Hans Koeppler

Die Lösung von Summengleichungen durch die Loewy'schen Formeln zur Darstellung von Integralgleichungen nach Übertragung dieser auf endliche Differenzen

Aktuárské vědy, Vol. 7 (1938), No. 4, 155–163

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144701

Die Lösung von Summengleichungen durch die Loewy'schen Formeln zur Darstellung von Integralgleichungen nach Übertragung dieser auf endliche Differenzen.

Von *Hans Koeppler*, Berlin.

Unter Summengleichungen mögen Gebilde mit Jahresintervallen verstanden werden, welche den Volterra'schen Integralgleichungen entsprechen, jedoch hinsichtlich ihrer Kerne von der gleichen, einfacheren Beschaffenheit sind wie die Volterra'schen Integralgleichungen der Lebensversicherung, beziehungsweise die Übertragungen der Volterra'schen Integralgleichungen auf die Lebensversicherung. Der Einfachheit halber sollen die der allgemeinen Praxis am besten entsprechenden Jahresintervalle angenommen werden. Wesentlich ist nur, daß es sich nicht um Betrachtungen handeln soll, bei denen Differentialänderungen vorliegen. Der Verfasser will hiernach also Berechnungen für Jahresintervalle anstellen, welche den Integraldarstellungen eines früheren Aufsatzes des Verfassers (1) entsprechen.

Unter einer retrospektiven Summengleichung wollen wir eine Gleichung von der Form

$$\varphi_{(\varkappa)} = u_{(\varkappa)} \pm \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} \frac{f_{(\lambda)}}{f_{(\varkappa)}} v_{(\lambda)}\, \varphi_{(\lambda+1)} \tag{I}$$

verstehen. In dieser bedeuten $\varphi_{(\varkappa)}$, $\varphi_{(\lambda+1)}$ die unbekannten Funktionen, $u_{(\varkappa)}$ die bekannte Funktion und $\frac{f_{(\lambda)}}{f_{(\varkappa)}} v_{(\lambda)}$ den Kern, welcher sich aus bekannten Funktionen zusammensetzt. Über diesen Kern lassen sich zwar von vornherein einfachere Annahmen machen, doch erfolge die getroffene Annahme aus Gründen der Allgemeinheit. In der Voraussetzung, daß $f_{(\lambda)}$ und $f_{(\lambda+1)}$ durch die Gleichung $f_{(\lambda+1)} = f_{(\lambda)}\, w_{(\lambda)}$ verbunden ist, schreiben wir die Gleichung (I) in der Form

$$f_{(\varkappa)}\, \varphi_{(\varkappa)} = f_{(\varkappa)}\, u_{(\varkappa)} \pm \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} \frac{v_{(\lambda)}}{w_{(\lambda)}} f_{(\lambda+1)} \varphi_{(\lambda+1)} \tag{Ia}$$

und setzen darauf

$$f(m)\, \varphi(m) = \psi(m) \text{ und } f_{(\varkappa)}\, u_{(\varkappa)} = g_{(\varkappa)},$$

sodaß wir die einfachere Gleichung

$$\psi_{(\varkappa)} = g_{(\varkappa)} \pm \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} \frac{v_{(\lambda)}}{w_{(\lambda)}} \psi_{(\lambda+1)} \tag{Ib}$$

erhalten, in der die Funktionen $\psi(m)$ unbekannt sind.

In der modernen Versicherungsmathematik bedient man sich wohl allerortens seit Jahren lieber prospektiver Methoden zur Berechnung der Prämienreserve. Daher erscheint es auch angebracht, prospektive Summengleichungen aufzustellen. Als solche wollen wir die Gleichung

$$\varphi_{(\varkappa)} = u_{(\varkappa)} \pm \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} \frac{f_{(\lambda)}}{f_{(\varkappa)}} v_{(\lambda)}\, \varphi_{(\lambda+1)} \tag{II}$$

ansehen, die wir zunächst in

$$f_{(\varkappa)}\, \varphi_{(\varkappa)} = f_{(\varkappa)}\, u_{(\varkappa)} \pm \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} \frac{v_{(\lambda)}}{w_{(\lambda)}} f_{(\lambda+1)}\, \varphi_{(\lambda+1)} \tag{IIa}$$

umformen, wobei wir wieder annehmen, daß $f_{(\lambda+1)} = f_{(\lambda)}\, w_{(\lambda)}$. Setzen wir analog der Behandlung der retrospektiven Summengleichungen $f(m)\,\varphi(m) = \psi(m)$ und $f_{(\varkappa)}\, u_{(\varkappa)} = g_{(\varkappa)}$, so erscheint die Gleichung (IIa) in der Form

$$\psi_{(\varkappa)} = g_{(\varkappa)} \pm \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} \frac{v_{(\lambda)}}{w_{(\lambda)}} \psi_{(\lambda+1)}. \tag{IIb}$$

Nach diesen Vorausschickungen mögen die Lösungen der Gleichungen (Ib) und (IIb) vorbereitet werden. Wir gehen zu diesem Zweck von dem Bruch zweier Funktionen

$$\psi_{(\lambda)} = \frac{\varphi_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}}$$

aus. Mittels dieses bilden wir die Differenz

$$\begin{aligned}
\psi_{(\lambda+1)} - \psi_{(\lambda)} &= \frac{\varphi_{(\lambda+1)}}{s_{(\lambda+1)}} - \frac{\varphi_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}} = \\
&= \frac{\varphi_{(\lambda+1)}\, s_{(\lambda)} - \varphi_{(\lambda)}\, s_{(\lambda+1)} + \varphi_{(\lambda+1)}\,(s_{(\lambda+1)} - s_{(\lambda+1)})}{s_{(\lambda)}\, s_{(\lambda+1)}} = \\
&= \frac{s_{(\lambda+1)}\,(\varphi_{\lambda+1)} - \varphi_{(\lambda)}) - \varphi_{(\lambda+1)}\,(s_{(\lambda+1)} - s_{(\lambda)})}{s_{(\lambda)}\, s_{(\lambda+1)}} = \\
&= \frac{\Delta\varphi_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}} - \frac{\Delta s_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}} \psi_{(\lambda+1)}.
\end{aligned}$$

Durch Summation dieser Differenz nach λ von a bis b gelangen wir zu der Grundgleichung

$$\psi(b) = \sum_{\lambda=a}^{\lambda=b-1} \frac{\Delta\varphi_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}} - \sum_{\lambda=a}^{\lambda=b-1} \frac{\Delta s_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}} \psi_{(\lambda+1)} + \psi(a), \tag{III}$$

welche uns zu den Lösungen der Summengleichungen führen soll.

Für $a = 0$ und $b = \varkappa$, sowie $\psi_{(0)} = 0$ ergibt sich die lösende Gleichung

$$\psi_{(\varkappa)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} \frac{\Delta\varphi_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}} - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} \frac{\Delta s_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}} \psi_{(\lambda+1)}. \tag{IIIa}$$

Schreibt man dagegen die Gleichung (III) in der Form

$$\psi(a) = \psi(b) - \sum_{\lambda=a}^{\lambda=b-1} \frac{\Delta\varphi_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}} + \sum_{\lambda=a}^{\lambda=b-1} \frac{\Delta s_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}} \cdot \psi_{(\lambda+1)} \tag{IV}$$

und setzt $a = \varkappa$, $b = n$, so folgt

$$\psi_{(\varkappa)} = \psi_{(n)} - \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} \frac{\Delta\varphi_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}} + \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} \frac{\Delta s_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}} \psi_{(\lambda+1)}. \tag{IVa}$$

Um die Lösung der Gleichung (Ib) vermöge der Gleichung (IIIa) zu bewerkstelligen, setze man erstens

$$g_{(\varkappa)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} \frac{\Delta\varphi_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}}, \quad g_{(\varkappa+1)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa} \frac{\Delta\varphi_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}}, \quad \Delta g_{(\varkappa)} = \frac{\Delta\varphi_{(\varkappa)}}{s_{(\varkappa)}},$$

wonach

$$\Delta\varphi_{(\varkappa)} = s_{(\varkappa)}\, \Delta g_{(\varkappa)}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} \Delta\varphi_{(\lambda)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} s_{(\lambda)}\, \Delta g_{(\lambda)}$$

oder, wenn angenommen wird, daß $\varphi(0) = 0$,

$$\varphi_{(\varkappa)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} s_{(\lambda)}\, \Delta g_{(\lambda)}.$$

Zweitens setze man

$$\frac{\Delta s_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}} = \mp \frac{v_{(\lambda)}}{w_{(\lambda)}},$$

woraus sich die homogenen Differenzengleichungen ergeben:

$$\Delta s_{(\lambda)} = \mp \frac{v_{(\lambda)}}{w_{(\lambda)}} \cdot s_{(\lambda)},$$

$$s_{(\lambda+1)} - s_{(\lambda)} \pm \frac{v_{(\lambda)}}{w_{(\lambda)}} \cdot s_{(\lambda)} = 0,$$

$$s_{(\lambda+1)} - \frac{w_{(\lambda)} \mp v_{(\lambda)}}{w_{(\lambda)}} s_{(\lambda)} = 0.$$

Die Lösung dieser haben aber bekanntlich die Form (2)

$$s_{(\lambda)} = \prod_{t=0}^{t=\lambda-1} \frac{w_{(t)} \mp v_{(t)}}{w_{(t)}} s_{(0)}.$$

Setzen wir nun die Werte von $\varphi_{(\varkappa)}$, $s_{(\varkappa)}$ und $s_{(\lambda)}$ in

$$\psi_{(\varkappa)} = \frac{\varphi_{(\varkappa)}}{s_{(\varkappa)}}$$

ein, so gelangen wir zu der Lösung

$$\psi_{(\varkappa)} = \frac{1}{\prod\limits_{t=0}^{t=\varkappa-1} \frac{w_{(t)} \mp v_{(t)}}{w_{(t)}} s_{(0)}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} \prod_{t=0}^{t=\lambda-1} \frac{w_{(t)} \mp v_{(t)}}{w_{(t)}} s_{(0)} \Delta g_{(\lambda)} =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} \frac{\prod\limits_{t=\lambda}^{t=\varkappa-1} w_{(t)}}{\prod\limits_{t=\lambda}^{t=\varkappa-1} (w_{(t)} \mp v_{(t)})} \Delta g_{(\lambda)}. \tag{V}$$

Die Lösung der Gleichung (IIb) wird mittels der Gleichung (IVa) herbeigeführt, indem man erstens

$$g_{(\varkappa)} = \psi(n) - \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} \frac{\Delta\varphi_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}}, \quad g_{(\varkappa+1)} = \psi(n) - \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{\lambda=n-1} \frac{\Delta\varphi_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}},$$

$$\Delta g_{(\varkappa)} = \frac{\Delta\varphi_{(\varkappa)}}{s_{(\varkappa)}}$$

setzt. Hiernach ist

$$\Delta\varphi_{(\varkappa)} = s_{(\varkappa)} \Delta g_{(\varkappa)}$$

$$\varphi(n) - \varphi_{(\varkappa)} = \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} \Delta\varphi_{(\lambda)} = \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} s_{(\lambda)} \Delta g_{(\lambda)}$$

und daher

$$\varphi_{(\varkappa)} = \varphi(n) - \sum_{\lambda=\varkappa}^{\zeta=n-1} s_{(\lambda)} \Delta g_{(\lambda)}.$$

Der Vergleich der Gleichungen (IIb) und (IVa) liefert uns ferner noch die Gleichung

$$\frac{\Delta s_{(\lambda)}}{s_{(\lambda)}} = \pm \frac{v_{(\lambda)}}{w_{(\lambda)}},$$

nach welcher

$$\Delta s_{(\lambda)} \mp \frac{v_{(\lambda)}}{w_{(\lambda)}} s_{(\lambda)} = 0$$

oder

$$s_{(\lambda+1)} - \frac{w_{(\lambda)} \pm v_{(\lambda)}}{w_{(\lambda)}} s_{(\lambda)} = 0.$$

Für diese homogenen Differenzengleichungen bedürfen wir der weniger bekannten prospektiven Lösungen, die wir leicht finden können, indem wir die n homogenen Differenzengleichungen

$$y_{\lambda+1} = A_\lambda y_\lambda \ (\lambda = \varkappa, \varkappa + 1, \ldots, n-2, n-1)$$

multiplizieren, wodurch sich ergibt:

$$y_n = \prod_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} A_\lambda \cdot y_\varkappa.$$

Hiernach ist aber

$$s_{(n)} = \prod_{t=\lambda}^{t=n-1} \frac{w_{(t)} \pm v_{(t)}}{w_{(t)}} s_{(\lambda)}$$

und umgekehrt

$$s_{(\lambda)} = \frac{\prod\limits_{t=\lambda}^{t=n-1} w_{(t)}}{\prod\limits_{t=\lambda}^{t=n-1} (w_{(t)} \pm v_{(t)})} s_{(n)}.$$

Setzen wir die für $\varphi_{(\varkappa)}$ und $s_{(\lambda)}$, bezw. $s_{(\varkappa)}$ gefundenen Werte in

$$\psi_{(\varkappa)} = \frac{\varphi_{(\varkappa)}}{s_{(\varkappa)}}$$

ein, so gelangen wir zu der Lösung

$$\psi_{(\varkappa)} = \frac{\prod\limits_{t=\varkappa}^{t=n-1} \frac{w_{(t)} \pm v_{(t)}}{w_{(t)}}}{s_{(n)}} \left[\varphi(n) - \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} \frac{s_{(n)}}{\prod\limits_{t=\lambda}^{t=n-1} \frac{w_{(t)} \pm v_{(t)}}{w_{(t)}}} \Delta g_{(\varkappa)}\right] =$$

$$= \psi(n) \prod_{t=\varkappa}^{t=n-1} \frac{w_{(t)} \pm v_{(t)}}{w_{(t)}} - \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} \prod_{t=\varkappa}^{t=\lambda-1} \frac{w_{(t)} \pm v_{(t)}}{w_{(t)}} \Delta g_{(\lambda)}. \qquad \text{(VI)}$$

Die praktische Anwendung der Gleichungen (Ib) und (IIb) und ihrer Lösungen (V) und (VI) könnte der Verfasser an bereits von ihm auf andere Weise behandelten Summengleichungen (3) vor Augen führen. Um jedoch größere Abwechslung zu bieten, soll eine retrospektive Summengleichung für die Sparprämie, welche Dr. M. Jacob (4) aufgestellt und nach der dem Verfasser nicht bekannt gewordenen Regel von Cramér gelöst hat, nach dem hier beschriebenen Verfahren gelöst werden. Zu der von Dr. Jacob beschriebenen retrospektiven Gleichung für die Sparprämie läßt sich auch eine prospektive Summengleichung der Sparprämie aufstellen, welche im Anschluß an die Behandlung der retrospektiven Gleichung kurz beschrieben und gelöst werden soll.

Aus der bekannten Tatsache, daß die Jahresprämie einer gemischten Versicherung oder einer lebenslänglichen Versicherung auf den Todesfall stets der Summe aus der Risikoprämie und aus der Sparprämie ist, folgt, wenn man die Sparprämie des $\varkappa$-ten Jahres mit ${}_\varkappa Q_x$ bezeichnet, zunächst

$${}_\varkappa Q_x = P_{x\overline{n}|} - v\, q_{x+\varkappa-1}\, (S_\varkappa - {}_\varkappa V_x),$$

wobei angenommen wird, daß sich $P_{x\overline{n}|}$ und ${}_{\varkappa}V_x$ auf die variablen Summen $S_\varkappa$ beziehen. Nach der Theorie der Sparprämie und des Dekkungskapitals kann man aber

$$ {}_{\varkappa}V_x = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} r^{\varkappa-\lambda}\ {}_{\lambda+1}Q_x $$

setzen, sodaß die retrospektive Summengleichung inbezug auf ${}_{\lambda+1}Q_x$

$$ {}_{\varkappa}Q_x = P_{x\overline{n}|} - v\, q_{x+\varkappa-1}\left(S_\varkappa - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} r^{\varkappa-\lambda}\ {}_{\lambda+1}Q_x\right) $$

entsteht, die wir noch in der Form

$$ \frac{v^\varkappa\, {}_{\varkappa}Q_x}{q_{x+\varkappa-1}} = \left(\frac{v^\varkappa P_{x\overline{n}|}}{q_{x+\varkappa-1}} - v^{\varkappa+1} S_\varkappa\right) + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} q_{\lambda+\varkappa}\, \frac{v^{\lambda+1}\ {}_{\lambda+1}Q_x}{q_{x+\lambda}} $$

schreiben wollen. Setzen wir sodann

$$ \frac{v^\varkappa{}_{\varkappa}Q_x}{q_{x+\varkappa-1}} = \psi_{(\varkappa)}, \quad \frac{v^\varkappa P_{x\overline{n}|}}{q_{x+\varkappa-1}} - v^{\varkappa+1} S_\varkappa = g_{(\varkappa)}, \quad \frac{v^{\lambda+1}\ {}_{\lambda+1}Q_x}{q_{x+\lambda}} = \psi_{(\lambda+1)}, $$

so erhalten wir eine der beiden in der Summengleichung (Ib) enthaltene, nämlich

$$ \psi_{(\varkappa)} = g_{(\varkappa)} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} q_{x+\lambda}\, \psi_{(\lambda+1)}. $$

Berücksichtigen wir, daß bei dieser Gleichung $w_{(\lambda)} = 1$ und $v_{(\lambda)} = q_{x+\lambda}$, so folgt

$$ \prod_{t=\lambda}^{t=\varkappa-1} (w_{(t)} \mp v_{(t)}) = \prod_{t=\lambda}^{t=\varkappa-1} (1 - q_{x+t}) = \frac{l_{x+\varkappa}}{l_{x+\lambda}}. $$

Gemäß Lösung (V) erscheint die Lösung zunächst in der Form

$$ \psi_{(\varkappa)} = \frac{1}{l_{x+\varkappa}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} l_{x+\lambda}\, \Delta g_{(\lambda)}. $$

So einfach diese Lösung auch erscheint, so bereitet doch ihre weitere Vereinfachung gerade bei diesem Beispiel einige Schwierigkeiten. Es liegt hier ein ähnlicher Fall vor wie bei den Lösungen der Volterra'schen Integralgleichungen, die ebenfalls noch weiterer Umformungen bedürfen, beispielsweise durch Anwendung partieller Integration (5). Verwendet man aber auf Grund der Formel

$$ u_{(\varkappa)}\, v_{(\varkappa)} - u_{(0)}\, v_{(0)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} u_{(\lambda)}\, \Delta v_{(\lambda)} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} \Delta u_{(\lambda)}\, v_{(\lambda+1)} $$

den Ausdruck

$$ \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} l_{x+\lambda}\, \Delta g_{(\lambda)} = l_{x+\varkappa}\, g_{(\varkappa)} - l_x\, g_{(0)} - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} \Delta l_{x+\lambda}\, g_{(\lambda+1)} $$

und berücksichtigt, daß nach der Natur der Aufgabe $g_{(0)} = 0$ sein muß, so ergibt sich

$$\frac{v^{\varkappa}\;{}_{\varkappa}Q_x}{q_{x+\varkappa-1}} = \frac{l_{x+\varkappa}}{l_{x+\varkappa}}\left(\frac{v^{\varkappa}\,P_{x\overline{n}|}}{q_{x+\varkappa-1}} - v^{\varkappa+1}\,S_{\varkappa}\right) + \\ + \frac{1}{l_{x+\varkappa}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} l_{x+\lambda}\,q_{x+\lambda}\left(\frac{v^{\lambda+1}\,P_{x\overline{n}|}}{q_{x+\lambda}} - v^{\lambda+2}\,S_{\lambda+1}\right)$$

und hieraus die angestrebte Lösung

$$\begin{aligned}{}_{\varkappa}Q_x &= P_{x\overline{n}|} - v\,q_{x+\varkappa-1}\,S_{\varkappa} + \frac{v\,q_{x+\varkappa-1}}{l_{x+\varkappa}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-1} l_{x+\lambda}v^{\lambda}(P_{x\overline{n}|} - vq_{x+\lambda}\,S_{\lambda+1}) = \\ &= P_{x\overline{n}|} - vq_{x+\varkappa-1}\,(S_{\varkappa} - {}_{\varkappa}V_{\alpha}) = P_{x\overline{n}|} - {}_{\varkappa}\Pi_x.\end{aligned}$$

Um zu der prospektiven Summengleichung der Sparprämie zu gelangen, hat man in der Grundformel

$${}_{\varkappa}Q_x = P_{x\overline{n}|} - vq_{x+\varkappa-1}\,(S_{\varkappa} - {}_{\varkappa}V_x)$$

die $\varkappa$-te Prämienreserve durch die Formel

$${}_{\varkappa}V_x = v^{n-\varkappa}\,S_n - \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} v^{\lambda-\varkappa}\;{}_{\lambda+1}Q_x$$

auszudrücken. Aus der so entstehenden Gleichung

$${}_{\varkappa}Q_x = P_{x\overline{n}|} - vq_{x+\varkappa-1}\left(S_{\varkappa} - v^{n-\varkappa}\,S_n + \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} v^{\lambda-\varkappa}\;{}_{\lambda+1}Q_x\right)$$

ergibt sich durch Transformation

$$\frac{v^{\varkappa}\;{}_{\varkappa}Q_x}{q_{x+\varkappa-1}} = \left(\frac{v^{\varkappa}\,P_{x\overline{n}|}}{q_{x+\varkappa-1}} - v^{\varkappa+1}\,S_{\varkappa} + v^{n+1}\,S_n\right) - \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} q_{x+\lambda}\,\frac{v^{\lambda+1}\;{}_{\lambda+1}Q_x}{q_{x+\lambda}}.$$

Indem man nunmehr

$$\frac{v^{\varkappa}\;{}_{\varkappa}Q_x}{q_{x+\varkappa-1}} = \psi_{(\varkappa)}, \quad \left(\frac{v^{\varkappa}\,P_{x\overline{n}|}}{q_{x+\varkappa-1}} - v^{\varkappa+1}\,S_{\varkappa} + v^{n+1}\,S_n\right) = g_{(\varkappa)},$$
$$\frac{v^{\lambda+1}\;{}_{\lambda+1}Q_x}{q_{x+\lambda}} = \psi_{(\lambda+1)}$$

setzt, gelangt man zu der prospektiven Summengleichung

$$\psi_{(\varkappa)} = g_{(\varkappa)} - \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} q_{x+\lambda}\,\psi_{(\lambda+1)},$$

für welche

$$w_{(\lambda)} = 1,\; v_{(\lambda)} = q_{x+\lambda} \text{ und } \psi(n) = g(n) = \frac{v^n\,P_{x\overline{n}|}}{q_{x+n-1}}.$$

Entsprechend der Lösung (VI) haben wir zunächst

$$\prod_{t=\varkappa}^{t=m-1} \frac{w_{(t)} \pm v_{(t)}}{w_{(t)}} = \prod_{t=\varkappa}^{t=m-1} (1 - q_{x+t}) = \frac{l_{x+m}}{l_{x+\varkappa}}$$

zu berechnen und erhalten darauf als Zwischenlösung

$$\psi_{(\varkappa)} = \psi_{(n)} \frac{l_{x+n}}{l_{x+\varkappa}} - \frac{1}{l_{x+\varkappa}} \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} l_{x+\lambda}\, \Delta g_{(\lambda)}.$$

Diese hat den gleichen Nachteil wie die entsprechende Lösung der retrospektiven Gleichung. Um die endgültige Lösung zu erhalten, wenden wir dieses Mal die Gleichung

$$u_{(n)}\, v_{(n)} - u_{(\varkappa)}\, v_{(\varkappa)} = \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} u_{(\lambda)}\, \Delta v_{(\lambda)} + \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} \Delta u_{(\lambda)}\, v_{(\lambda+1)}$$

in der Weise an, daß wir

$$\sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} l_{x+\lambda}\, \Delta g_{(\lambda)} = l_{x+n}\, g_{(n)} - l_{x+\varkappa}\, g_{(\varkappa)} - \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} \Delta l_{x+\lambda}\, g_{(\lambda+1)}$$

setzen. Es ergibt sich so

$$\frac{v^{\varkappa}\, {}_{\varkappa}Q_x}{q_{x+\varkappa-1}} = \psi_{(n)} \frac{l_{x+n}}{l_{x+\varkappa}} - g_{(n)} \frac{l_{x+n}}{l_{x+\varkappa}} + g_{(\varkappa)} + \frac{1}{l_{x+\varkappa}} \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} \Delta l_{x+\lambda}\, g_{(\lambda+1)}$$

oder

$$\frac{v^{\varkappa}\, {}_{\varkappa}Q_x}{q_{x+\varkappa-1}} = \left(\frac{v^{\varkappa} P_{\overline{xn}|}}{q_{x+\varkappa-1}} - v^{\varkappa+1} S_{\varkappa} + v^{n+1} S_n\right) - \\ - \frac{1}{l_{x+\varkappa}} \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} l_{x+\lambda}\, q_{x+\lambda} \left(\frac{v^{\lambda+1} P_{\overline{xn}|}}{q_{x+\lambda}} - v^{\lambda+2} S_{\lambda+1} + v^{n+1} S_n\right).$$

Aus dieser Gleichung findet man aber

$$\begin{aligned} {}_{\varkappa}Q_x &= P_{\overline{xn}|} - v\, q_{x+\varkappa-1}\, S_{\varkappa} + v\, q_{x+\varkappa-1}\, v^{n-\varkappa} S_n - \\ &- v\, q_{x+\varkappa-1} \frac{1}{l_{x+\varkappa}} \sum_{\lambda=\varkappa}^{\lambda=n-1} l_{x+\lambda}\, v^{\lambda-\varkappa} \left(P_{\overline{xn}|} - v\, q_{x+\lambda} S_{\lambda+1} + q_{x+\lambda} v^{n-\lambda} S_n\right) = \\ &= P_{\overline{xn}|} - v\, q_{x+\varkappa-1}\, S_{\varkappa} + v\, q_{x+\varkappa-1}\, v^{n-\varkappa} S_n - \\ &- v\, q_{x+\varkappa-1} \left(P_{\overline{xn}|}\, a_{x+\varkappa\, \overline{n-\varkappa}|} - /_{n-\varkappa}A_{x+\varkappa} + \frac{l_{x+\varkappa} - l_{x+n}}{l_{x+\varkappa}}\, v^{n-\varkappa} S_n\right) = \\ &= P_{\overline{xn}|} - v\, q_{x+\varkappa-1}\, S_{\varkappa} + v\, q_{x+\varkappa-1}\, v^{n-\varkappa} S_n - \\ &- v\, q_{x+\varkappa-1} \left(P_{\overline{xn}|}\, a_{x+\varkappa\, \overline{n-\varkappa}|} - A_{x+\varkappa\, \overline{n-\varkappa}|}\right) - v\, q_{x+\varkappa-1}\, v^{n-\varkappa} S_n = \\ &= P_{\overline{xn}|} - v\, q_{x+\varkappa-1} \left(S_{\varkappa} - {}_{\varkappa}V_x\right) = P_{\overline{xn}|} - {}_{\varkappa}\Pi_x, \end{aligned}$$

mithin die gesuchte Lösung. Rein formal könnte man bei diesen beiden Beispielen auch eine variable Prämie annehmen, keinesfalls aber abgekürzte Prämienzahlung. Bei reinen Risikoversicherungen von mehrjähriger Dauer, die allerdings nicht in den Kreis der Betrachtung gezogen wurden, wird sogar bei gleichbleibender Jahresprämie die vorstende Gleichung etwa während der zweiten Hälfte der Versicherungsdauer nicht mehr erfüllt.

Erwähnte Literatur.

1. Hans Koeppler, Die Formel des Herrn Prof. Loewy zur Darstellung von Integralgleichungen als Lösungsformel für Integralgleichungen der Lebensversicherung. Aktuárské vědy, ročník VI, 1936—37, číslo 4.

2. D. Seliwanoff, Lehrbuch der Differenzenrechnung, Leipzig 1904.

3. a) H. Koeppler, Die Anwendung der partiellen Summation auf Summengleichungen der Prämienreserve, Het Verzekerings-Archief, 's-Gravenhage 1937, Deel XVIII, Afl. I.

b) H. Koeppler, Risoluzione di un'equazioni della riserva matematica retrospettiva, Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari, Roma 1937, n. 3.

c) H. Koeppler, Risoluzione di un'equazioni della riserva matematica, prospettiva Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari, Roma 1937 n. 4.

d) Eine weitere Arbeit wartet des Abdrucks in den Blättern für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete.

4. M. Jacob, Sulle equazioni del premio di risparmio, Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari, Roma 1937, n. 2.

5. Hans Koeppler, Zwei versicherungsmathematische Integralgleichungen, Aktuárské vědy, ročník VI, 1936—37, číslo 3.

LITERATURA.

Soukromé pojištění životní do roku 1937. Tentokrát publikoval Státní úřad statistický výsledky svého šetření o soukromých pojišťovnách za rok 1937 již v srpnu letošního roku. Svou pohotovost tudíž SÚS. nejen dodržuje, ale ještě zlepšuje. Rozsah šetření jest v podstatě týž jako v letech předchozích; je tu jen místy malé prohloubení.

O výsledcích statistického šetření o soukromých pojišťovnách tu již bylo několikráte referováno a budeme-li v následujícím podávat zprávu o roku 1937, připojíme i data za rok 1936. Při tom úhrnné tabulky, které budou dále uvedeny, zachovávají formu, které tu již dříve bylo užito, aby bylo umožněno srovnání s lety minulými.

Tabulka č. 1, která navazuje na tabulku uvedenou na 92. str. V. roč. A. V., podává přehled o úhrnu přijatých prémií. Jest patrno, že domácí pojišťovny krisi, jejíž nejhlubší bod byl v roce 1935, již překonaly a svým příjmem na pojistném v roce 1937 (457 milionů) dostaly se na hladinu roku 1933; při tom ve statistikách za rok 1937 není zahrnuta pojišťovna Star. U cizozemských pojišťoven chybí údaje o pojišťovně Fénix od roku 1935; také u nich však byl rok 1935 rokem nejnižšího příjmu na pojistném i ve srovnání s předchozími lety, nezahrnujeme-li v nich příjem na pojistném, kterého dosáhla pojišťovna Fénix a zajímavo jest, že v roce 1937 nedosáhly již toho příjmu jako v roce 1936.

Přehled vývoje kapitálového pojištění — úhrn pojištěných kapitálů v mil. Kč — je patrný z tabulky č. 2, která navazuje na tabulku z 93. str. V. roč. A. V. Vzestup stavu pojištěných kapitálů jest zřejmý až do počátku roku 1933, pak nastává zlom takový, že počátkem roku 1934 jest již stav pojištěných kapitálů nižší, než byl počátkem roku 1933. Údaje za pojišťovnu Star a Fénix od roku 1935 nejsou do přehledu zahrnuty. Sledujeme-li však