F. Insolera

Au sujet de l'âge limite

Aktuárské vědy, Vol. 7 (1938), No. 2, 49–55

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144686

Au sujet de l'âge limite.

Par *F. Insolera* (Université de Turin).

1. Pendant ces dernières années, une considérable littérature s'est développée à propos de la notion théorique de l'âge limite et des méthodes pratiques de son évaluation approximative.

D'ailleurs, on ne peut affirmer que l'un ou l'autre point de vue ait, désormais, remporté la faveur des actuaires, de sorte que l'on puisse considérer les idées au sujet tout à fait définitives. Par conséquent, il ne sera pas mal à propos d'en parler encore ici.

Du reste, dans cet exposé je me propose uniquement de mettre en évidence que tout ce que Gumbel m'attribue, à ce propos, dans son article „L'âge limite“, paru en „Aktuàrské vědy“, 1936, n. 1, est tout à fait arbitraire. Gumbel, dans cet article, repète à la lettre ce qu'il affirmait en 1934[1]), c'est-à-dire: „En laissant de côté la notion de l'âge limite fixe, on a proposé des méthodes artificielles pour la détermination d'un âge que l'on peut accepter comme limite. Insolera a proposé de couper quelque part la loi de survie et de définir l'âge correspondant par la condition que l'intensité de mortalité y ait la valeur 1. Pour appliquer cette méthode, Insolera procède encore à une modification de la formule de Gompertz-Makeham, ce qui conduit à des complications numériques“.

Tout d'abord, que veut signifier l'expression „méthodes artificielles“? Seraient-elles naturelles les méthodes fondées sur un supposé comportement asymptotique de la mortalité ou les méthodes des quelles ressort l'existence d'un individu mythique et trascendental qui ait la possibilité de surpasser systématiquement l'âge limite? A mon avis, toute méthode fondée sur des hypothèses renferme des éléments naturels et artificieux; et tiendra, dans une certaine mesure, des uns ou des autres, selon la plus ou moins grande vraisemblence ou véracité des hypothèses sur lesquelles elle se base.

Après, pour ce qui me concerne, aux assertions de Gumbel j'avais opposé, par lettre, dès le janvier 1935, quelques remarques:

---

[1]) Cfr: E. J. Gumbel, L'età limite, Giornale Istituto Attuari Italiani, 1934, n. 1 (extrait, p. 5).

Gumbel, en septembre 1935, répondait à mes remarques, qu'il était tout à fait d'accord avec ma lettre. Il reconnaît que nous formulons une seule hypothèse pour notre définition d'âge limite.

Ce n'est pas, donc, sans surprise que je retrouve, en 1936, traduit en français, son ècrit italien de 1934.

2. Pour éviter tout malentendu et pour amour d'exactitude scientifique, les lecteurs de cette Revue permettrons que, sur ce problème, je leur expose moi même, mon opinion, quelle que soit sa valeur.

L'hypothèse nécessaire que j'avais avancée pour définir l'âge limite, est la suivante:

„Pour un âge de ω années et seulement pour cet âge, si ε est une quantité positive aussi petite que l'on veut, il y a un intervalle $(\omega - \Delta\omega, \omega)$, avec $\Delta\omega > \varepsilon$, dans lequel la différence entre le nombre des survivants et des morts est plus petite que ε.

Cet hypothèse vaut, en formule, la double inégalité suivante:

$$0 < \int_{\omega-\Delta\omega}^{\omega} l(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\omega-\Delta\omega}^{\omega} l(x)\,.\,\mu(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon \tag{1}$$

où les symboles ont leurs usuelles significations.

De l'inégalité (1), puisque $l(x)$ ne change pas de signe dans l'intervalle, par le théorème de la valeur moyenne, l'on déduit

$$0 < [1 - \mu(\omega - \vartheta\,\Delta\omega)]\int_{\omega-\Delta\omega}^{\omega} l(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon \text{ avec } 0 \leqq \vartheta \leqq 1. \tag{1'}$$

D'ailleurs, si ω représente l'âge limite, il faut qu'un survivant, au moins, atteigne cet âge: par conséquent, quelle que soit l'expression analytique que l'on veut attribuer à $l(x)$ et quelles que soient les préférences hypothétiques des auteurs sur son comportement pour $x \to \omega$, nous devons avoir en tout cas

$$\int_{\omega-\Delta\omega}^{\omega} l(x)\,\mathrm{d}x \geqq \Delta\omega.$$

Et, alors, si la double inégalité (1') est vraie, la double inégalité

$$0 < 1 - \mu(\omega - \vartheta\,\Delta\omega) < \frac{\varepsilon}{\Delta\omega} \tag{2}$$

sera vraie a fortiori.

Enfin, si $\Delta\omega$ est un infiniment petit, la quantité ε, par hypothèse, doit être un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\Delta\omega$; de sorte que, quand $\Delta\omega \to 0$, de la double inégalité (2) l'on se réduit à $1 - \mu(\omega) = 0$.

C'est vrai que De Finetti plus tard[2]) observait que le changement de l'unité, choisie comme mesure de temps, aurait entraîné une variation dans la valeur de μ et de ω. Mais ce n'est moins vrai, d'abord, que l'observation n'est pas rigoureuse et, après, que le temps rempli par l'âge limite, aurait demeuré invarié: seulement que sa mesure serait exprimée dans la nouvelle unité de temps.

En effet, au lieu de l'unité-année (ordinairement employée dans les recherches démographiques et actuairielles) considérons une unité-m ans, de sorte que le temps x, exprimé en unité-an, devienne y en unité-m ans, c'est-à-dire que $x = my$. Alors, si $l(x)$ est une fonction invariante du temps, et seulement dans cette hypothèse (qui n'est pas tout à fait pacifique), sa dérivée logarithmique, étant une fonction covariante, changera sa valeur suivant le système de mesure de temps. Si, donc, $l_1(y)$ est la fonction de survie et $\mu_1(y)$ l'intensité de mortalité, exprimés en unité-m ans, lorsque l'on a $l(x) = l_1(y)$ l'on aura aussi

$$\mu(x)\,\mathrm{d}x = \mu_1(y)\,\mathrm{d}y$$

c'est-à-dire

$$\mu_1(x/m) = m\,\mu(x).$$

Mais pour $x = \omega$ il vient

$$\mu(\omega) = 1 \text{ et } y = \omega/m,$$

par conséquent, enfin,

$$\mu_1(\omega/m) = m.$$

Donc, si l'unité de temps est l'année (comme nous avons toujours affirmé ou supposé dans nos travaux), l'âge limite sera évalué par la quantité ω ans qui fasse $\mu(\omega) = 1$; et si nous supposons que l'unité de temps soit, p. ex., le siècle ou bien le jour, l'âge limite sera mesuré par un nombre $\omega/100$ en unité-siècle, ou ω . 365 en unité-jour. Mais évidemment ω ans $= \omega/100$ siècles $= \omega$. 365 jours: donc, et tout cas, le temps rempli par l'âge limite est toujours le même.

L'observation, au dela de la grossière animosité qui a inspiré son auteur, n'a, ainsi, aucune importance au but de la recherche de l'âge limite, fondée sur la définition que nous avons donnée au n . 1 de cet écrit.

3. D'ailleurs, à ce sujet, peut-être, il ne sera pas inutile d'y ajouter quelques autres considérations.

a) Dans tous les textes de Mathématiques des assurances que je connais, la théorie de la mortalité est implicitement ou explicitement fondée sur les bien connus postulats de Bohlmann.[3]) Par l'un d'eux,

[2]) De Finetti, Sul comportamento assintotico della mortalità, Rend. Circolo Matematico di Palermo, T. LVIII, 1934, p. 359 (paru le 15 avril 1935).

[3]) Bohlmann, Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung, Atti IV Congresso Internazionale dei Matematici, vol. III, Roma, 1909, p. 244.

est admise l'existence d'une probabilité $p(x, y)$, fonction continue de x et de y, pour un individu d'âge x d'atteindre ou surpasser l'âge y; par un autre, l'âge limite est défini par la valeur $y = \omega$ telle que soit $p(x, \omega)=0$.

Or, ce postulat serait tout à fait erroné si l'on voulût le référer à la probabilité pour un individu âgé de x d'atteindre l'âge ω, car si cet âge pour un groupe démografique déterminé est le dernier âge possible de la vie, cette probabilité ne peut être nulle. Pour justifier le postulat, il faut se référer seulement à la probabilité de surpasser ω, parce qu'alors, et seulement alors, cette probabilité est nulle. Mais cela signifie que de l'interprétation correcte du postulat de Bohlmann descend une discontinuité en ω.

Cela est tout ce que nous avions déja affirmé à cet égard.[4])

Mais nous n'avons jamais dit que les postulats de Bohlmann sont nécessaires à la construction de la théorie de la mortalité; de plus, nous avons opposé et nous opposons à présent toutes nos réserves contre une semblable construction.[5])

b) Les considérations suivantes donnent une esquisse d'autres bases possibles pour une théorie de la mortalité.

Depuis longtemps l'École actuarielle anglaise a accoutumé les actuaires de tout le monde à considérer le taux instantané de mortalité comme une „force of mortality", au sens biologique du mot: c'est-à-dire comme une force qui serait la synthèse des actions d'affaiblissement de l'organisme humain, déterminées par le temps. Mais personne ne nous a jamais dit sur quelles raisons se base cette admise identité entre la valeur absolue de la dérivée logarithmique de la fonçtion de survie et la valeur de la force biologique de mortalité. Quoique il en soit cette identité nous paraît fort discutable.

En effet, si nous nous référons aux principes de la Mécanique, il faut reconnaitre que le taux instantané de mortalité est tout à fait comparable à une vélocité; et une velocité ne peut pas être confondue avec une force physique telle que l'est la force biologique de mortalité. Ainsi qu' en Économie, depuis I. Fisher,[6]) l'on ne confond plus le capital (état de richesse) avec le revenu (mouvement de richesse).

Du reste, a mon avis la difference entre, la force de mortalité et le taux instantané ressort du fait que, si pour définir l'âge limite l'on considère la force biologique de mortalité, en faisant complète abstraction du

[4]) Insolera, Probabilità e sopravvivenza, Atti Istituto Naz. le Assicurazioni, vol. V, Roma, 1932, p. 165.

[5]) Insolera, A proposito di un ipotetico comportamento assintotico della mortalità, Giornale di Matematica finanziaria, n. 2—3, 1935.

[6]) I. Fisher, The nature of capital and income, Mac-Millan, London 1912.

taux, l'on peut tout à fait négliger toutes ces hypothéses — y comprise la notre du n . 1 — qui autrement seraient nécessaires.[7])

En effet, la considération de l'existence d'une force biologique de mortalité entraîne immédiatement la considération de l'existence d'une force biologique de vitalité: c'est-à-dire d'une force qui est la synthèse des naturelles réactions de conservation que l'organisme humain oppose à l'action délètaire du temps. Et alors, si du contraste entre la force de mortalité et la force de vitalité dérivent les différentes possibilités de vie, il est bien naturel de convenir que, avec le temps, l'une augmentera autant que l'autre diminuera. En particulier: lors de la naissance, la force de mortalité ne peut être nulle, autrement il n'y aurait de mort-nés; à l'âge limite la force de vitalité doit être nulle, autrement il y aurait des survivants au dela du dernier âge.

Ces remarques sont bien simples et tout à fait *naturelles: elles nous* semblent fécondes de considérables illations.

En attendant, si nous pouvons représenter ces forces biologiques de mortalité et de vitalité respectivement par deux fonctions $\varphi(x, t; a_i)$ et $\psi(x, t; a_i)$-où x est l'âge des survivants du groupe, t le temps dans lequel ces survivants sont observés et a_i un système de paramètres selon les caractéristiques démographiques du groupe-pour ce qui précede, devra être,

$$\varphi(0, t; a_i) > 0, \tag{3}$$

$$\psi(\omega, t; a_i) = 0, \tag{4}$$

$$\varphi(x, t; a_i) + \psi(x, t; a_i) = k, \tag{5}$$

en désignant par k une constante positive. Et, puisque rien nous empèche de considérer k comme l'unité de mesure de ces forces, nous pourrons écrire enfin

$$\varphi(x, t; a_i) + \psi(x, t; a_i) = 1. \tag{5'}$$

L'inégalité (3) est justifiée par l'existence des mort-nés.

La relation (4) définit ω comme une fonction implicite de t et des a_i: par conséquent, pour la même valeur de t, l'âge limite ω varie de l'un groupe à l'autre, avec le système des valeurs des a_i; et, pour le même système de paramètres a_i, l'âge ω peut varier avec le temps t.

Par la relation (4), la relation (5') conduit à

$$\varphi(\omega, t; a_i) = 1.$$

Évidemment, ce dernier résultat est tout à fait indépendant de l'hypothèse que nous avions naguère formulée pour obtenir $\mu(\omega) = 1$. Ce résultat suffit, donc, pour nous autoriser à conclure que, en général, il n'y a pas d'identité entre le taux instantané μ et la force de mortalité φ.

Mais continuons: et pour semplifier, laissons la considération du temps t et des paramètres a_i.

[7]) Insolera, Sul tasso istantaneo e la forza di mortalità, Giornale degli economisti e Rivista di Statistica, maggio, 1936.

Soit M_0 le nombre des mort-nés et V_0 le nombre des nés vivants d'un groupe de N nés, de sorte que $M_0 + V_0 = N$. Si, alors, la fonction $M(x)$ représente l'ensemble des morts dans l'intervalle $(0, x)$ et la fonction $V(x)$ l'ensemble des survivants de même âge x, l'on aura aussi

$$M(x) + V(x) = N.$$

Or, puisque la force de mortalité à la naissance s'exprime par les mort-nés du groupe, l'on peut bien la supposer égale ou proportionnelle à la fréquence des mort-nés; et, conséquemment, l'on supposera la force de vitalité égale ou proportionnelle à la frequence des nés vivants du groupe. L'on peut poser, donc:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= M_0/N, \\ \psi(0) &= V_0/N \end{aligned} \tag{6}$$

égalités qui satisfont la relation (5').

De plus; par le principe de permanence de Hankel, des rapports (6) nous pouvons induire

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= M(x)/N, \\ \psi(x) &= V(x)/N, \end{aligned} \tag{7}$$

qui satisfont aussi (5') et pour $x = 0$ se réduisent aux rapports (6). Enfin, si par la différentielle dM il est possible de représenter l'accroissement de l'ensemble des morts dans l'intervalle infiniment petit de x à $x + \mathrm{d}x$, la relation

$$\nu(x) = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} : M(x) \tag{8}$$

peut être définie comme la vélocité d'accroissement de l'ensemble des morts dans l'instant x; et la relation

$$\mu(x) = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} : V(x) \tag{9}$$

comme la vélocité de réduction de l'ensemble des survivants dans le même instant.

Des relations (8) et (9), par les positions (7), on déduit finalement

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \varphi'(x) : \varphi(x), \\ \mu(x) &= -\, V'(x) : V(x) = -\, \psi'(x) : \psi(x). \end{aligned}$$

L'on peut, donc, considérer le taux instantané $\nu(x)$ comme la vélocité d'accroissement de la force de mortalité et le taux instantané $\mu(x)$ comme la vélocité de réduction de la force de vitalité dans l'instant x. L'on parvient ainsi à une distinction entre la force de mortalité et le taux instantané de mortalité qui nous semble bien naturelle et conforme au dictamen de la Mécanique.

Si nous supposons, alors, que φ et ψ soient des forces appliquées aux bras d'un levier, de part et d'autre du point d'appui, à des distances mesurées respectivement par ν et μ, l'identité

$$\varphi(x) \,.\, \nu(x) = \psi(x) \,.\, \mu(x) \tag{10}$$

veut signifier que à chaque instant x il y a une situation d'équilibre entre les deux forces φ et ψ: (10) est, en quelques sortes, l'équation de l'équilibre vital, pour un groupe donné en un temps déterminé.

Enfin, les quelques mots que nous avons dédiés aux forces biologiques de vitalité et de mortalité peuvent suffire, ce me semble, pour y construire là-dessus une théorie de la mortalité, sans recours à nulle autre hypothèse.

Turin, Université, décembre 1936.

A note about premiums of disability benefits in connection with life insurance contract.

Karel Šťastný.

Latterly, the influence of a change of technical basis on all actuarial values, was the object of many treatises. In the branch of disability benefits insurance it is necessary to mention especially Karup's work „Neue Versicherungsformen der Gothaer Lebensversicherungsbank A. G.", the later one written by dr. Urech. „Sur les bases techniques de l'assurance collective" which will both be referred to below and dr. Haldy's very interesting paper „Influence des variations de l'invalidité sur les réserves mathématiques" (Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, vol. 25, 26 and 27), which — in contradistinction to this note — deals with another theme (the influence on reserves) and another method (investigation of the influence of a constant-changing on the analytic expression of probability rates).

The matter of this note will be a supplement to the proof of formulas given by Karup and dr. Urech for disability benefits in life assurance.

Disability assurance is practised only in a few forms by private insurance companies in addition to the ordinary whole life and endowment assurance contracts. The most prevalent form is an exemption from further payment of premiums on a life policy in case of disability, if the insured is also the policy-holder. Other forms are assurance of a life annuity and assurance of a sum, both payable in case of disability. All these three forms of assurances can be considered as an assurance of a life annuity payable in case of disability; in the first case (waiver of premiums) an annuity equal to the yearly premium on the main assurance and in the third one equal to the rent of the assured sum as from the time of disablement until the end of the main contract. (But it is necessary to calculate each of these three forms of assurances by appli-