Alfred Tauber

Beweis einiger Sätze über die analytische Ausgleichung. I

Aktuárské vědy, Vol. 6 (1936), No. 2, 49–55

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144653

Beweis einiger Sätze über die analytische Ausgleichung. I.

Von Prof. Dr. *Alfred Tauber.*

Einige der Fragen, die sich in der Praxis der analytischen Ausgleichung von Sterbetafeln darbieten, erscheinen auch in methodischer Hinsicht Untersuchungen zugänglich und sollen im Folgenden, ohne Zuhilfenahme von Sätzen der Ausgleichungstheorie, erörtert werden.

1. Die Erweiterung von Ausgleichungsformeln. Für eine Ausgleichung von m Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ besitze die Summe[1]) der Abweichungsquadrate

$$\Sigma\,(z_i - C_1 c_{i1} - C_2 c_{i2} - \ldots - C_n c_{in})^2, \tag{1}$$

bei zu findenden Werten der n Linearkonstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ und vorgegebenen mn Koeffizienten $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}$ das Minimum M, anderseits werde durch eine erweiterte Ausgleichung, unter Belassung der angeführten Koeffizienten $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}$ und Hinzufügung weiterer m Zusatzkoeffizienten $c_{1,n+1}, c_{2,n+1}, \ldots, c_{m,n+1}$ durch die Bedingung

$$\Sigma(z_i - \mathfrak{C}_1 c_{i1} - \mathfrak{C}_2 c_{i2} - \ldots - \mathfrak{C}_n c_{in} - \mathfrak{C}_{n+1} c_{i,n+1})^2 = \text{Min.}, \tag{2}$$

welche die Grössen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_{n+1}$ bestimmt, das Minimum $\mathfrak{M}$ erzielt. Als dann soll die Beziehung[2])

$$\mathfrak{M} = M - \frac{\mathfrak{F}}{F}\,\mathfrak{C}_{n+1}{}^2 \tag{3}$$

abgeleitet werden, worin $\mathfrak{F}$ und F die beiden, von den auszugleichenden Werten z unabhängigen Determinanten der linearen Gleichungssysteme zur Bestimmung der gesuchten Werte $\mathfrak{C}$ resp. C vorstellen. Diese Gleichungssysteme ergeben sich eindeutig aus der Minimumsbedingung, nämlich für die Unbekannten C

[1]) In allen hier auftretenden Summationen soll i die Zahlen 1 bis m durchlaufen.

[2]) Ohne Beweis wurde dieser Satz in der Österr. Revue 36. Jahrgang (1912) erwähnt.

$$\Sigma c_{ik} z_i = \Sigma c_{ik} (C_1 c_{i1} + C_2 c_{i2} + \ldots + C_n c_{in}), \quad k = 1 \text{ bis } n \tag{4}$$

und für die Unbekannten $\mathfrak{C}$,

$$\Sigma c_{ik} z_i = \Sigma c_{ik} (\mathfrak{C}_1 c_{i1} + \mathfrak{C}_2 c_{i2} + \ldots + \mathfrak{C}_{n+1} c_{i,n+1}), \quad k = 1 \text{ bis } n + 1. \tag{5}$$

Von dem Ausnahmsfall $\mathfrak{C}_{n+1} = 0$, welcher nur bei $\mathfrak{C}_1 = C_1$, $\mathfrak{C}_2 = C_2$, $\ldots$, $\mathfrak{C}_n = C_n$ eintritt, wird indes abgesehen.

Die nun aufzulösenden Gleichungen (4), (5) erlangen, wenn

$$Z_k = \Sigma c_{ik} z_i, \; b_{kj} = \Sigma c_{ik} c_{ij}, k, j = 1 \text{ bis } n + 1 \tag{6}$$

zur Abkürzung gesetzt wird, die Form

$$Z_k = C_1 b_{k1} + C_2 b_{k2} + \ldots + C_n b_{kn} \text{ für } k = 1 \text{ bis } n, \tag{7}$$

$$Z_k = \mathfrak{C}_1 b_{k1} + \mathfrak{C}_2 b_{k2} + \ldots + \mathfrak{C}_{n+1} b_{k,n+1} \text{ für } k = 1 \text{ bis } n + 1, \tag{8}$$

ihre Determinanten F, $\mathfrak{F}$ sind

$$\begin{aligned} F &= \text{Det} \mid b_{kj}, \mid \; k, j = 1 \text{ bis } n, \\ \mathfrak{F} &= \text{Det} \mid b_{kj}, \mid \; k, j = 1 \text{ bis } n + 1 \end{aligned} \tag{9}$$

und zwar, wegen $b_{kj} = b_{jk}$ symmetrisch.

Der Beweis des Satzes (3) beruht auf dem linearen Zusammenhang zwischen dem Minimum M und den aus (7) zu bestimmenden Werten C

$$M + C_1 Z_1 + C_2 Z_2 + \ldots + C_n Z_n = \Sigma z_i^2, \tag{10}$$

der erhalten wird, indem man die erste, zweite, ... Gleichung (7) mit $C_1, C_2, \ldots$ multipliziert und nachher addiert, denn

$$C_1 Z_1 + C_2 Z_2 + \ldots + C_n Z_n$$

oder

$$\begin{aligned} & C_1 (C_1 b_{11} + C_2 b_{12} + \ldots + C_n b_{1n}) + \\ & + C_2 (C_1 b_{21} + C_2 b_{22} + \ldots + C_n B_{2n}) + \ldots + \\ & + C_n (C_1 b_{n1} + C_2 b_{n2} + \ldots + C_n b_{nn}) \end{aligned} \tag{11}$$

ist identisch mit

$$\Sigma (C_1 c_{i1} + C_2 c_{i2} + \ldots + C_n c_{in})^2 \tag{12}$$

wie der Koeffizientenvergleich für jedes der Quadrate C_1^2, C_2^2, ... und der Produkte $C_1 C_2$, ... zeigt: Beispielweise sind die Koeffizienten von C_1^2 in (11) und (12)

$$b_{11} \text{ resp. } \Sigma c_{i1}^2,$$

nach (6) einander gleich; dasselbe gilt für die Koeffizienten irgend eines der Produkte z. B. von $C_1 C_2$ in (11) und (12)

$$b_{12} + b_{21} = 2 b_{12} \text{ resp. } 2 \Sigma c_{i1} c_{i2},$$

Anderweits resultiert M durch Ausquadrieren von (1) gleich

$$\Sigma z_i^2 - 2 (C_1 Z_1 + \ldots + C_n Z_n) + \Sigma (C_1 c_{i1} + \ldots + C_n c_{in})^2 = \Sigma z_i^2 - \\ - (C_1 Z_1 + \ldots + C_n Z_n),$$

wodurch der Hilfssatz (10) verifiziert ist. Ein analoger Zusammenhang besteht zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_{n+1}$

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{C}_1 Z_1 + \mathfrak{C}_2 Z_2 + \ldots + \mathfrak{C}_{n+1} Z_{n+1} = \Sigma z_i^2 \tag{13}$$

daher besagt die zu beweisende Gleichung (3) für die Differenz $M - \mathfrak{M}$, daß

$$(\mathfrak{C}_1 - C_1)\, Z_1 + (\mathfrak{C}_2 - C_2)\, Z_2 + \ldots + (\mathfrak{C}_n - C_n)\, Z_n + \mathfrak{C}_{n+1} Z_{n+1} \tag{14}$$

mit $\mathfrak{F}\mathfrak{C}_{n+1}^2/F$ zusammenfällt, und dies wieder folgt aus den sogenannten Minorensätzen der Determinantentheorie: Bezeichnet zunächst F_{kj} resp. $\mathfrak{F}_{kj}$ die zum Element b_{kj} von F resp. $\mathfrak{F}$ gehörige Unterdeterminante 1. Ordnung, sodaß wegen der Symmetrie der Elemente b auch $F_{jk} = F_{kj}$ und $\mathfrak{F}_{jk} = \mathfrak{F}_{jk}$ ist, dann sind die gesuchten Werte der C, $\mathfrak{C}$ nach (7), (8) bestimmt durch

$$\begin{aligned} C_k F &= F_{1k} Z_1 + F_{2k} Z_2 + \ldots + F_{nk} Z_n \text{ für } k = 1 \text{ bis } n, \\ \mathfrak{C}_k \mathfrak{F} &= \mathfrak{F}_{1k} Z_1 + \mathfrak{F}_{2k} Z_2 + \ldots + \mathfrak{F}_{n+1,k} Z_{n+1} \text{ für } k = 1 \text{ bis } n + 1. \end{aligned} \tag{15}$$

Nach Einsetzung der so definierten Werte der C, $\mathfrak{C}$ folgt für den, mit $F\mathfrak{F}$ multiplizierten, Aus druck (14) die Form

$$\begin{aligned} F \sum_{k=1}^{n} Z_k\, (\mathfrak{F}_{1k} Z_1 + \ldots + \mathfrak{F}_{nk} Z_k + \mathfrak{F}_{n+1,k} Z_{n+1}) - \\ - \mathfrak{F} \sum_{k=1}^{n} Z_k\, (F_{1k} Z_1 + \ldots + F_{nk} Z_k) + \\ + F Z_{n+1}\, (\mathfrak{F}_{1,n+1} Z_1 + \ldots + \mathfrak{F}_{n+1,n+1} Z_{n+1}) \end{aligned} \tag{16}$$

und daß (16) mit $\mathfrak{F}^2 \mathfrak{C}_{n+1}^2$ übereinstimmt, das heißt mit

$$(\mathfrak{F}_{1,n+1} Z_1 + \ldots + \mathfrak{F}_{n+1,n+1} Z_{n+1})^2 \tag{17}$$

zeigt ähnlich wie die Identität von (11) und (12), der Koeffizientenvergleich für jedes einzelne der Quadrate $Z_1^2, Z_2^2, \ldots, Z_{n+1}^2$ resp. der Produkte $Z_1 Z_2, \ldots,$ wobei zu berücksichtigen ist, daß die Determinante F, als Unterdeterminante von $\mathfrak{F}$ betrachtet, die Bezeichnung $\mathfrak{F}_{n+1,n+1}$ führt.

Beispielsweise sind die Faktoren von Z_1^2 und $2 Z_1 Z_2$ einerseits in (16), anderseits in (17)

$$\begin{array}{rll} & F\mathfrak{F}_{11} - \mathfrak{F} F_{11} & \text{und } F\mathfrak{F}_{12} - \mathfrak{F} F_{12} \\ \text{resp. } & \mathfrak{F}_{1,n+1}^2 & \text{und } \mathfrak{F}_{1,n+1}\, \mathfrak{F}_{2,n+1} \end{array} \tag{18}$$

somit in beiden Ausdrücken dieselben, wegen der, auf die Determinante $\mathfrak{F}$ angewandten, Unterdeterminanten-Sätze[2])

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{F}_{11} & \mathfrak{F}_{1,n+1} \\ \mathfrak{F}_{n+1,1} & \mathfrak{F}_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = \mathfrak{F} F_{11} \text{ und } \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_{12} & \mathfrak{F}_{1,n+1} \\ \mathfrak{F}_{n+1,2} & \mathfrak{F}_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = \mathfrak{F} F_{12}. \tag{19}$$

[2]) Vgl. z. B. Netto-Bieberbach, die Determinanten (Leipzig 1925) Seite 54, (76).

Der Hilfssatz (10) gestattet, wie noch hervorzuheben, die Berechnung der Summe M der kleinsten Quadrate, ohne die Quadrierung der einzelnen Differenzen und deren Summierung vorzunehmen, er fordert nur die Ermittlung von Σz_i^2, und selbst diese entfällt, wenn bloß nach dem Unterschied zwischen zwei, nach verschiedenen Ausgleichungsformeln resultierenden Summen der kleinsten Quadrate gefragt wird.

Auch läßt es die Gestalt von (10) naheliegend erscheinen, neben dem Maaßstab M für den Annäherungsgrad der betrachteten Ausgleichung noch deren „mittleren Relativfehler" $\sqrt{M/\Sigma z_i^2}$ zu definieren.[3])

Die Ausgleichung nach Gewichten ist auf den bisher erörterten Fall der gewichtlosen Ausgleichung sofort rückführbar, weil, wenn für m Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ die Quadratsumme

$$\Sigma g_i\,(y_i - C_1\gamma_{i1} - C_2\gamma_{i2} - \ldots - C_n\gamma_{in})^2 \tag{20}$$

bei gegebenen Gewichten g_i und Koeffizienten $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{in}$ ein Minimum werden soll, die gesuchten Werte $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die zu (4) analogen Gleichungen

$$0 = \Sigma g_i\gamma_{ik}\,(y_i - C_1\gamma_{i1} - C_2\gamma_{i2} - \ldots - C_n\gamma_{in}),\ k = 1 \text{ bis } n \tag{21}$$

zu erfüllen haben, aus denen für

$$z_i = y_i\sqrt{g_i},\ c_{ik} = \gamma_{ik}\sqrt{g_i}, \tag{22}$$

genau das obige Gleichungssystem (4) entsteht.

Anmerkung. Den Satz, daß die Determinante F eines Gleichungssystems von der Kategorie (4) notwendigerweise das positive Vorzeichen besitzt, beweist man am einfachsten, indem man F als Summe über die Quadrate der $\binom{m}{n}$ verschiedenen Determinanten aus der Matrix

$$\| c_{1k}c_{2k}\ldots c_{mk} \| \text{ für } k = 1 \text{ bis } n$$

darstellt. So ist im Falle $n = 3$, wenn $c_{i1} = P_i$, $c_{i2} = \Theta_i$, $c_{i3} = R_i$ gesetzt wird,

$$F = \begin{vmatrix} \Sigma P_i^2 & \Sigma P_i\Theta_i & \Sigma P_iR_i \\ \Sigma P_i\Theta_i & \Sigma\Theta_i^2 & \Sigma\Theta_iR_i \\ \Sigma P_iR_i & \Sigma\Theta_iR_i & \Sigma R_i^2 \end{vmatrix}$$

nach dem Additionssatz der Determinanten gleich der Summe aller Determinanten

$$\begin{vmatrix} P_\lambda^2 & P_\mu\Theta_\mu & P_\nu R_\nu \\ P_\lambda\Theta_\lambda & \Theta_\mu^2 & \Theta_\nu R_\nu \\ P_\lambda R_\lambda & \Theta_\mu R_\mu & R_\nu^2 \end{vmatrix} = P_\lambda\Theta_\mu R_\nu \mathfrak{D}_{\lambda\mu\nu},\quad \mathfrak{D}_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} P_\lambda & P_\mu & P_\nu \\ \Theta_\lambda & \Theta_\mu & \Theta_\nu \\ R_\lambda & R_\mu & R_\nu \end{vmatrix}$$

die durch Variieren von $\lambda\mu\nu$ zwischen 1 und m entstehen. Nun ändert

[3]) Auch wenn die Summe M der Abweichungsquadrate nicht als Minimum bestimt vurde, kann dieser Quotient als Maßstab dienen.

sich aber der Wert von F nicht, falls man die Summationsbuchstaben $\lambda\mu\nu$ durch die Permutationen $\lambda\nu\mu$, $\mu\lambda\nu$, $\nu\lambda\mu$, $\mu\nu\lambda$, $\nu\mu\lambda$ ersetzt, und ist demnach gleich einem Sechstel der Summe über alle

$$\lambda\mu\nu \text{ von } 1 \text{ bis } m$$
$$(P_\lambda\Theta_\mu R_\nu - P_\lambda\Theta_\nu R_\mu - P_\mu\Theta_\lambda R_\nu + P_\nu\Theta_\lambda R_\mu + P_\mu\Theta_\nu R_\lambda - P_\nu\Theta_\mu R_\lambda)\mathfrak{D}_{\lambda\mu\nu}$$

das heißt über alle $\mathfrak{D}_{\lambda\mu\nu}^2$ w. z. b. w.

2. Voraussetzung der bisher behandelten Ausgleichungsprobleme war, daß die zu findenden Ausgleichungskonstanten linear auftreten, was bei nichtlinearen Ausgleichungsformeln, wie z. B. der Makeham'schen, nur zutrifft, wenn bereits geeignete Werte den nichtlinear vorkommenden Ausgleichungskonstanten zuerteilt wurden. Sonst ist eben die Methode der kleinsten Quadrate ohne grosse Komplikation nicht anwendbar.

In dieser Hinsicht wird speziell bei der analytischen Ausgleichung von Sterbetafeln eine Verbesserung erzielt, wenn anstatt der ohnehin nur in beschränktem Maaße brauchbaren Makeham'schen Formel deren Verallgemeinerungen benützt werden, weil alsdann die nichtlinear auftretenden Ausgleichungskonstanten keine so überragende Rolle spielen und keine so minutiöse Bestimmung erfordern. Und zwar wird bei analytischer Sterbetafelausgleichung fast ausschließlich eine Funktion der Sterbenswahrscheinlichkeit durch eine Summe von Exponentialfunktionen oder von Produkten einer Exponentialfunktion mit einem Polynom dargestellt, aus dem Grunde, weil bei dieser Annahme die gruppenweise additive Zusammenfassung von auszugleichenden Werten wieder die nämliche Form besitzt, wodurch insbesondere die angenäherte Bestimmung der Basiskonstanten der Exponentialfunktionen erleichtert wird.

Anderseits würde es überflüssige Komplikationen, wie etwa die Heranziehung imaginärer Grössen, mit sich bringen, alle Exponentialfunktionen der Ausgleichungsformel als von einander unabhängig vorauszusetzen, während eine entschiedene Vereinfachung zustande kommt, wofern man von vornherein Beziehungen zwischen den Exponentialfunktionen annimmt, derart daß die Zahl der zu bestimmenden Basiskonstanten eins oder höchstens zwei beträgt. Beispielsweise kann auf die besondere Genauigkeit der Kettenlinie (catenary) für den Logarithmus der ausgeglichenen Lebenswahrscheinlichkeit $\mathfrak{p}_x$ des x-jährigen gemäß der deutschen Volkssterbetafel 1924/26 des männlichen Geschlechtes, im Altersintervall 22 bis 85, hingewiesen werden[4])

$$\operatorname{colog}\mathfrak{p}_{22+n} = 0{,}0007353 + 0{,}0002407\,(1{,}102)^n + 0{,}0010850\,(1{,}102)^{-n}. \quad (23)$$

(Die hier angegebenen numerischen Formelkonstanten wurden jedoch

[4]) Versicherungsarchiv, Märzheft 1936, Seite 708 (2).

nicht nach der Methode der kleinsten Quadrate, sondern nach einem anderen, später zu besprechenden Verfahren ermittelt.)

Auch für die neue Sterbetafel (1929/32) des männlichen Geschlechtes in der tschechoslovakischen Republik wird eine näherungsweise Darstellung (im Altersintervall 22 bis 85) durch die Kettenlinie für den Logarithmus der Lebenswahrscheinlichkeit ermöglicht, nur ist der relative Höchstfehler infolge der Irregularität einiger Beobachtungsdaten größer als bei der erwähnten deutschen Sterbetafel. Er beträgt für die Ausgleichung nach der Formel

$$10^7 \operatorname{colog} \mathfrak{p}_{22+n} = 10620 + 3448\,(1{,}095)^n + 6130\,(1{,}095)^{-n} \qquad (24)$$

acht Prozent gegenüber den unausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x im Altersintervall 22 bis 86, aber dieses Maximum ist vornehmlich der zu hoch registrierten Sterblichkeit in den „runden" Altern zuzuschreiben, beispielsweise im Alter 40, wo q_{40} grösser als q_{41} beobachtet wurde, oder umgekehrt der zu niedrigen Angabe der Sterblichkeit in den angrenzenden Altern, wie z. B. im Alter 69. Ausserdem wird das Fehlermaximum beim Alter 26 fast erreicht, für welches die unausgeglichene Sterbenswahrscheinlichkeit ziemlich brüsk abfällt. Die Anpassung der Formel (24) zeigt der Vergleich der folgenden beiden Tabellen I und II, erstere enthält die Logarithmen der unausgeglichenen Lebenswahrscheinlichkeiten p_x in der Männersterbetafel 1929/32 der tschechoslovakischen Republik.

Tabelle I.

x	$10^7 \operatorname{colog} p_x$	x	$10^7 \operatorname{colog} p_x$	x	$10^7 \operatorname{colog} p_x$	x	$10^7 \operatorname{colog} p_x$
22	20198	38	27010	54	72786	70	269137
23	19805	39	29239	55	81716	71	291187
24	20329	40	32039	56	84993	72	329531
25	20635	41	31601	57	87252	73	348924
26	18453	42	34139	58	95368	74	390300
27	18715	43	36026	59	106926	75	430348
28	19195	44	37905	60	114054	76	458685
29	19326	45	41850	61	124097	77	521547
30	21333	46	41411	62	131924	78	558728
31	20765	47	44613	63	142817	79	607134
32	20940	48	48520	64	160626	80	690815
33	22249	49	50277	65	178509	81	693311
34	23079	50	59161	66	187025	82	810841
35	23690	51	59601	67	203606	83	874007
36	25219	52	65020	68	220524	84	969154
37	26267	53	68372	69	237693	85	1069266

In Tabelle II ist das Resultat der rechten Seite von Formel (24) eingetragen.

Tabelle II.

x	10^7 colog $\mathfrak{p}_x$	x	10^7 colog $\mathfrak{p}_x$	x	10^7 colog $\mathfrak{p}_x$	x	10^7 colog $\mathfrak{p}_x$
22	20198	38	26786	54	73879	70	279511
23	19995	39	28061	55	79827	71	305041
24	19867	40	29478	56	86346	72	332998
25	19817	41	31052	57	93489	73	363613
26	19842	42	32794	58	101314	74	397136
27	19934	43	34719	59	109888	75	433845
28	20121	44	36843	60	119280	76	474041
29	20377	45	39183	61	129567	77	518057
30	20713	46	41758	62	140235	78	566255
31	21134	47	44590	63	153183	79	621812
32	21641	48	47702	64	166699	80	679869
33	22237	49	51120	65	181501	81	743442
34	22930	50	54871	66	197712	82	813105
35	23724	51	58987	67	215465	83	889337
36	24627	52	63501	68	234906	84	972811
37	25644	53	68452	69	256196	85	1064215

Bezüglich des relativen Fehlers der Sterbenswahrscheinlichkeit, der infolge irgendeiner Ausgleichung des Logarithmus der Lebenswahrscheinlichkeit entsteht, ist hervorzuheben, daß er immer weniger beträgt als der Relativfehler eben dieses Logarithmus, denn der Quotient q'/q von zwei positiven echten Brüchen q' und q liegt der Einheit näher als der Quotient $\log(1-q')/\log(1-q)$. Dies rührt davon her, daß

$$\frac{1}{q}\operatorname{colog}(1-q) = 1 + \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{3}q^2 + \ldots$$

mit q wächst, was die Ungleichungen

$$\frac{\operatorname{colog}(1-q')}{\operatorname{colog}(1-q)} \gtrless \frac{q'}{q} \quad \text{jenach } q' \gtrless q$$

nach sich zieht. Also liegt bei $q' > q$ (resp. $q' < q$) der Quotient q'/q weniger oberhalb (resp. unterhalb) der Einheit als der Quotient $\log(1-q')/\log(1-q)$. Dieser Genauigkeituntserschied in den Relativfehlern, der auch aus der Reihenentwicklung

$$\frac{\log(1-q')}{\log(1-q)} = 1 - \frac{\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \ldots}{\log(1-q)}, \quad \varepsilon = \frac{q'-q}{1-q}$$

für $|\varepsilon| < 1$ erhellt, ist bei Sterbenswahrscheinlichkeiten hoher Alter oder bei fünfjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten schon beachtlich.