Jiří Seitz

Une remarque aux inégalités

Aktuárské vědy, Vol. 6 (1936), No. 4, 167–171

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144672`

$$3m_1^2 m_2 = 2n_1 (m_1 + n_1)(m_2 + n_2) + n_2 (m_1 + n_1)^2$$
$$= 3n_1^2 n_2 + 2n_1 n_2 (m_1 + m_2) + 2n_1^2 m_2 + $$
$$+ 2n_1 m_1 m_2 + n_2 m_1^2$$

en repassant aux moments et semi-invariants

$$3m_{2|1} = 3n_{2|1} + 2n_{1|1}(m_{1|0} + m_{0|1}) + 2n_{2|0} \cdot m_{0|1} + 2n_{1|0} m_{1|1} + n_{0|1} m_{2|0}$$

et une formule symétrique pour $n_{1|2}$.

Il est ainsi possible d'effectuer le calcul progressif des semi-invariants.

Une remarque aux inégalités.

George Seitz.

Dans les mathématiques d'assurance et dans la statistique, il est parfois très utile d'évaluer quelques fonctions de base, comme par ex. les fonctions biométriques, les valeurs actuarielles, etc. On doit donc trouver des inégalités qui sous certaines conditions répondent à ces fonctions. Pour y arriver, nous utilisons des inégalités qui nous sont bien connues de la théorie de mathémathique et que nous appliquons à ces fonctions. Très souvent, nous pouvons déduire déjà, sous des suppositions, parfois insignifiantes, des relations qui nous permettent de nous faire, au moins partiellement, une idée du développement de la fonction en question. Cependant, on doit remarquer que les résultats ainsi obtenus sont des évaluations assez grossières.

Dans notre étude nous avons l'intention de traiter, parmi le grand nombre des inégalités qui ont trouvé une application dans les mathématiques d'assurance et dans les statistiques, seulement ces de Tchebytchef et Schwarz.

Nous allons déduire une inégalité, qui contient ces de Schwarz et Tchebytchef comme cas spéciaux.

Nous avons donné une matrice en u lignes et n colonnes (a_{ik}):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{u1} & a_{u2} & \dots & a_{un} \end{pmatrix}$$

et en outre nous avons donné 4 séries comprennant n chiffres

$$x_1\, x_2 \dots x_n$$
$$y_1\, y_2 \dots y_n$$
$$z_1\, z_2 \dots z_n$$
$$u_1\, u_2 \dots u_n;$$

si nous formons ensuite la sommation suivante de trois matrices

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{u1} & a_{u2} & \dots & a_{un} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & u_1 & 0 & \dots & 0 \\ z_2 & u_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ z_u & u_u & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

il en suit

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\mu,\nu,\varrho,\sigma} \begin{vmatrix} x_\mu & x_\nu \\ y_\mu & y_\nu \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{\varrho\mu} & a_{\varrho\nu} \\ a_{\sigma\mu} & a_{\sigma\nu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_\varrho & u_\varrho \\ z_\sigma & u_\sigma \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} \sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, z_k, & \sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, u_k \\ \sum_{i,k} a_{ik}\, y_i\, z_k, & \sum_{i,k} a_{ik}\, y_i\, u_k \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Il est à remarquer que les indices i, k acceptent les valeurs allant de 1 jusqu'à u, indépendamment l'un de l'autre, tandis que les indices $\mu, \nu, \varrho, \sigma$ parcourent toutes les valeurs de 1 jusqu'à n de sorte qu'il est toujours en valeur

$$\mu < \nu, \ \varrho < \sigma.$$

Si, à présent, pour tous les couples des chiffres $\mu, \nu, \mu < \nu$ et également pour les couples des chiffres ϱ, σ $(\varrho < \sigma)$ sont remplies les inégalités:

$$\begin{vmatrix} x_\mu & x_\nu \\ y_\mu & y_\nu \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} z_\varrho & u_\varrho \\ z_\sigma & u_\sigma \end{vmatrix} \geqq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{\varrho\mu}, & a_{\varrho,\nu} \\ a_{\sigma\mu}, & a_{\sigma,\nu} \end{vmatrix} \geqq 0, \tag{3}$$

alors nous avons d'après (2)

$$\frac{\sum_{ik} a_{ik} x_i z_k}{\sum_{ik} a_{ik} x_i u_k} \geqq \frac{\sum_{ik} a_{ik} y_i z_k}{\sum_{iz} a_{ik} y_i u_k}. \tag{4}$$

Nous allons actuellement fixer trois cas spéciaux de cette inégalité:

a) Si nous mettons $x_i = z_i$ et $y_i = u_i$ pour $i = 1, 2, 3, \dots, n$ et si (a_{ik}) est une matrice positive ou bien négative, d'une forme définitivement quadratique, alors la matrice (a_{ik}) peut être écrite également dans la forme de la somme de trois matrices:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \pm 1, & 0, & \dots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{u1} & c_{u2} & \dots & c_{un} \end{pmatrix}$$

où la matrice au milieu est une matrice diagonale et où nous avons toujours, ou bien le signe positif (+), ou bien negatif (—), suivant le cas, si la forme quadratique est définitivement positive ou bien définitivement négative.

Nous admettons en outre

$$X_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\, x_k, \quad Y_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\, y_k$$
$$i = 1, 2, \ldots u.$$

Sous cette supposition l'équation (1) peut être écrite de la manière suivante:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \\ Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & 0 & \ldots & 0 \\ X_2 & Y_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ X_u & Y_u & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Il en ressort que

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \sum_{i,\,k} \begin{vmatrix} X_i & X_k \\ Y_i & Y_k \end{vmatrix}^2 \geqq 0, \qquad \begin{matrix} i, k = 1, 2, \ldots, n \\ i < k, \end{matrix}$$

où l'égalité entre seulement en cas, si les séries X et Y, et par conséquent également x et y, sont proportionnelles. En applicant l'équation (2) nous trouvons directement:

$$\sum_{i,\,k} a_{ik} x_i x_k \sum_{i,\,k} a_{ik} y_i y_k \geqq \Big(\sum_{i,\,k} a_{ik} x_i y_k\Big)^2$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, n.$$[1]

Cette inégalité est notifiée dans le livre Hardy-Littlewood-Pólya: Inequalities (page 33).

b) Si nous mettons $y_i = 1$, $u_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ et $a_{ik} = \delta_i^k$ alors nous pouvons nous restreindre dans les conditions (3) seulement aux cas, où il y a $\mu = \varrho$, $\nu = \sigma$ ce qui nous donne

$$(x_\mu - x_\nu)\,(z_\mu - z_\nu) \geqq 0, \quad \mu < \nu, \quad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$$

la deuxième condition est déjà remplie par le choix de la matrice (a_{ik}).

---

[1]) Il est à remarquer qu'il n'est pas nécessaire de considérer les conditions (3). Si nous mettons dans cette inégalité $a_{ik} = \delta_i^k$, alors nous allons obtenir l'inégalité de Schwarz.

Dans ce cas le total des matrices (1) est donné par

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \Sigma(x_\mu - x_\nu)(z_\mu - z_\nu) \geqq 0, \quad \mu < \nu.$$

Si nous appliquons de nouveau l'égalité (2), alors nous arrivons à

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{\mu=1}^{n} x_\mu z_\mu & \sum\limits_{1}^{n} z_\mu \\ \sum\limits_{\mu=1}^{n} x_\mu & n \end{vmatrix} \geqq 0$$

d'où il ressort

$$\mathfrak{A}(x)\,\mathfrak{A}(z) \leqq \mathfrak{A}(x\,.\,z)$$

où $\mathfrak{A}$ signifie la moyenne arithmétique. Il en ressort de nouveau que

$$\mathfrak{M}_r(x)\,.\,\mathfrak{M}_r(z) \leqq \mathfrak{M}(xz)\,^{2})$$

$$\mathfrak{M}_r(x) = \left[\frac{x_1{}^r + x_2{}^r + \ldots + x_n{}^r}{n}\right]^{\frac{1}{r}}$$

c) Considérons actuellement, dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ deux fonctions données, qui n'augmentent pas $\Phi(t)$, $f(t)$ et une fonction dans cet intervalle toujours positive ou bien toujours negative $g(t)$. Mettons des chiffres $k_1 < k_2 \ldots < k_n$ et où $k_1 = a$, $k_n = b$. Admettons en outre que

$$\begin{cases} a_{ik} = 0 \\ a_{ii} = g(k_i) \end{cases} \qquad \text{pour } i \neq k,$$

$$\begin{aligned} x_i &= \Phi(k_i) \\ z_i &= f(k_i) \\ y_i &= 1 \\ u_i &= 1. \end{aligned} \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

Par suite de la supposition sur les fonctions $\Phi(t)$, $f(t)$ et $g(t)$ les conditions (3) sont satisfaites et l'inégalité (4) nous donne en suite l'inégalité

$$\frac{\sum\limits_{a}^{b} \Phi(t)\, f(t)\, g(t)}{\sum\limits_{a}^{b} \Phi(t)\, g(t)} \geqq \frac{\sum\limits_{a}^{b} f(t)\, g(t)}{\sum\limits_{a}^{b} g(t)}$$

où l'on doit faire la sommation pour toutes les valeurs t en acceptant les valeurs $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Ainsi nous sommes arrivés à l'inégalité de Tchebycheff.

A l'inégalité (4) nous pouvons ajouter une inégalité analogue intégrale. Supposons que $a(s, t)$ est une fonction de deux variables et

---

²) Hardy Littlewood, page 43.

intégrable dans la sphère Ω limitée par une simple courbe fermée. Cette sphère soit entièrement contenue dans le rectangle limité par les droites $s = s_0$, $s = s_\omega$, $t = t_0$, $t = t_\omega$. Supposons en outre que les fonctions $x(s)$ et $y(s)$ sont intégrables dans l'intervalle $\langle s_0, s_\omega\rangle$ et les fonctions $z(t)$ et $u(t)$ intégrables dans l'intervalle $\langle t_0, t_\omega\rangle$. Si, dans la section considérée, nous avons en vigueur

$$\begin{vmatrix} x(s_1), & x(s_2) \\ y(s_1), & y(s_2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z(t_1), & z(t_2) \\ u(t_1), & u(t_2) \end{vmatrix} \geqq 0, \quad \begin{vmatrix} a(s_1, t_1), & a(s_1, t_2) \\ a(s_2, t_1), & a(s_2, t_2) \end{vmatrix} \geqq 0$$

pour des $s_1 < s_2$, $t_1 < t_2$ quelconques, alors nous obtenons facilement de (4) l'inégalité integrale

$$\frac{\iint\limits_\Omega a(s,t)\, x(s)\, z(t)\, ds\, dt}{\iint\limits_\Omega a(s,t)\, x(s)\, u(t)\, ds\, dt} \geqq \frac{\iint\limits_\Omega a(s,t)\, y(s)\, z(t)\, ds\, dt}{\iint\limits_\Omega a(s,t)\, y(s)\, u(t)\, ds\, dt}.$$

Il est bien facile de répondre à la deuxième condition énumérée dans (3'), alors par exemple pour la fonction $a(s, t) = \varphi(s)^{\psi(t)}$ où $\varphi(s)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions ne diminuant point. Car de la rélation

$$\left[\frac{\varphi(s_1)}{\varphi(s_2)}\right]^{\psi(t_1)} \geqq \left[\frac{\varphi(s_1)}{\varphi(s_2)}\right]^{\psi(t_2)} \quad \begin{pmatrix} s_1 < s_2 \\ t_1 < t_2 \end{pmatrix}$$

il y a que

$$\begin{vmatrix} \varphi(s_1)^{\psi(t_1)}; & \varphi(s_1)^{\psi(t_2)} \\ \varphi(s_2)^{\psi(t_1)}, & \varphi(s_2)^{\psi(t_2)} \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Die Formel des Herrn Prof. Loewy zur Darstellung von Integralgleichungen als Lösungsformel für Integralgleichungen der Lebensversicherung.

Von *Hans Koeppler,* Berlin.

Aus der Tatsache, daß die Lösung einer Integralgleichung selbst wieder eine Integralgleichung ist [1]) kann man wohl schon schließen, daß irgendeine Beziehung, welche zur Darstellung einfacher Integralgleichungen dient, weiterhin auch umgekehrt zur Lösung einfacher Integralgleichungen verwendet werden kann. Nach dieser Richtung hin hat der Verfasser die einst von Prof. Loewy [2]) aufgestellte und angewendete Formel untersucht. Die letztere möge zunächst zur Bequemlichkeit der Leser in Kürze mittels einfacher Integration und in einfachster Form hergeleitet werden.