Über unsymmetrische Kapitalversicherungen, die sich als Linearkombination von einseitigen Überlebenskapitalien darstellen lassen.

Von Dr. *Eugen Lukács* (Wien).

Bekanntlich kann man eine jede symmetrische Kapitalversicherung für verbundene Leben als lineare Funktion von gewissen Grundwerten darstellen. Als Grundwerte wählt man zumeist das System, das aus den Ablebensversicherungen für die einzelnen Personen und aus den Todesfallversicherungen auf den ersten Tod für verbundene Leben besteht. Die konstanten Koeffizienten dieser Darstellung kann man entweder nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten berechnen oder sie direkt den bekannten Z-Formeln entnehmen.[1])

A. Berger hat untersucht[2]) ob diese Basis auch zur Darstellung unsymmetrischer Versicherungswerte verwendbar ist und hat durch seinen „Summensatz" gewisse unsymmetrische Versicherungswerte charakterisiert, die sich linear mit konstanten Koeffizienten durch diese Grundwerte darstellen lassen.

In der vorliegenden Arbeit soll nun das Basissystem erweitert werden und untersucht werden, welche Versicherungswerte lineare Funktionen von einseitigen Überlebenskapitalien sind, wobei die Koeffizienten numerische Konstante sein sollen. Schließlich werden aus dem allgemeinen Resultat Formeln hergeleitet, die Verallgemeinerungen der Z-Formel sind.

I.

Die Gruppe der zu versichernden Personen bezeichnen wir mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wir zeichnen eine Person x_i aus und bilden alle möglichen Gruppen von je $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ Personen denen x_i angehört. Es mögen die $b^i_{jks\ldots}$ irgendwelche numerische Koeffizienten sein, die in den

[1]) Institute of actuaries text book II, Kapitel VII.

[2]) A. Berger: Zur Theorie der Berechnung von Versicherungswerten für mehrere verbundene Leben. Blätter für Versicherungsmathematik, Band 2, Seite 371 ff.

unteren Indizes symmetrisch sein sollen. Wir bilden dann den folgenden Ausdruck

$$A^i = b^i \bar{A}_{x_i} + \sum b^i_j \bar{A}^1_{x_i x_j} + \sum b^i_{jk} \bar{A}^1_{x_i x_j x_k} + \ldots + b^i_{jkl\ldots(n)} \bar{A}^1_{x_i x_j x_k x_l \ldots (n)}. \tag{1}$$

Die Summe im zweiten Term ist über alle möglichen Gruppen von je zwei Personen zu nehmen, die im dritten Term über alle Gruppen von je drei Personen; allgemein ist die Summe im k-ten Term von (1) $[k = 2, 3, 4, \ldots, (n-1)]$ zu nehmen über alle Gruppen von je k Personen denen x_i angehört. Der allgemeinste durch einseitige Überlebensversicherungen darstellbare Versicherungswert ist dann

$$A = \sum_{i=1}^{n} A^i. \tag{2}$$

Wir wollen diesen Versicherungswert betrachten und untersuchen unter welchen Bedingungen und in welcher Höhe Auszahlungen geleistet werden. Zu diesem Zwecke setzen wir voraus, daß die Todesfälle in einer bestimmten Reihenfolge $i_1, i_2, \ldots, i_n$ stattfinden, das heißt daß die Person x_{i_j} als j-te stirbt, $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Wir wollen nun sehen welche Kapitalien in diesem Falle ausbezahlt werden.

Es werden dann folgende Beträge ausgezahlt:

$$\begin{aligned}
&\text{Beim } n\text{-ten Tod} \quad b^{i_n}\\
&\text{Beim } (n-1)\text{-ten Tod} \quad b^{i_{n-1}} + b^{i_{n-1}}_{i_n}\\
&\text{Beim } (n-2)\text{-ten Tod} \quad b^{i_{n-2}} + (b^{i_{n-2}}_{i_{n-1}} + b^{i_{n-2}}_{i_n}) + b^{i_{n-2}}_{i_{n-1} i_n}\\
&\text{Beim } (n-3)\text{-ten Tod} \quad b^{i_{n-3}} + (b^{i_{n-3}}_{i_{n-2}} + b^{i_{n-3}}_{i_{n-1}} + b^{i_{n-3}}_{i_n}) +\\
&\qquad + (b^{i_{n-3}}_{i_{n-2} i_{n-1}} + b^{i_{n-3}}_{i_{n-2} i_n} + b^{i_{n-3}}_{i_{n-1} i_n}) + b^{i_{n-3}}_{i_{n-2} i_{n-1} i_n}
\end{aligned} \tag{3}$$

. . . .

Wir bezeichnen mit

$$C^0_{i_l \ldots i_n} = b^{i_l}, \quad C^1_{i_l \ldots i_n} = \sum_{j=l+1}^{n} b^{i_l}_{i_j}$$

allgemein mit

$$C^j_{i_l i_{l+1} \ldots i_n} = \sum b^{i_l}_{s_1 \ldots s_j} \tag{4}$$

Summiere über alle Kombinationen $(s_1 \ldots s_j)$ aus $(i_{l+1} \ldots i_n)$!

Bei Benützung dieser abgekürzten Schreibweise erhalten wir für die Beträge, die ausgezahlt werden

beim n-ten Todesfall den Ausdruck: $C^0_{i_n}$

beim $(n-1)$-ten Todesfall den Ausdruck: $C^0_{i_{n-1} i_n} + C^1_{i_{n-1} i_n}$

beim $(n-2)$-ten Todesfall den Ausdruck:

$$C^0_{i_{n-2} i_{n-1} i_n} + C^1_{i_{n-2} i_{n-1} i_n} + C^2_{i_{n-2} i_{n-1} i_n}$$

. . . .

Allgemein erhalten wir für den Betrag der beim l-ten Todesfall ausgezahlt wird, wenn x_{i_1} als erster x_{i_2} als zweiter ... x_{i_n} als n-ter stirbt, den Ausdruck

$$S^l_{i_1 i_2 \ldots i_n} = C^0_{i_l \ldots i_n} + C^1_{i_l \ldots i_n} + \ldots + C^{n-l}_{i_l \ldots i_n}. \tag{5}$$

Die Koeffizienten $b^i_{jks\ldots}$ sind in den unteren Indizes symmetrisch, daher ist $C^j_{i_l i_{l+1} \ldots i_n}$ symmetrisch in den Indizes $i_{l+1}, \ldots, i_n$, das sind alle unteren Indizes mit Ausnahme des ersten. Daher ist auch $S^l_{i_1 \ldots i_n}$ in den Indizes $i_{l+1} \ldots i_n$ symmetrisch, $S^l_{i_1 \ldots i_n}$ hängt also nicht von der Reihenfolge der Indizes $i_{l+1} \ldots i_n$ ab sondern nur von deren Gesamtheit. Die Summe $S^l_{i_1 \ldots i_n}$ hängt also davon ab, welche Personen x_{i_l} überleben, nicht aber von der Reihenfolge in der später diese Personen sterben werden. Die Indizes $i_1 \ldots i_{l-1}$ kommen im Aus druck auf der rechten Seite von (5) gar nicht vor. Die Summe $S^l_{i_1 \ldots i_n}$, die bezahlt wird, wenn x_{i_l} als l-ter stirbt, hängt wohl noch davon ab, welche Personen vor x_{i_l} sterben, von der Reihenfolge der Vortodesfälle hängt diese Summe jedoch nicht ab. Wir werden daher statt $S^l_{i_1 \ldots i_n}$ auch $S^l_{i_l \ldots i_n}$ oder ${}_{i_1 \ldots i_l}S^l$ schreiben.

Um die Darstellung eines derartigen allgemeinen Versicherungswertes als Summe von einseitigen Überlebenskapitalien zu erhalten, wollen wir noch die Koeffizienten b aus den Summen S berechnen. Wie früher bedeutet $S^{n-k}_{l, s_1, \ldots s_k}$ die Summe, die ausbezahlt wird, wenn x_l als $(n-k)$-ter stirbt und ihn nur die Personen $x_{s_1}, \ldots, x_{s_k}$ der ursprünglichen Gruppe $x_1, \ldots, x_n$ überleben. So gilt die Gleichung

$$S^{n-k}_{l s_1 \ldots s_k} = \sum_{i=0}^{k} C^i_{l s_1 \ldots s_k} \tag{6}$$

wobei

$$C^j_{l s_1 \ldots s_k} = \sum b^l_{t_1 \ldots t_j}. \tag{7}$$

Summiere über alle Kombinationen $(t_1 \ldots t_j)$ aus $(s_1 \ldots s_k)$!

Wir bilden nun die Summe

$$\mathfrak{S}^i_{l s_1 \ldots s_k} = \sum S^{n-i}_{l t_1 \ldots t_i}.$$

Summiere über alle Kombinationen $(t_1 \ldots t_i)$ aus $(s_1 \ldots s_k)$.

Wir wählen nun irgendwelche j Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_j$ aus den $s_1, s_2, \ldots, s_k$ aus und betrachten den Koeffizienten $b^l_{r_1 r_2 \ldots r_j}$. Dieser Koeffizient kommt einmal vor in $C^j_{l s_1 \ldots s_k}$, daher auch einmal in $S^{n-k}_{l s_1 \ldots s_k}$. Wir wollen nun untersuchen, wie oft $b^l_{r_1 \ldots r_j}$ in $\mathfrak{S}^i_{l s_1 \ldots s_k}$ vorkommt. Um

$\mathfrak{S}^i_{l s_1 \ldots s_k}$ zu bilden, sind aus $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ alle Kombinationen $(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_i)$ i-ter Klasse zu bilden und $\sum S^{n-i}_{l t_1 \ldots t_i}$ zu berechnen. $b^l_{r_1 \ldots r_j}$ kommt daher in $\mathfrak{S}^i_{l s_1 \ldots s_k}$ ebenso oft vor, als es Kombinationen i-ter Klasse $(t_1, t_2, \ldots, t_i)$ aus $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ gibt in denen alle Zahlen $(r_1, r_2, \ldots, r_j)$ vorkommen. Das heißt für $i < j$ kommt $b^l_{r_1 \ldots r_j}$ in $\mathfrak{S}^i_{l s_1 \ldots s_k}$ nicht vor; für $i \geqq j$ kommt $b^l_{r_1 \ldots r_j}$ in $\mathfrak{S}^i_{l s_1 \ldots s_k}$ $\binom{k-j}{i-j}$ mal vor. Wir bilden nun die Summe

$$B = \mathfrak{S}^k_{l s_1 \ldots s_k} - \mathfrak{S}^{k-1}_{l s_1 \ldots s_k} + \mathfrak{S}^{k-2}_{l s_1 \ldots s_k} - \ldots + (-1)^k \mathfrak{S}^0_{l s_1 \ldots s_k}.$$

Für $j < k$ kommt $b^l_{r_1 \ldots r_j}$ in B daher d-mal vor, wobei

$$d = \binom{k-j}{k-j} - \binom{k-j}{k-j-1} + \binom{k-j}{k-j-2} - \ldots + (-1)^{k-j} \binom{k-j}{0} =$$
$$= (1-1)^{k-j} = 0.$$

Es kommt mithin $b^l_{r_1 \ldots r_j}$ in B für $j < k$ nicht vor, für $j = k$ ist $b^l_{r_1 \ldots r_k} = b^l_{s_1 \ldots s_k}$, dieser Koeffizient kommt in $\mathfrak{S}^k_{l s_1 \ldots s_k} = S^{n-k}_{l s_1 \ldots s_k}$ genau einmal, und zwar im Summanden $C^k_{l s_1 \ldots s_k} = b^l_{s_1 \ldots s_k}$ vor.Daher ist

$$b^l_{s_1 \ldots s_k} = \sum_{t=0}^{k} (-1)^t \mathfrak{S}^{k-t}_{l s_1 \ldots s_k}. \tag{8}$$

Im Vorhergehenden haben wir eine Eigenschaft der Versicherungssummen gezeigt, die notwendig bestehen muß, wenn ein Versicherungswert sich als Linearkombination einseitiger Überlebenskapitalien darstellen läßt. Wir wollen nun noch zeigen, daß diese Eigenschaft die erwähnten Versicherungswerte vollkommen charakterisiert.

Es sei $S^{n-k+t}_{l t_1 \ldots t_{k-t}}$ die Summe die bezahlt wird, wenn die Person x_l als $(n-k+t)$-te stirbt und von den Personen $x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_{k-t}}$ überlebt wird. Wir wollen nun voraussetzen, daß $S^{n-k+t}_{l t_1 \ldots t_{k-t}}$ unabhängig ist von der Reihenfolge der Zahlen $t_1 \ldots t_{k-t}$

Bilden wir nun

$$\mathfrak{S}^{k-t}_{l s_1 \ldots s_k} = \sum S^{n-k+t}_{l t_1 \ldots t_{k-t}}. \tag{9}$$

Summiere über alle $(t_1, \ldots, t_{k-t})$ aus $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$!

und

$$b^l_{s_1 \ldots s_k} = \sum_{t=0}^{k} (-1)^t \mathfrak{S}^{k-t}_{l s_1 \ldots s_k} \tag{9'}$$

dann ist $b^l_{s_1 \ldots s_k}$ symmetrisch in $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Es sei nun wie in Formel (1)

$$A^i = b^i \bar{A}_{x_i} + \sum b^i_j \bar{A}^1_{x_i x_j} + \ldots + b^i_{jkl \ldots (n)} \bar{A}^1_{x_i x_j x_k x_l \ldots (n)}.$$

Wir bilden nun $A = \sum_{i=1}^{n} A^i$, dies ist ein durch einseitige Überlebensversicherungen darstellbarer Versicherungswert. Daher sind die Versicherungssummen $T^l_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}}$, die bezahlt werden wenn x_{s_0} als l-ter stirbt und ihn die Personen $x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_{n-l}}$ überleben, mit Hilfe der Formeln (4) und (5) zu berechnen. Es ist also

$$T^l_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}} = C^0_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}} + C^1_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}} + C^2_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}} + \cdots + C^{n-l}_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}}$$

$$C^j_{s_0 \ldots s_{n-l}} = \sum b^{s_0}_{t_1 \ldots t_j}. \tag{10'}$$

Summiere über alle $(t_1, t_2, \ldots, t_j)$ aus $(s_1, \ldots, s_{n-l})$!

Beachten wir Gleichung (9′) so erhalten wir hieraus

$$C^j_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}} = \sum_{t=0}^{j} (-1)^t \sum \mathfrak{S}^{j-t}_{s_0 t_1 \ldots t_j}. \tag{10}$$

Summiere über alle $(t_1, \ldots, t_j)$ aus $(s_1, s_2, \ldots, s_{n-l})$.

Dabei bedeutet

$$\mathfrak{S}^{j-t}_{s_0 t_1 \ldots t_j} = \sum S^{n-j+t}_{s_0 r_1 \ldots r_{j-t}}.$$

Summiere über alle $(r_1, \ldots, r_{j-t})$ aus $(t_1, \ldots, t_j)$.

In der Formel (10) kommen daher folgende Doppelsummen vor:

$$D_{jt} = \sum \mathfrak{S}^{j-t}_{s_0 t_1 \ldots t_j} \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{S}^{j-t}_{s_0 t_1 \ldots t_j} = \sum S^{n-j+t}_{s_0 r_1 \ldots r_{j-t}} \quad \text{ist.} \tag{11}$$

Um diese Summe zu bilden, muß man zunächst aus den $n-l$ Werten $(s_1, s_2, \ldots, s_{n-l})$ auf alle mögliche Arten j Werte $(t_1, \ldots, t_j)$ auswählen. Aus jeder so erhaltenen Gruppe von j Werten sind alle möglichen Kombinationen $(j-t)$-ter Klasse zu bilden. Zu jeder so erhaltenen Indizesgruppe $(r_1, \ldots, r_{j-t})$ gibt es eine Größe $S^{n-j+t}_{s_0 r_1 \ldots r_{j-t}}$, die Summe (11) ist die Summe aller so erhaltenen Werte. Wir sehen also, daß die Summe (11) nur aus Werten $S^{n-j+t}_{s_0 r_1 \ldots r_{j-t}}$ besteht und jeden solchen Wert mindestens einmal enthält. Um die Doppelsumme (11) als einfache Summe von Größen $S^{n-j+t}_{s_0 r_1 \ldots r_{j-t}}$ schreiben zu können, müssen wir untersuchen, wie oft ein jeder dieser Werte in (11) vorkommt. Aus der Bildung der Summe (11) folgt, daß für bestimmte Indizes $(h_1, \ldots, h_{j-t})$ die Größe $S^{n-j+t}_{s_0 h_1 \ldots h_{j-t}}$ in (11) ebenso oft vorkommt als es Kombinationen j-ter Klasse aus $n-l$ Elementen gibt, die $j-t$ feste Werte enthalten, das heißt ein jeder Wert $S^{n-j+t}_{s_0 h_1 \ldots h_{j-t}}$ kommt in (11) $\binom{n-l-j+t}{t}$ mal vor.

Also ist

$$C^j_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}} = \sum_{t=0}^{j} (-1)^t \sum \binom{n-l-j+t}{t} S^{n-j+t}_{s_0 r_1 \ldots r_{j-t}}. \qquad (12)$$

Summiere über alle $(r_1, \ldots, r_{j-t})$ aus $(s_1, \ldots, s_{n-l})$.
Nun ist $\mathfrak{S}^{j-t}_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}} = \sum S^{n-j+t}_{s_0 r_1 \ldots r_{j-t}}$.

Summiere über alle $(r_1, r_2, \ldots, r_{j-t})$ aus $(s_1, s_2, \ldots, s_{n-l})$ also kann man die Gleichung (12) auch schreiben

$$C^j_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}} = \sum_{t=0}^{j} (-1)^t \binom{n-l-j+t}{t} \mathfrak{S}^{j-t}_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}}.$$

Wenn wir dies in (10′) einsetzen, erhalten wir

$$T^l_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}} = \sum_{j=0}^{n-l} \sum_{t=0}^{j} (-1)^t \binom{n-l-j+t}{t} \mathfrak{S}^{j-t}_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}}. \qquad (13)$$

Eine ganz einfache Umordnung der Glieder dieser Summe zeigt, daß

$$T^l_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}} = \sum_{v=0}^{n-l} \left\{ \sum_{t=0}^{n-l-v} (-1)^t \binom{n-l-v}{t} \right\} \mathfrak{S}^v_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}}.$$

Nun ist für $v < n-l$ $\sum_{t=0}^{n-l-v} (-1)^t \binom{n-l-v}{t} = 0$, für $v = n-l$ ist diese Summe 1. Daher ist wie behauptet $T^l_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}} = \mathfrak{S}^{n-l}_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}} = S^l_{s_0 s_1 \ldots s_{n-l}}$. Wir sehen also

I. Wenn ein unsymmetrischer Versicherungswert sich als Linearkombination

$$A = \sum_{i=1}^{n} A^i \qquad (2)$$

wobei

$$A^i = b^i \bar{A}_{x_i} + b^i_j \bar{A}^1_{x_i x_j} + \sum b^i_{jk} \bar{A}^1_{x_i x_j x_k} + \ldots + b^i_{jkl \ldots (n)} \bar{A}^1_{x_i x_j x_k \ldots (n)} \qquad (1)$$

von einseitigen Überlebenskapitalien darstellen läßt, so hängen die Versicherungssummen, die beim Tod einer bestimmten Person ausbezahlt werden, nur davon ab als wievielte die betreffende Person stirbt und welche Personen sie überlebt. Von der Reihenfolge des Ablebens der Vorsterbenden ist diese Versicherungssumme unabhängig. Die Darstellungskoeffizienten lassen sich aus den Versicherungssummen mittels der Gleichungen

$$b^l_{s_1 \ldots s_k} = \sum_{t=0}^{k} (-1)^t \mathfrak{S}^{k-t}_{l s_1 \ldots s_k}, \text{ wobei } \mathfrak{S}^i_{l s_1 \ldots s_k} = \sum S^{n-i}_{l t_1 \ldots t_i} \qquad (8)$$

ist, bestimmen.

Die Summation ist hier zu erstrecken über alle $(t_1, \ldots, t_i)$ aus $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$.

Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung, das heißt

II. Hängen bei einer Versicherungskombination die Beträge, die beim Tod einer bestimmten Person ausbezahlt werden, nur davon ab als wievielte diese Person stirbt und welche Personen sie überlebt, sind also insbesondere auch unabhängig von der Reihenfolge des Ablebens der Vorsterbenden, so ist der betreffende Versicherungswert als Linearkombination von einseitigen Überlebenskapitalien darstellbar.

II.

Aus dem soeben abgeleiteten Satz soll nun zunächst der Berger'sche Summensatz, ferner noch einige spezielle Formeln hergeleitet werden.

Der Summensatz besagt:

Ein symmetrischer Versicherungswert ist dann und nur dann durch die symmetrischen Grundwerte darstellbar, wenn die Summe aller Todesfallzahlungen, die für die Gruppe der jeweils am Leben befindlichen Personen in Zukunft fällig werden, unabhängig ist von der Reihenfolge des Ablebens dieser Personen.

Wir bilden nun diese Summe $\mathfrak{T}^l_{i_l \ldots i_n}$ der in Zukunft fällig werdenden Todesfallzahlungen. Es ist

$$\mathfrak{T}^l_{i_l \ldots i_n} = S^l_{i_l \ldots i_n} + S^{l+1}_{i_{l+1} \ldots i_n} + \ldots + S^n_{i_n}$$

oder wegen (5)

$$\mathfrak{T}^l_{i_l \ldots i_n} = \sum_{t=l}^{n} C^0_{i_t \ldots i_n} + \sum_{t=l}^{n-1} C^1_{i_t \ldots i_n} + \ldots + \sum_{t=l}^{l+1} C^{n-l-1}_{i_t \ldots i_n} + C^{n-l}_{i_l \ldots i_n}.$$

Wenn wir hier für die C den Ausdruck aus Formel (4) einsetzen erhalten wir

$$\mathfrak{T}^l_{i_l \ldots i_n} = (b^{i_l} + b^{i_{l+1}} + \ldots + b^{i_n}) +$$

$$+ (b^{i_l}_{i_{l+1}} + b^{i_l}_{i_{l+2}} + \ldots + b^{i_l}_{i_n} + b^{i_{l+1}}_{i_{l+2}} + \ldots) + \ldots + b^{i_l}_{i_{l+1} \ldots i_n}.$$

Dieser Ausdruck ist im allgemeinen in den Indizes nicht symmetrisch. Wenn aber der betrachtete Versicherungswert nicht nur durch die einseitgen Überlebenskapitalien, sondern schon durch die symmetrischen Grundwerte $\bar{A}_{x_1}, \ldots, \bar{A}_{x_n}, \bar{A}_{x_1 x_2}, \ldots, \bar{A}_{x_{n-1} x_n}, \ldots, A_{x_1 x_2 \ldots x_n^{(n)}}$ darstellbar ist, so sind die Koeffizienten b in **allen** Indizes symmetrisch.

Daher bleibt auch $\mathfrak{T}^l_{i_l\ldots i_n}$ ungeändert bei Vertauschung der Reihenfolge der $i_l \ldots i_n$. Damit ist die erste Hälfte des Summensatzes bewiesen.

Es ist nun noch zu zeigen, daß aus der Symmetrie von $\mathfrak{T}^l_{i_l\ldots i_n}$ die Darstellbarkeit durch die symmetrischen Grundwerte folgt.

Nun ist $\mathfrak{T}^l_{i_l\ldots i_n} = S^l_{i_l\ldots i_n} + S^{l+1}_{i_{l+1}\ldots i_n} + \ldots + S^n_{i_n}$ also ist

$$S^l_{i_l\ldots i_n} = \mathfrak{T}^l_{i_l\ldots i_n} - \mathfrak{T}^{l+1}_{i_{l+1}\ldots i_n} \tag{14}$$

für $l > n$ und

$$S^n_{i_l} = \mathfrak{T}^n_{i_l}. \tag{14a}$$

Aus der Symmetrie der Größen $\mathfrak{T}$ sehen wir, daß die Größen $S^l_{i_l\ldots i_n}$ symmetrisch sind in den Indizes $i_{l+1} \ldots i_n$, das heißt, daß der betrachtete Versicherungswert (wegen Satz I) durch einseitige Überlebensversicherungen darstellbar ist. Die Darstellungskoeffizienten sind nach Formel (8) zu berechnen, also $b^l_{s_1\ldots s_k} = \sum(-1)^t\, \mathfrak{S}^{k-t}_{l\,s_1\ldots s_k}$. Dabei bedeutet für $t < k$:

$$\mathfrak{S}^{k-t}_{l\,s_1\ldots s_k} = \sum S^{n+t-k}_{l\,r_1\ldots r_{k-t}} = \sum \mathfrak{T}^{n-k+t}_{l\,r_1\ldots r_{k-t}} - \sum \mathfrak{T}^{n-k+t+1}_{r_1\ldots r_{k-t}}.$$

Die Summation ist hier und in den folgenden Formeln zu nehmen über alle $(r_1, r_2, \ldots, r_{k-t})$ aus $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$.

Für $t = k$ wird entsprechend Formel (14a) $\mathfrak{S}^0_{l\,s_1\ldots s_k} = \mathfrak{T}^n_l$.

Wenn wir dies beachten, so wird

$$b^l_{s_1\ldots s_k} = \sum \left\{ \sum_{t=0}^{k} (-1)^t\, \mathfrak{T}^{n-k+t}_{l\,r_1\ldots r_{k-t}} - \sum_{t=0}^{k-1} (-1)^t\, \mathfrak{T}^{n-k+t+1}_{r_1\ldots r_{k-t}} \right\}. \tag{15}$$

Wenn wir in der ersten Summe des Klammerausdrucks den Summationsindex ändern und so beide Summen zusammenfassen, erhalten wir

$$b^t_{s_1\ldots s_k} = \sum \left\{ \mathfrak{T}^{n-k}_{l\,r_1\ldots r_k} - \sum_{t=0}^{k-1} (-1)^t \left[\mathfrak{T}^{n-k+t+1}_{l\,r_1\ldots r_{k-t-1}} + \mathfrak{T}^{n-k+t+1}_{r_1\ldots r_{k-t}} \right] \right\}. \tag{16}$$

Vertauschen wir hier die Reihenfolge der Summationen so wird hieraus

$$b^l_{s_1\ldots s_k} = \mathfrak{T}^{n-k}_{l\,s_1\ldots s_k} - \sum_{t=0}^{k-1} (-1)^t\, H^t_{l\,s_1\ldots k}. \tag{17}$$

Dabei bedeutet

$$H^t_{l\,s_1\ldots s_k} = \sum \mathfrak{T}^{n-k+t+1}_{l\,r_1\ldots r_{k-t-1}} + \sum \mathfrak{T}^{n-k+t+1}_{r_1\ldots r_{k-t}}.$$

Zu summieren ist im ersten Summanden über alle $(r_1, \ldots, r_{k-t-1})$ im zweiten über alle $(r_1, \ldots, r_{k-t})$ aus $(s_1, \ldots, s_k)$.

Ausführlicher geschrieben ist

$$\begin{aligned}H^t_{l\,s_1\ldots s_k} = \sum \mathfrak{T}^{n-k+t+1}_{l\,s_1 r_2\ldots r_{k-t-1}} + \sum \mathfrak{T}^{n-k+t+1}_{l\,r_1 r_2\ldots r_{k-t-1}} + \\ + \sum \mathfrak{T}^{n-k+t+1}_{r_1\ldots r_{k-t-1} s_1} + \sum \mathfrak{T}^{n-k+t+1}_{r_1\ldots r_{k-t}}.\end{aligned} \tag{17a}$$

In dieser Formel ist die erste Summe zu nehmen über alle $(r_2, \ldots, r_{k-t-1})$ die zweite und die dritte über alle $(r_1, r_2, \ldots, r_{k-t-1})$ die vierte über alle $(r_1, r_2, \ldots, r_{k-t})$ aus $(s_2, s_3, \ldots, s_k)$.

Formel (17) und (17a) zeigen, daß wegen der Symmetrie der Größen $\mathfrak{T}$ auch $b^l_{s_1 s_2\ldots s_k} = b^{s_1}_{l\,s_2\ldots s_k}$ ist, aus der früher gezeigten Symmetrie der $b^l_{s_1 s_2\ldots s_k}$ in den unteren Indizes folgt aber, daßdie Koeffizienten b in allen Indizes symmetrisch sind, der betrachtete Versicherungswert also durch die symmetrischen Grundwerte darstellbar ist. Damit ist auch die zweite Hälfte des Summensatzes gezeigt.

Es sollen nun noch einige Formeln abgeleitet werden die aus Satz I und II folgen.

Wir betrachten eine Versicherung bei der das Kapital 1 gezahlt wird, wenn eine bestimmte Person x_l der Gruppe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als l-te stirbt und vor ihr $x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}$ bereits in beliebiger Reihenfolge gestorben sind. Diesen Versicherungswert bezeichnen wir mit $\bar{A}_{\underbrace{x_1 x_2\ldots x_{l-1}}_{1,2,\ldots l-1}\overset{l}{x_l}\ldots x_n}$. Um ihn zu berechnen müssen wir in (8) $S^l_{l,l+1,\ldots n} = 1$ setzen alle anderen S verschwinden. Einfache Überlegungen lehren uns dann, daß $\mathfrak{S}^{n-l}_{l,l+1\ldots n,s_1\ldots s_k} = 1$ ist, während für $j \neq n - l$ oder für $h \neq l$ $\mathfrak{S}^j_{h s_1\ldots s_k} = 0$ ist. Ebenso ist auch $\mathfrak{S}^{n-l}_{l\,s_1\ldots s_k} = 0$ wenn unter den Indizes $s_1, s_2, \ldots, s_k$ die Zahlen $l + 1, l + 2, \ldots, n$ nicht alle vorkommen. Wenn wir dies beachten, folgt aus Gleichung (8) $b^l_{l+1,\ldots n,s_1\ldots s_k} = (-1)^k$ für beliebige Indizes $s_1, s_2, \ldots, s_k$, während alle anderen Koeffizienten verschwinden.

Bezeichnen wir mit $Z^0_{l,\,l+1\ldots n} = \sum \bar{A}^{\,1}_{x_l\ldots x_n}$ allgemein mit

$$Z^i_{l,\,l+1,\ldots n} = \sum \bar{A}^{1}_{x_l\ldots x_n s_1\ldots s_i}.$$

Summiere über alle $(s_1, s_2, \ldots, s_i)$ aus $(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1})$! so wird

$$\bar{A}_{\underbrace{x_1 x_2\ldots x_{l+1}}_{1,2,\ldots l-1}\overset{l}{x_l}\ldots x_n} = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i Z^i_{l,\,l+1\ldots n}. \tag{18}$$

Für $l=2$ ist dies die bekannte Formel: $\bar{A}_{\underset{1}{x_1}\overset{2}{x_2}\ldots x_n} = \bar{A}^1_{x_2\ldots x_n} - \bar{A}_{x_1 \overset{1}{x_2}\ldots x_n}$.

Wir wählen nun von den $(n - 1)$ Indizes $x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n$ auf alle möglichen Arten $l - 1$ Indizes $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{l-1}}$ aus und bilden nach Formel (18) die Ausdrücke

$$\underbrace{\bar{A}_{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_{l-1}}}}_{1,2,\ldots l-1}, \overset{l}{x_l}\, x_{i_{l+1}} \ldots x_{i_n}$$

Summieren wir alle so erhaltenen Gleichungen, so erhalten wir wegen

$$\sum Z^i_{l,\,l+1\ldots n} = \binom{n-l+i}{i} Z_l^{n-\ +i}$$

$$\bar{A}_{x_1 x_2 \ldots \overset{l}{x_l} \ldots x_n} = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \binom{n-l+i}{i} Z_l^{n-l+i}.^{3)} \qquad (19)$$

Bilden wir alle Gleichungen, die wir erhalten, wenn wir der Reihe nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit x_l vertauschen und addieren wir diese Gleichungen, so erhalten wir

$$A_{\frac{n-l}{x_1 \ldots x_n}} = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \binom{n-l+i}{i} Z^{n-l+i+1}. \qquad (20)$$

Dabei bezeichnen wir mit $Z^{l+1} = \sum_{k=1}^{n} Z_k^l$. Die Formel (20) ist die bekannte Z-Formel.

Les centenaires.

par *E. J. Gumbel,* Université de Lyon.

Les observations portant sur les âges élevés sont nécessairement rares, donc insuffisantes pour les calculs compliqués que demande la construction des tables de mortalité. Voila pourquoi les propriétés asymptotiques des fonctions biométriques sont encore objets de controverses. On prétend même assez souvent que ces observations sont tout à fait irrégulières. Le but de cet article est de prouver qu'au contraire elles suivent bien les règles du calcul des probabilités pourvu qu'on prenne une série d'années suffisamment longue.

Considérons les centenaires, c'est-à-dire les personnes décédése après avoir atteint 100 ans. Le tableau I contient, pour la Suisse et pour chaque année de 1879 à 1930, le nombre n des centenaires. Ces valeurs ont été mises à ma disposition par le Bureau Fédéral de Statistique.[1])

---

[3]) Eine Formel für die Sterbenswahrscheinlichkeiten, die der Gleichung (19) entspricht, findet man bei Vajda: Über Wahrscheinlichkeiten in der Theorie der Versicherung verbundener Leben. (Assekuranz Jahrbuch, Bd. 54, Seite 43.)

[1]) Je profite de cette occasion pour le remercier.