ii} A_x^{i}(\varphi). \tag{7}$$

Si l'on suppose, par exemple, le même état-civil pour les invalides que pour les valides, la même répartition des veuves par âge et les mêmes conditions d'attribution des pensions de veuves, la formule (7) peut être appliquée aux valeurs actuelles des pensions de veuves. La même formule peut encore être appliquée pour les pensions d'orphelins, si l'on suppose le même nombre des enfants ayant droit pour les invalides que pour les valides, la même répartition de ces enfants par âge et les mêmes conditions d'attribution.

Remarquons encore qu'ordinairement, on ne fait pas usage des $l_x^{ii}$ pour les calculs de valeurs actuelles $a_x^{ai}$ ou $A_x^{ai}$ et qu'on applique presque toujours les formules avec $l_{x+t}^{aa}$ et avec la loi simple $l_x^{i}$:

$$l_x^{aa} a_x^{ai} = \int_0^{\infty} l_{x+t}^{aa} \nu_{x+t} a_{x+t}^{i} e^{-\delta t}\, dt$$

$$l_x^{aa} A_x^{ai} = \int_0^{\infty} l_{x+t}^{aa} \nu_{x+t} A_{x+t}^{i} e^{-\delta t}\, dt.$$

Mais, pour $x_0$ où $l_{x_0}^{ii} = 0$, on peut obtenir directement

$$l_{x_0}^{aa} a_{x_0}^{ai} = \int_0^{\infty} l_{x+t}^{ii} e^{-\delta t}\, dt$$

$$l_{x_0}^{aa} A_{x_0}^{ai} = \int_0^{\infty} l_{x+t}^{ii} \mu_{x+t}^{i} e^{-\delta t}\, dt$$

car, de ce qui précède, il est toujours

$$\int_{t=0}^{\infty} l^{ii}_{x+t} e^{-\delta t}\, dt = l^{ii}_x a^i_x + l^{aa}_x a^{ai}_x$$

$$\int_{t=0}^{\infty} l^{ii}_{x+t} \mu^i_{x+t} e^{-\delta t} = l^{ii}_x A^i_x + l^{aa}_x A^{ai}_x.$$

## III.

Supposons maintenant que $\varrho_x$ n'est pas constamment égal à 0. Introduisons encore la notation

$$\sigma^a_x = \mu^a_x + \nu_x \qquad \sigma^i_x = \mu^i_x + \nu_x$$

où $\sigma^a_x$ et $\sigma^i_x$ sont les taux d'intensité de l'élimination totale respectivement pour la classe des valides et pour la classe des invalides. Le système fondamental

$$\begin{aligned} \frac{dl^{aa}_{x+t}}{dt} &= -\, l^{aa}_{x+t} \sigma^a_{x+t} + l^{ii}_{x+t} \varrho_{x+t} \\ \frac{dl^{ii}_{x+t}}{dt} &= -\, l^{ii}_{x+t} \sigma^i_{x+t} + l^{aa}_{x+t} \nu_{x+t} \end{aligned} \tag{I}$$

n' admet pas, comme nous avons démontré, une solution explicite dans le cas général. Il est donc nécessaire de recourir à une solution approchée, par une intégration numérique, par exemple. A cette fin, il est utile de remplacer les équations (I) par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} l^{aa}_{x+t} &= l^{aa}_x e^{-\int_{\tau=0}^{t} \sigma^a_{x+\tau}\, dt} + \int_{\tau=0}^{t} l^{ii}_{x+\tau} \varrho_{x+\tau} e^{-\int_{\vartheta=\tau}^{t} \sigma^a_{x+\vartheta}\, d\vartheta}\, d\tau \\ l^{ii}_{x+t} &= l^{ii}_x e^{-\int_{\tau=0}^{t} \sigma^i_{x+\tau}\, d\tau} + \int_{\tau=0}^{t} l^{aa}_{x+\tau} \nu_{x+\tau} e^{-\int_{\vartheta=\tau}^{t} \sigma^i_{x+\vartheta}\, d\vartheta}\, d\tau \end{aligned} \tag{III}$$

Pour prouver que le système (III) est équivalent au système (I), il suffit de dériver le système (III) et de montrer que l'on obtient le système (I). Pour la première équation de (III), nous avons par dérivation:

$$\begin{aligned} \frac{dl^{aa}_{x+t}}{dt} &= -\, l^{aa}_x e^{-\int_{\tau=0}^{t} \sigma^a_{x+\tau}\, d\tau} \sigma^a_{x+t} + l^{ii}_{x+t} \varrho_{x+t} - \int_{\tau=0}^{t} l^{ii}_{x+\tau} \varrho_{x+\tau} e^{-\int_{\vartheta=\tau}^{t} \sigma^a_{x+\vartheta}\, d\vartheta} \sigma^a_{x+t}\, d\tau = \\ &= -\, \sigma^a_{x+t} \left[ l^{aa}_x e^{-\int_{\tau=0}^{t} \sigma^a_{x+\tau}\, d\tau} + \int_{\tau=0}^{t} l^{ii}_{x+\tau} \varrho_{x+\tau} e^{-\int_{\vartheta=\tau}^{t} \sigma^a_{x+\vartheta}\, d\vartheta}\, d\tau \right] + l^{ii}_x \varrho_{x+t} = \\ &= -\, l^{aa}_{x+t} \sigma^a_{x+t} + l^{ii}_x \varrho_{x+t}. \end{aligned}$$

De même, la dérivation de la deuxième équation du système (III) nous conduit à la deuxième équation du système (I). Dans la deuxième équation du système (III) figure l'expression $e^{-\int\limits_0^t \sigma^i_{x+\tau}\,\mathrm{d}\tau}$ qui nous rappelle l'ordre simple des invalides dans le cas sans rentrée en validité. Ici, cette formule indique la probabilité qu'un invalide d'âge $x$ appartient à la classe des invalides pendant tout l'intervalle $(x, x+t)$. Dans la première équation, on trouve encore $e^{-\int\limits_0^t \sigma^a_{x+\tau}\,\mathrm{d}\tau}$ qui est la probabilité qu'un valide d'âge $x$ atteigne l'âge $x+t$ sans avoir jamais quitté la classe des valides dans l'intervalle $(x, x+t)$. Ainsi, on est amené à introduire deux ordres simples auxiliaires des valides et des invalides par les formules



$$\begin{aligned} l^a_{x+t} &= l^a_x e^{-\int\limits_{\tau=0}^t \sigma^a_{x+\tau}\,\mathrm{d}\tau} = l^a_x p^a(x, x+t) \\ l^i_{x+t} &= l^i_x e^{-\int\limits_{\tau=0}^t \sigma^i_{x+\tau}\,\mathrm{d}\tau} = l^i_x p^i(x, x+t). \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

Avec cette notation, nous obtenons

$$\begin{aligned} l^{aa}_{x+t} &= l^{aa}_x p^a(x, x+t) + \int\limits_{\tau=0}^t l^{ii}_{x+\tau}\varrho_{x+\tau}p^i(x+\tau, x+t)\,\mathrm{d}\tau \\ l^{ii}_{x+t} &= l^{ii}_x p^i(x, x+t) + \int\limits_{\tau=0}^t l^{aa}_{x+\tau}\nu_{x+\tau}p^i(x+\tau, x+t)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

Ces relations montrent d'une manière expressive comment se construisent les ordres $l^{aa}_{x+t}$ et $l^{ii}_{x+t}$. Le premier terme indique le nombre des personnes qui restent dans leur classe pendant l'intervalle entier; le deuxième terme représente le nombre des passages en provenance de l'autre classe en combinaison avec les probabilités de rester dans la classe nouvelle depuis l'entrée jusqu'à l'époque considérée.

Il est intéressant de comparer le système sans rentrées en validité avec le système général et le rôle qui y jouent les „ordres simples". Par un ordre simple, nous entendons l'ordre d'élimination dans une population qui n'a pas d'entrées et qui diminue par les sorties. Ce sont la loi $l^i_x$ dans les deux systèmes, et $l^a_x$ seulement dans le système où existent des rentrées en validité. Par contre, par un ordre composé nous entendons un ordre où — à part les sorties — il existe des entrées. Dans tous les deux systèmes, $l^{ii}_x$ est un ordre composé. Mais $l^{aa}_x$ est un ordre composé dans le système avec des rentrées en validité, et un ordre simple dans le système sans rentrées en validité. En effet, on voit que $l^{aa}_x$ résultant des équations (II) est identique avec $l_x^a$ résultant des équations (IV); mais $l_x^{aa}$ résultant des équations (V) est bien différent de l'ordre $l_x^a$ résultant de (IV).

Des quatre taux $\mu_x^a$, $\mu_x^i$, $\nu_x$ et $\varrho_x$ résultent deux ordres composés $l_x^{aa}$ et $l_x^{ii}$, et deux ordres simples $l_x^a$ et $l_x^i$. Réciproquement, ces quatre ordres permettent d'établir les taux:

$$\sigma_x^a = \mu_x^a + \nu_x = -\frac{\mathrm{d}ln l_x^a}{\mathrm{d}x} \qquad \sigma_x^i = \mu_x^i + \nu_x = -\frac{\mathrm{d}ln l_x^i}{\mathrm{d}x}$$

$$l_x^{ii}\varrho_x = l_x^{aa}\sigma_x^a + \frac{\mathrm{d}l_x^{aa}}{\mathrm{d}x} = l_x^{aa}\left[\frac{\mathrm{d}l_x^{aa}}{l_x^{aa}\,\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}ln l_x^a}{\mathrm{d}x}\right] = l_x^{aa}\left(\frac{\mathrm{d}ln l_x^{aa}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}ln l_x^a}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$\varrho_x = \frac{l_x^{aa}}{l_x^{ii}}\,\frac{\mathrm{d}ln\dfrac{l_x^{aa}}{l_x^a}}{\mathrm{d}x}$$

$$\nu_x = \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}\,\frac{\mathrm{d}ln\dfrac{l_x^{ii}}{l_x^i}}{\mathrm{d}x}.$$

Si $l_x^{aa}$ doit être équivalent à $l_x^a$, il suit de la formule établie pour $\varrho_x$ que $\varrho_x$ doit être égal à 0. On voit donc que les deux conditions

$$l_x^{aa} = l_x^a \quad \text{ou} \quad \varrho_x = 0$$

sont équivalentes.

Pour passer des formules continues à des formules discontinues, on peut écrire

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa}p_x^{aa} + l_x^{ii}p_x^{ia} \qquad l_{x+1}^{ii} = l_x^{ii}p_x^{ii} + l_x^{aa}p_x^{ai} \qquad (8)$$

où $p_x^{aa}$ est la probabilité qu'un valide d'âge $x$ atteigne l'âge $x+1$ comme valide,

$p_x^{ai}$ est la probabilité qu'un valide d'âge $x$ atteigne l'âge $x+1$ comme invalide,

$p_x^{ii}$ est la probabilité qu'un invalide d'âge $x$ atteigne l'âge $x+1$ comme invalide,

$p_x^{ia}$ est la probabilité qu'un invalide d'âge $x$ atteigne l'âge $x+1$ comme valide.

Si l'on admet qu'une personne devenue invalide ne rentre pas en validité avant une année et qu'un invalide rentrant en validité ne redevient pas invalide avant une année,[2]) on peut conclure que dans les formules (8) $p_x^{aa}$ est égal à $p_x^a$ et $p_x^{ii}$ est égal à $p_x^i$. Les taux annuels d'entrée en invalidité $i_x$ et de rentrée en validité $r_x$ permettent d'écrire

$$s_x^a = 1 - p_x^a = i_x + q_x^a \qquad\qquad s_x^i = 1 - p_x^i = r_x + q_x^i$$

où $s_x^a$ est le taux d'élimination totale des valides et $s_x^i$ le taux d'élimination totale des invalides. Sous l'hypothèse ordinairement admise d'une évolution linéaire pendant une année on obtient

$$p_x^{ai} = i_x(1 - \tfrac{1}{2}s_x^i) = \tfrac{1}{2}i_x\,(1 + p_x^i)$$
$$p_x^{ia} = r_x(1 - \tfrac{1}{2}s_x^a) = \tfrac{1}{2}r_x\,(1 + p_x^a)$$

et finalement,

$$\begin{aligned} l_{x+1}^{aa} &= l_x^{aa}p_x^a + l_x^{ii}\,\tfrac{1}{2}r_x\,(1 + p_x^a) \\ l_{x+1}^{ii} &= l_x^{ii}p_x^i + l_x^{aa}\,\tfrac{1}{2}i_x\,(1 + p_x^i) \end{aligned} \qquad (9)$$

Toutefois, pour une application pratique, il est toujours utile de vérifier l'accord des hypothèses avec l'expérience, car les formules de récurrence (9) conduisent à un calcul de proche en proche où l'on court toujours le risque que les erreurs pourraient s'additionner au lieu de s'équilibrer.

## IV.

Etudions maintenant le cas qui se présente souvent dans la pratique: on connaît ou l'on suppose que l'on connaît la loi de survie $l_x$ de la population totale des valides et des invalides. Il est évident que les quatre taux $\mu_x^a$, $\mu_x^i$, $\nu_x$ et $\varrho_x$ ne sont plus indépendants.

A l'aide de $l_{x+t}^{aa} = l_{x+t} - l_{x+t}^{ii}$, on élimine $l_{x+t}^{aa}$ de la deuxième équation du système (I) et on obtient pour $l_{x+t}^{ii}$ l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dl_{x+t}^{ii}}{dt} = -\,l_{x+t}^{ii}(\sigma_{x+t}^i + \nu_{x+t}) - l_{x+t}\nu_{x+t}.$$

Son intégrale

$$l_{x+t}^{ii} = l_x^{ii}e^{-\int\limits_0^t(\sigma_{x+\tau}^i + \nu_{x+\tau})\,d\tau} + \int\limits_{\tau=0}^{t} l_{x+\tau}\nu_{x+\tau}e^{-\int\limits_\tau^t(\sigma_{x+\vartheta}^i + \nu_{x+\vartheta})\,d\vartheta}\,d\tau$$

ne dépend que de trois taux $\mu_x$, $\sigma_x^i$ et $\nu_x$; il en est de même pour $l_{x+t}^{aa}$ en vertu de relation $l_{x+t}^{aa} = l_{x+t} - l_{x+t}^{ii}$.

---

[2]) Ces suppositions sont admissibles, si a) l'incapacité d'une courte durée est considérée comme „maladie“ et couverte par l'assurance-maladie, b) lorsqu'un invalide rentré en validité redevient invalide avant une année, la période intercalée n'est considérée que comme une période de la suspension temporaire de pension.

Donc, la connaissance de trois taux:

$\mu_x$, le taux de mortalité de la population totale,

$\sigma_x^i$, le taux d'élimination des invalides,

$\nu_x$, le taux d'entrée en invalidité

permet d'établir les ordres $l_x^{aa}$ et $l_x^{ii}$. Ces ordres ne dépendent nullement de $\sigma_x^a$, c'est-à-dire de $\mu_x^a (= \sigma_x^a - \nu_x)$. Mais il faut souligner tout de suite que ces deux ordres et l'ordre simple $l_x^i$ — que l'on connaît aussi en vertu de $\sigma_x^i$ — ne suffisent pas pour déterminer le système entier, car, comme nous l'avons montré au chapitre précédent, il faut encore connaître l'ordre simple des valides $l_x^a$. Pour établir $l_x^a$ il est indispensable de connaître le quatriéme taux $\sigma_x^a$ ou, ce qui revient au même, $\mu_x^a$.

La somme des équations (I) donne

$$l_x \mu_x = l_x^{aa} \mu_x^a + l_x^{ii} \mu_x^i$$

car

$$\frac{\mathrm{d}l_x}{\mathrm{d}x} = -l_x \mu_x = \frac{\mathrm{d}l_x^{aa}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}l_x^{ii}}{\mathrm{d}x}.$$

Il s'ensuit que

$$\mu_x^a = \frac{l_x}{l_x^{aa}} \mu_x - \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}} \sigma_x + \varrho_x \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}. \tag{10}$$

La formule pour $\mu_x^a$ a la forme $\mu_x^a = f(x) + \varrho_x g(x)$ où les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ ne dépendent que des trois taux $\mu_x$, $\sigma_x^i$ et $\nu_x$. Il en résulte que si $\varrho_x$ augmente sans que ces trois taux changent, $\mu_x^a$ augmente aussi, car $g(x) = \dfrac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}$ ne devient jamais négatif. Ainsi, on arrive à une conclusion intéressante deux systèmes définis par les taux

$$\begin{matrix} {}^{\mathrm{I}}\mu_x & {}^{\mathrm{I}}\nu_x & {}^{\mathrm{I}}\sigma_x^i & {}^{\mathrm{I}}\varrho_x \\ {}^{\mathrm{II}}\mu_x & {}^{\mathrm{II}}\nu_x & {}^{\mathrm{II}}\sigma_x^i & {}^{\mathrm{II}}\varrho_x \end{matrix}$$

tels que ${}^{\mathrm{I}}\mu_x = {}^{\mathrm{II}}\mu_x$, ${}^{\mathrm{I}}\nu_x = {}^{\mathrm{II}}\nu_x$, ${}^{\mathrm{I}}\sigma_x^i = {}^{\mathrm{II}}\sigma_x^i$ et ${}^{\mathrm{I}}\varrho_x \neq {}^{\mathrm{II}}\varrho_x$, conduisent aux mêmes ordres composés de sorte que

$${}^{\mathrm{I}}l_x^{aa} = {}^{\mathrm{II}}l_x^{aa}, \quad {}^{\mathrm{I}}l_x^{ii} = {}^{\mathrm{II}}l_x^{ii}.$$

Les deux systèmes ont encore le même ordre simple des invalides $l_x^i$. Seul l'ordre simple des valides est différent. De la formule (10) résulte que

$${}^{\mathrm{I}}\mu_x^a - {}^{\mathrm{II}}\mu_x^a = \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}} ({}^{\mathrm{I}}\varrho_x - {}^{\mathrm{II}}\varrho_x).$$

Si ${}^{\mathrm{II}}\varrho_x \gg {}^{\mathrm{I}}\varrho_x$, on a ${}^{\mathrm{II}}\mu_x^a \gg {}^{\mathrm{I}}\mu_x^a$ et, par suite ${}^{\mathrm{II}}l_x^a \ll {}^{\mathrm{I}}l_x^a$.

(A suivre.)