Aktuárské vědy

E. Bunický

Remarque sur le critère de l'indépendance des caractères

Aktuárské vědy, Vol. 8 (1948), No. 2, 53–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144719

REMARQUE SUR LE CRITÈRE DE L'INDÉPENDANCE DES CARACTÈRES.

E. BUNICKÝ

1. Désignons par $A, B, \ldots, C$ les caractères des objets d'un collectif quelconque, par $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ respectivement les négations de ces caractères. De plus nous désignerons en général par (X) le contenu d'un ensemble formé par tous les objets du collectif qui jouissent du caractère X. Le contenu du collectif tout entier sera désigné par N. D'une manière analogue on désignera par (XY) le contenu d'un ensemble formé par tous les objets du collectif considéré qui ont simultanément les caractères X et Y. Pour que les deux caractères A et B soient indépendants dans les bornes d'un collectif donné, il faut et il suffit, comme il est bien connu, qu'ils vérifient l'équation

$$(AB)(\beta) = (A\beta)(B). \tag{1}$$

D'ailleurs l'équation (1) est équivalente à chacune des quatre équations

$$N(AB) = (A)(B), \quad (2) \qquad N(\alpha B) = (\alpha)(B), \quad (2'')$$

$$N(\alpha\beta) = (\alpha)(\beta), \quad (2') \qquad N(A\beta) = (A)(\beta). \quad (2''')$$

En effet, en exprimant les deux membres des équations (1), (2'), (2''), (2''') à l'aide des quantités (A), (B), (AB) et (N), on transforme toutes ces quatre équations en équation (2). Il est à remarquer que les égalités (2), (2'), (2''), (2''') expriment respectivement l'indépendance des caractères A et B, α et β, α et B, A et β. En multipliant ces quatre égalités à deux membre par membre, on obtient six équations suivantes

$$N^2(AB)(\alpha\beta) = (A)(B)(\alpha)(\beta), \quad (3) \qquad N^2(\alpha B)(\alpha\beta) = (B)(\alpha)^2(\beta), \quad (6)$$

$$N^2(AB)(\alpha B) = (A)(B)^2(\alpha), \quad (4) \qquad N^2(A\beta)(\alpha\beta) = (A)(\alpha)(\beta)^2, \quad (7)$$

$$N^2(AB)(A\beta) = (A)^2(B)(\beta), \quad (5) \qquad N^2(\alpha B)(A\beta) = (A)(B)(\alpha)(\beta). \quad (8)$$

Enfin il suit des équation (3) et (8) $N^2 . (AB) . (\alpha\beta) = N^2 . (\alpha B) . (A\beta)$ ou, en divisant par N^2 dans l'hypothèse que notre collectif n'est pas un ensemble vide,[1])

$$(AB)(\alpha\beta) = (\alpha B)(A\beta). \tag{9}$$

Nous nous proposons de démontrer que chacune des équations (3), (8), (9), ainsi que les équations (1), (2), (2'), (2''), (2'''), exprime une condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B, tandisque chacune des équations restantes (4), (5), (6), (7) présente une condition

[1]) Cf. E. CZUBER, Die statistischen Forschungsmethoden, pp. 10—11. M. CZUBER écrit les équations (3), (8), (9) sous la forme des égalités $(AB)(\alpha\beta) = \frac{(A)\,(B)\,(\alpha)\,(\beta)}{N^2} = (\alpha B)\,(A\beta)$.

nécessaire, mais non pas suffisante pour l'indépendance des caractères A et B.

2. Considérons avant tout l'équation (9). En exprimant $(\alpha\beta)$, (αB) et $(A\beta)$ en fonction des quantités N, A, B et AB, l'équation (9) prend la forme

$$(AB)[N-(A)-(B)+(AB)]-[(B)-(AB)]\,.\,[(A)-(AB)]=0$$

ou

$$N(AB)-(A)(AB)-(B)(AB)+(AB)^2-(A)(B)+(A)\,(AB)+\\+(B)(AB)-(AB)^2=0,$$

c'est-à-dire $N(AB)-(A)(B)=0$, ce qui coïncide avec la condition (2) nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B. Donc l'équation (9) exprime de même une condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B. On pourrait examiner toutes les autres équations (3), (8), (4), (5), (6), (7) d'une manière semblable, en exprimant les contenus de tous les ensembles considérés par les quantités (A), (B), (AB) et N. Or cette méthode conduit aux calculs assez longs. Pour les abréger nous démontrerons quelques propositions auxiliaires.

3. Pour chaques deux caractères A et B indépendants ou dépendants on a identiquement

$$N(\alpha\beta)-(\alpha)(\beta)=N(AB)-(A)(B), \tag{I}$$

$$N(\alpha B)-(\alpha)(B)=N(A\beta)-(A)(\beta), \tag{II}$$

$$N(\alpha\beta)+N(\alpha B)-(\alpha)(\beta)-(\alpha)(B)=0, \tag{III}$$

$$N(\alpha\beta)+N(A\beta)-(\alpha)(\beta)-(A)(\beta)=0, \tag{IV}$$

$$N(\alpha B)-(\alpha)(B)=(A)(B)-N(AB), \tag{V}$$

$$N(A\beta)-(A)(\beta)=(A)(B)-N(AB). \tag{VI}$$

En effet, en exprimant $(\alpha\beta)$, (α) et (β) en fonction de (A), (B), (AB) et N, on aura

$$N(\alpha\beta)-(\alpha)(\beta)=N[N-(A)-(B)+(AB)]-[N-(A)]\,[N-(B)]=\\=N(AB)-(A)(B),$$

d'où suit identité (I). Dans cette identité A et B sont des caractères choisis arbitrairement. Par suite, on peut remplacer β par B, en remplaçant le caractère opposé à B par β, c'est-à-dire on peut échanger dans l'identité (I) β et B [ou α et (A)]; on arrive ainsi à l'identité (II). En vertu des identités $(\alpha\beta)+(\alpha B)=(\alpha)$ et $(\beta)+(B)=N$, on trouve $N(\alpha\beta)+N(\alpha B)-(\alpha)(\beta)-(\alpha)(B)=N[(\alpha\beta)+(\alpha B)]-(\alpha)[(\beta)+(B)]=N(\alpha)-N(\alpha)=0$, d'où l'on tire l'identité (III). D'une manière parfaitement analogue on aura

$$N(\alpha\beta)+N(A\beta)-(\alpha)(\beta)-(A)(\beta)=N[(\alpha\beta)+(A\beta)]\\-[(\alpha)+(A)](\beta)=N(\beta)-N(\beta)=0,$$

d'où suit l'identité (IV). Des identités (III) et (I) on déduit

$$N(\alpha B) - (\alpha)(B) = -[N(\alpha\beta) - (\alpha)(\beta)] = -[N(AB) - (A)(B)],$$

d'où suit l'identité (V), et l'identité (VI) suit immédiatement des identités (V) et (II).

Remarque. En interprétant l'identité (I) au point de vue de la théorie des probabilités, on peut considérer la présence des caractères A, B, α, β chez les objets du collectif donné comme des événements quelconques A, B et respectivement des événements opposés non A, non B. Dans cette hypothèses les rapports $\frac{(A)}{N}, \frac{(B)}{N}, \frac{(\alpha)}{N}, \frac{(\beta)}{N}, \frac{(AB)}{N}, \frac{(\alpha\beta)}{N}$, représentent respectivement les probabilités d'apparition des événements A, B, α, β, d'apparition simultanée de A et de B et d'apparition simultanée de α et de β. En désignant ces probabilités respectivement par p_1, p_2, $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$, $P(AB)$, $P(\alpha\beta)$ et en divisant l'identité (I) par N^2, on trouve $P(AB) - P(\alpha\beta) = p_1p_2 - q_1q_2 = p_1p_2 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - 1$. Ainsi la différence des probabilités $P(AB)$ et $P(\alpha\beta)$ s'exprime toujours, même pour les événements dépendants, par $p_1p_2 - q_1q_2 = p_1 + p_2 - 1$, c'est-à-dire par la même formule qui vaut dans le cas de l'indépendance de A et de B, quand on a séparément $P(AB) = p_1p_2$, $P(\alpha\beta) = q_1q_2$. On peut trouver l'interprétation analogue pour toutes les autres identités indiquées plus haut.

4. Considérons maintenant la relation (3). En l'écrivant sous la forme $N^2(AB)(\alpha\beta) - (A) . (B) . (\alpha)(\beta) = 0$ et en substituant le produit $(\alpha)(\beta)$ de l'identité (I), on aura, tous les calculs faits,

$$N^2(AB)(\alpha\beta) - N(\alpha\beta)(A)(B) + N(AB)(A)(B) - (A)^2(B)^2 = 0$$

ou

$$[N(AB) - (A)(B)] . [N(\alpha\beta) + (A)(B)] = 0. \tag{3'}$$

Si l'on a $(A) \neq 0$ et $(B) \neq 0$, c'est-à-dire $(A) > 0$, $(B) > 0$, on en tire $N(\alpha\beta) + (A)(B) > 0$. En divisant l'équation (3′) par la quantité $N(\alpha\beta + + (A)(B)$ différente de zéro dans le cas considéré, on obtient $N(AB) - (A)(B) = 0$, c'est-à-dire dans ce cas l'équation (3) est équivalente à l'équation (2), qui donne une condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B. Dans le cas opposé, où l'on a $(A) = 0$ ou $(B) = 0$, ce qui ne présente qu'un intérêt purement théorique, toutes les deux équations (3) et (2) sont aussi satisfaites. Ainsi dans tous les cas l'équation (3) est équivalente à l'équation (2).

Par suite l'équation (3) est nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B.

5. En écrivant l'équation (8) sous la forme

$$N^2(A\beta)(B\alpha) - (A)(B)(\alpha)(\beta) = 0, \tag{8'}$$

on pourrait l'examiner par la méthode appliquée a l'équation (3), si l'on substitute dans le second terme la valeur du produit $(A)(\beta)$[ou $(\alpha)(B)$] tiré de l'identité (II). Mais il y a une méthode plus simple. Nous avons démontré aussitôt à l'aide de l'identité (I) que l'équation (3) est nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B. Echangeons partout B et β; en le faisant dans l'identité (I) on obtient l'identité (II). En échangeant B et β dans l'équation (3) on obtient l'équation (8). Donc à l'aide de l'identité (II) on peut démontrer que l'équation (8) est nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et β. Or cette indépendance est équivalente, comme il est indiqué plus haut, à l'indépendance des caractères A et B. Par suite, l'équation (8) présente aussi une condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B.

6. Considérons maintenant l'équation (4). En l'écrivant sous la forme

$$N^2(AB)\,.\,(\alpha B) - (A)(B)^2\,.\,(\alpha) = 0$$

et en substituant la valeur du produit $(\alpha)(B)$ de l'identité (V) on aura

$$N^2\,.\,(AB)\,,(\alpha B) - (A)(B)\,N(\alpha B) - (A)(B)\,N(AB) + A^2B^2 = 0$$

ou

$$[N(AB) - (A)(B)]\,.\,[N(\alpha B) - (A)(B)] = 0. \tag{4'}$$

Ainsi pour vérifier l'équation (4) il faut et il suffit de satisfaire à l'une des équations

$$N(AB) - (A)(B) = 0 \tag{4_1}$$

ou

$$N(\alpha B) - (A)(B) = 0, \tag{4_2}$$

dont la première coïncide avec l'équation (2), nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B. Si l'équation (4_2) est satisfaite, l'équation (4) l'est aussi, mais la condition (4_1) de l'indépendance ne peut être vérifiée simultanément que si l'on a, dans l'hypothèse de $N \neq 0$, $(AB) = (\alpha B)$, ce qui suppose une distribution particulière des caractères A et B dans le collectif considéré. On doit donc soupçonner que l'équation (4) peut être satisfaite sans que les caractères A et B soient indépendants. Pour en donner un exemple déterminé, définissons la distribution des caractères A et B dans un collectif par les équations $(A) = nm$, $(B) = (n + 1)\,m$, $(AB) = nm$, où m est un entier positif quelconque, n étant un entier plus grand que 1. Par suite on a $(A\beta) = (A) - (AB) = 0$, $(\alpha B) = (B) - (AB) = m$. Définissons maintenant le contenu N du collectif d'une telle manière, que l'équation (4_2) soit satisfaite. On aura ainsi

$$N = \frac{(A)(B)}{(\alpha B)} = \frac{n(n+1)\,m^2}{m} = n(n+1)\,m.$$

Il en suit

$$(\alpha) = N - (A) = n(n+1)\,m - nm = n^2m,$$

$$(\beta) = N - (B) = n(n+1)\,m - (n+1)\,m = m(n^2-1),$$
$$(\alpha\beta) = (\alpha) - (\alpha B) = n^2m - m = m(n^2-1).$$

On a donc

$$\begin{gathered}(A) = nm,\ (B) = (n+1)\,m,\ (AB) = nm,\\ (A\beta) = 0,\ (\alpha B) = m,\ (\alpha) = n^2m,\\ (\beta) = m(n^2-1),\ (\alpha\beta) = m(n^2-1);\ N = n(n+1)\,m.\end{gathered} \tag{10}$$

La distribution des caractères B et B définie par les équations (10) donne pour tous les neuf quantités $(A), (B), (AB), (A\beta), (\alpha B), (\alpha), (\beta), (\alpha\beta), N$ des valeurs non négatives, à savoir, n étant par hypothèse plus grand que 1, ce n'est que la quantité $(A\beta)$ qui s'annule, toutes les autres huit quantités étant positives; il en suit que cette distribution est possible. Or pour une telle distribution l'équation (4) est vérifiée, chacun de deux membres en ayant la valeur $m^4n^3(n+1)^2$, mais l'équation (2) nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B n'est pas satisfaite. En effet, en substituant dans le premier membre de l'équation (4_1), équivalente à l'équation (2), les valeurs de (A), de (B), de (AB) et de N, on trouve

$$N(AB) - (A)(B) = n(n+1)\,m\,.\,nm - n(n+1)\,m^2 = nm^2(n^2-1) > 0,$$

puisque on a $n > 1$. Ainsi l'équation (4) déduite des équations (2) et (2″), présente une condition nécessaire, mais non pas suffisante pour l'indépendance des caractères A at B.

Remarque. Il suit des équations (10) $(A) = (AB) = nm$, c'est-à-dire la classe A du collectif est contenue dans la classe B; d'autre part en vertu de l'inégalité $n > 1$ on a $N = n(n+1)\,m > (n+1)\,m = (B)$. Ça suffit pour la possibilité de la distribution (10).

7. On peut écrire l'équation (5) sous la forme

$$N^2(AB)(A\beta) - (A)^2\,.\,(B)(\beta) = 0$$

et puis décomposer le premier membre en portant la valeur du produit $(A)(\beta)$ tirée de l'identité (VI). Ainsi on peut examiner l'équation (5) par une méthode analogue à celle qui était appliquée à l'équation (4). Mais il est plus simple de remarquer que l'on obtient l'équation (5) en échangeant dans l'équation (4) les lettres A et B et simultanément les lettres α et β, c'est-à-dire en transformant l'équation (4) à l'aide de la substitution

$$\begin{pmatrix} BA\beta\alpha \\ AB\alpha\beta \end{pmatrix}. \tag{11}$$

On a vu que pour la distribution des caractères A et B, indiqueé par les équations (10), l'équation (4) est satisfaite sans que soit satisfaite la condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B. Donc, si l'on transforme les équations (10) par la substitution (11), on doit obtenir une telle distribution des caractères A et B, pour laquelle l'équation

(5) sera satisfaite sans que les caractères B et A verifient l'équation nécessaire et suffisante de l'indépendance des caractères B et A. Il est à remarquer que la substitution (11) ne change pas le contenu N du collectif, parce qu'elle transforme la somme $(A) + (\alpha) = N$ en somme $(B) + (\beta) = N$, qui exprime le contenu du collectif transformé. Ainsi, en transformant les équations (10) à l'aide de la substitution (11), on aura

$$\begin{gathered}(A) = (n+1)\,m,\ (B) = nm,\ (AB) = nm,\\ (A\beta) = m,\ (\alpha B) = 0,\ (\alpha) = m(n^2 - 1),\\ (\beta) = n^2 m,\ (\alpha\beta) = m(n^2 - 1),\ N = n(n+1)\,m.\end{gathered} \tag{10_1}$$

Pour la distribution des caractères A et B exprimée par les équations (10_1) les deux membres de l'équation (5) ont la même valeur $m^4n^3(n+1)^2$, et, par suite, l'équation (5) est vérifiée. Mais le premier membre de l'équation (4_1), qui exprime une condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B, prend conformément aux équation (10_1) la valeur

$$N(AB) - (A)(B) = n^2m^2(n+1) - n(n+1)\,m^2 = nm^2(n^2 - 1) > 0$$

différente de zéro, puisque on a par hypothèse $n > 1$. Ainsi l'équation (5), déduite des équations (2) et $(2''')$, exprime une condition qui est nécessaire pour l'indépendance des caractères A et B mais n'est pas en général suffisante.

8. En écrivant l'équation (6) sous la forme

$$N^2 \,.\, (\alpha B)(\alpha\beta) - (B)(\alpha)^2 \,.\, (\beta) = 0,$$

on peut décomposer le premier membre en portant la valeur du produit $(\alpha)(\beta)$ de l'identité (III). Or il est plus simple d'appliquer aux équation (5) et (10_1) la substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha B A \beta\\ A B \alpha \beta\end{pmatrix}. \tag{12}$$

A l'aide de cette substitution l'équation (5) se transforme en équation (6). De plus la substitution (12) reproduit la somme $(A) + (\alpha) = (\alpha) + (A)$ et par suite, elle ne change pas le contenu $N = (A) + (\alpha)$ du collectif. Ainsi les équations (10_1) après une transformation par la substitution (12) deviennent

$$\begin{gathered}(A) = m(n^2 - 1),\ (B) = nm,\ (AB) = 0,\\ (A\beta) = m(n^2 - 1),\ (\alpha B) = nm,\ (\alpha) = (n+1)\,m,\\ (\beta) = n^2 m,\ (\alpha\beta) = m,\ N = n(n+1)\,m.\end{gathered} \tag{10_2}$$

Pour la distribution des caractères A et B, exprimée par les équations (10_1), l'équation (5), comme nous l'avons démontré plus haut, est satisfaite sans que soit satisfaite l'équation (2), nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B. Donc pour la distribution (10_2) des caractères A et B l'équation (6) est satisfaite, tandisque l'équation $(2'')$ nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères α et B — obtenus des caractères A et B au moyen de la substitution (12) — n'est pas vérifiée. Ainsi, l'équation (2″) étant équivalente à l'équation (2), l'équation (6), déduite des relations (2′) et (2″) nécessaires pour l'indépendance des caractères A et B, présente une condition aussi nécessaire, mais non pas suffisante pour l'indépendance des caractères A et B. Dans l'épreuve des équations (6) et (2″) pour la distribution (10_2) les calculs numériques sont les mêmes, comme on doit l'attendre, que dans la numéro précédent 7: chacun de deux mêmbres de l'équation (6) prend la même valeur $m^4n^3(n+1)^2$, mais le premier membre de l'équation $N(\alpha B) - (\alpha)(B) = 0$ équivalente à l'équation (2″) a une valeur positive $nm^2(n^2 - 1) > 0$, puisque on a par hypothèse $n > 1$.

Remarque. Au lieu de l'équation (2″) on peut éprouver pour la distribution (10_2) des caractères A et B directement l'équation (2). Pour cette distribution le premier membre de l'équation (2) s'annule, mais le second membre prend une valeur positive $nm^2(n^2 - 1) > 0$, puisque on a $n > 1$.

9. On peut examiner l'équation (7) en l'écrivant sous la forme $N^2(A\beta)(\alpha\beta) - (A)(\alpha)(\beta)^2 = 0$. Si l'on y porte la valeur du produit $(\alpha)(\beta)$, tirée de l'identité (IV), le premier membre se décompose en produit de deux facteurs, que l'on peut examiner separément. Or il est plus simple d'appliquer aux équations (6) et (10_2) la substitution (11) qui ne change pas, comme nous l'avons vu plus haut, le contenu N du collectif. Cette substitution transforme l'équation (6) en équation (7) et les équations (10_2) en

$$\begin{aligned} &(A) = nm,\ (B) = m(n^2 - 1),\ (AB) = 0, \\ &(A\beta) = nm,\ (\alpha B) = m(n^2 - 1),\ (\alpha) = n^2 m, \\ &(\beta) = (n+1)\,m,\ (\alpha\beta) = m,\ N = n(n+1)\,m. \end{aligned} \tag{10_3}$$

Pour la distribution (10_2) l'équation (6) est satisfaite sant que soit vérifiée l'équation (2) nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B. Il en suit que pour la distribution (10_3) l'équation (7) est satisfaite, sans que la condition (2) nécessaire et suffisante de l'indépendance des caractères A et B — ou, suivant la substitution (11), des caractères B et A, ce qui est ici la même chose — soit vérifiée. Donc l'équation (7), déduite des équations (2′) et (2‴), présente une condition quoique nécessaire, mais non pas suffisante pour l'indépendance des caractères A et B. Le calcul du contrôle reste pour la distribution (10_3) le même: les deux membres de l'équation (7) ont une valeur commune $m^4n^3(n+1)^2$; le premier membre de l'équation (2) s'annule, et le second mêmbre a une valeur positive $nm^2(n^2 - 1) > 0$, puisque on a $n > 1$.

10. En écrivant l'équation (4) (voir 6) sous la forme (4) $N^2(AB)(\alpha B) - (A) \,.\, (B)^2 \,.\, (\alpha) = 0$ et en décomposant le premier membre en un produit de deux facteurs, on a

$$[N(AB) - (A)(B)] \, . \, [N(\alpha B) - (A)(B)] = 0. \tag{4'}$$

On a indiqué plus haut la méthode pour une transformation analogue des équations (5), (6), (7), en omettant pourtant les calculs correspondants (voir 7, 8, 9). Or, en écrivant les équations (5), (6), (7) sous la forme

$$N^2(AB)(A\beta) - (A)^2(B)(\beta) = 0, \quad N^2 \, . \, (\alpha B)(\alpha\beta) - (B)(\alpha)^2(\beta) = 0,$$
$$N^2 \, . \, (A\beta)(\alpha\beta) - (A)(\alpha)(\beta)^2 = 0$$

on peut obtenir à l'instant les décompositions cherchées des premiers membres à l'aide des substitutions (11) et (12). En effet, en appliquant à l'équation (4) la substitution (11), on obtient l'équation (5) (voir no 7). Donc, en transformant à l'aide de cette substitution l'équation (4'), on trouve

$$[N(AB) - (A)(B)] \, . \, [N(A\beta) - (A)(B)] = 0, \tag{5'}$$

ce qui présente la décomposition cherchée pour l'équation (5). De même, en appliquant la substitution (12) à l'équation (5) on obtient l'équation (6) (voir No. 8). Donc, en appliquant cette substitution à l'équation (5'), on trouve la décomposition correspondante pour l'équation (6) sous la forme

$$[N(\alpha B) - (\alpha)B] \, . \, [N(\alpha\beta) - (\alpha)B] = 0. \tag{6'}$$

Enfin, en transformant l'équation (6) à l'aide de la substitution (11) on obtient l'équation (7) (voir numéro 9). Ainsi, en appliquant cette substitution à l'équation (6'), on aura

$$[N(A\beta) - (A)(\beta)] \, . \, [N(\alpha\beta) - (A)(\beta)] = 0, \tag{7'}$$

ce qui donne la décomposition cherchée pour l'équation (7). En répétant le raisonnement du numéro 7 on trouve que pour chaque distribution des caractères A et B qui est soumise, toujours dans l'hypothèse de $N \neq 0$, à l'une des restrictions $(A\beta) \neq (AB)$, $(\alpha\beta) \neq (\alpha B)$, $(\alpha\beta) \neq (A\beta)$, l'une des équations (5), (6), (7) est respectivement satisfaite sans que l'équation (2) soit vérifiée. En d'autres termes, on peut démontrer à l'aide de telles distributions que chacune des équations (5), (6), (7) présente une condition quoique nécessaire mais non pas suffisante pour l'indépendence des caractères A et B.

Il est encore à remarquer que parmi toutes les équations mentionnées au numéro 1 chaque équation qui ne contient aucun des carrés $(A)^2$, $(B)^2$, $(\alpha)^2$, $(\beta)^2$, exprime une condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance des caractères A et B, et au contraire chaque équation qui contient l'un de ces carrés présente une condition quoique nécessaire, mais non pas suffisante.