Aktuárské vědy

E. J. Gumbel

L’âge limite. I

Aktuárské vědy, Vol. 6 (1936), No. 1, 28–38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144650

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

feuilles viel größeren Umfanges handeln, wobei sich auch die Verteilung der Summen, Alter und Dauern stärker um ein charakteristisches Eintrittsalter häufen wird, was die Genauigkeit des Verfahrens nicht unwesentlich heben muß.

Es ist klar, daß die Anwendung unserer Methode nicht auf die gemischte Versicherung beschränkt ist. Wir können in einer Jahresgruppe alle Versicherungsarten mit gleichartig stipulierter Prämien- und Todesfallkapitals-Leistung zusammenfassen. Das Hauptkontingent wird aber wohl durch diejenigen Versicherungsarten gestellt, bei welchen Prämien- sowohl als Todesfallsumme konstant ist (gemischte Versicherung, lebenslängliche Todesfallversicherung mit lebenslänglicher oder abgekürzter Prämienzahlung, temporäre Todesfallversicherung) und für welche die retrospektive Reserveformel in der hier mehrfach angeführten Form verwendbar ist. Doch ist die retrospektive Formel in leichter Abänderung auch anwendbar für Gruppen mit nach bestimmtem Gesetze variabler Prämie, nötigenfalls auch für variable Summen usw.

Abschließend möchten wir die Bemerkung nicht unterlassen, daß die hier erklärte und begründete Gruppenrechnungsmethode, so sehr wir von ihrer Leistungsfähigkeit und ihren Vorteilen gegenüber anderen Methoden überzeugt sind, nicht eine unter allen Umständen befriedigende Lösung darstellen kann. Verfasser hat an anderer Stelle („Österreichische Revue", Nos 47 & 48, 1934) Gelegenheit genommen, ganz allgemein über Vor- und Nachteile der Reserveberechnung in Gruppen zu sprechen. In der Frage, ob ein bestimmtes Portefeuille für Gruppenrechnung geeignet sei und welche spezielle Methode gegebenenfalls gewählt werden soll, darf nicht nur von theoretischen Erwägungen aus entschieden werden; denn wenn die Praxis wirklich die erhofften Vorteile und Vereinfachungen bringen soll, dann wird man das letzte Wort in der Entscheidung dem Praktiker, der die Zusammensetzung seines Versicherungsbestandes kennt, überlassen müssen.

L'âge limite.

E. J. Gumbel, Université de Lyon.

1. Définition de l'âge limite comme espérance mathématique du plus grand âge.
2. Application à la formule de Lexis. Le paradoxe de l'âge limite virtuel.
3. Exemples numériques.
4. Une distribution observée des plus grands âges.
5. Conclusions.

Dans un travail précédent[1]) nous avons calculé l'âge limite en analogie avec l'espérance mathématique de la plus grande valeur pour une distribution illimitée et pour un grand nombre d'observations. Nous avons appliqué cette méthode en traitant la distribution des décès suivant les âges comme Gaussienne. Mais la forme finale de la distribution de la plus grande valeur nous était inconnue. Voilà pourquoi nous n'avons pu calculer l'écart type que d'une façon approximative.

Depuis, la forme finale de cette distribution[2]) nous a mené à la connaissance de l'écart type. Donc il vaut la peine de reprendre ce travail pour resoudre quelques problèmes restés inachevés.

1. Définition de l'âge limite comme espérance mathématique du plus grand âge.

Le problème du dernier âge a de tout temps interessé les hommes par des raisons bien compréhensibles. Pourtant la science ne s'en est occupé que peu. C'est aussi compréhensible puisqu'il mène finalement à une question individuelle. Or, la science tend de plus en plus à se dégager de l'individuel pour se borner aux statistiques. Donc il convient de se demander: un âge limite existe-t-il et peut-on traiter le problème par des méthodes statistiques? Ce point de vue lie notre problème aux fonctions biométriques, qui ont trait aux tables de mortalité.

Les observations nous montrent des âges plus élevés que 100 ans. Mais les données statistiques ne nous permettent pas de poursuivre les tables au delà de cet âge où les observations deviennent peu nombreuses et incertaines vu les calculs étendus, nécéssaires pour la construction des tables.

Si l'on considère les fonctions biométriques comme discontinues, une limite bien déterminée de la vie humaine peut exister. Cet âge serait défini par le fait que la probabilité de mourir dans l'intervalle d'un an est égale à un.

Mais d'après l'opinion usuelle les fonctions biométriques sont continues. Même dans ce cas un âge limite fixe serait possible de sorte que la fonction de survie soit zéro pour cet âge et ne soit plus définie pour des âges supérieurs. La plupart des livres sur le calcul des assurances considèrent la table de survie comme discontinue en un certain point. Mais cette théorie conduit, comme Steffensen[3]) l'a prouvé, aux plus grandes difficultés du point de vue logique. En effet, si un tel

---

[1]) L'età limite. Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Anno V, n. 1, Rome 1934.

[2]) La plus grande valeur. Aktuárské Vědy. Tome V. Nr. 2, 3, 4, Prague 1935, 1936.

[3]) J. F. Steffensen: Some recent researches in the theory of statistics and actuarial science. Cambridge University Press, 1930.

J. F. Steffensen: Notes on the life table and the limit of life. Journal of the Institute of Actuaries, vol. LXII, part 1, London 1931.

âge ω existe, personne ne peut le dépasser. Mais pour un âge $\omega - \varepsilon$ qui lui est inférieur d'une quantité aussi petite que l'on veut, on devrait encore trouver des vivants. Ainsi pour une augmentation suffisante qu nombre d'observations on peut rendre la discontinuité aussi grande due l'on veut.

Pour éviter cette difficulté il faut supposer que la fonction de survie $l(x)$ ne s'approche de zéro que d'une façon asymptotique. Cette conclusion qu'il n'y a pas d'âge limite fixe paraît très hardie, car on pourrait être tenté d'en déduire la théorie parfaitement dénué de sens, qu'il doit exister des hommes qui atteignent un âge infini. Mais ceci ne découle d'aucune façon de cette hypothèse: la formule de Gompertz-Makeham, utilisée volontiers par les techniciens, possède cette propriété, sans que la conséquence en question ait jamais été tirée.

En laissant de coté la notion de l'âge limite fixe, on a proposé des méthode artificielles pour la détermination d'un âge que l'on peut accepter comme limite. Insolera[4]) a proposé de couper quelque part la loi de survie et de définir l'âge correspondant par la condition que l'intensité de mortalité y ait la valeur 1. Cette proposition est identique avec la définition précédente dans le cas de la discontinuité. Pour appliquer cette méthode. Insolera procède encore à une modification de la formule de Gompertz-Makeham, ce qui conduit à des complications numériques. Enfin la difficulté relevée par Steffensen reste.

D'ailleurs il n'y a pas de nécessité logique pour supposer que des âges, pour lesquels l'intensité de mortalité est supérieure à un, n'existent pas. Car cette fonction biométrique n'est pas une probabilité, mais une densité de probabilité ayant la dimension d'un âge inverse. Sa valeur dépend donc de l'unité choisie du temps. Ce point de vue a été émis par M. de Finetti[5]) qui a présenté d'une façon claire les propriétés finales des diverses fonctions biométriques. En espèce il a étudié la question de savoir s'il existe une limite supérieure pour l'intensité de mortalité. Les hypothèses et méthodes d'ajustement pour le calcul des fonctions biométriques aux âges élevés ont été résumées par M. Huber[6]).

---

[4]) F. Insolera: Una funziona di sopravvivenza. Giornale di Matematica Finanziaria, vol. XII, n. 4—6, Torino 1930.

On the oldest age. Giornale di Matematica Finanziaria. Anno XIII, Serie II, vol. I, No 1, Torino 1931.

Probabilità e sopravvivenza. Atti dell'Istituto delle Assicurazioni. Vol. V. Rome 1933.

[5]) B. de Finetti, Sul comportamento assintotico della mortalita. Rendic. del Circ Mat di Palermo T. LVIII, p. 359. Palermo 1934; M. de Franchis: A proposito della precedente nota del Prof. Bruno de Finetti e in riposta ad un libello del Sig. Insolera. L. c. p. 367.

[6]) M. Huber: Le calcul des taux de mortalité aux âges élevés. Revue de l'Inst. Intern. de Statistique. Année 3 no. 4. La Haye 1935.

Steffensen[3]) définit l'âge le plus élevé par la condition que toutes les valeurs de l'espérance de vie $E(x)$ soient certaines au moins jusqu'à la troisième décimale. Puisque l'intensité de mortalité $\mu(x)$ ne décroit pas pour les âges élevés, cette condition est remplie quand elle est remplie pour l'âge 100.

La condition $\frac{1}{l(100)} \int_{\omega}^{\infty} l(z)\, dz \leqq 0{,}0005$

est satisfaite par l'équation

$$2000 \frac{l(\omega)}{\mu(\omega)} = l(100)$$

dont on peut calculer l'âge ω pour une formule déterminée. Cette proposition conduit à des calculs assez fastidieux. Elle suppose la connaissance des valeurs numériques des fonctions biométriques pour les âges élevés où les observations deviennent incertaines. Toutes les propositions faites jusqu'ici ont en commun que la valeur de l'âge le plus élevé n'augmente pas avec le nombre d'observations. Dans ce qui suit nous allons élaborer une méthode basée sur la théorie des probabilités pour définir l'âge limite correspondant à un nombre déterminé d'observations.

Aussitôt qu'on prend comme point de départ pour la loi de mortalité l'étude de la répartition $\vartheta(x)$ des décès[7]) suivant les âges x, supposée illimitée vers la droite, la question de l'âge le plus élevé prend un aspect tout à fait nouveau. Chercher un tel âge fixe est dépourvu de sens. Son existence n'est pas reconnue et sa détermination à l'aide de conditions analytiques ou d'après des valeurs déterminées des fonctions biométriques peut être regardée comme artificielle.

Mais cette notion ne disparaît pourtant pas. Elle doit être envisagée simplement d'une façon nouvelle. Nous calculons le dernier âge comme l'âge pour lequel on doit s'attendre à ce que parmi un nombre donné de décès un seul soit arrivé après cet âge. Donc il faut distinguer entre l'âge limite et le plus grand âge. Celui-ci est une variable statistique, c'est à dire il existe une densité de probabilité que sa valeur soit contenue entre x et $x + dx$. Cette distribution dépendra du nombre d'observations. Nous cherchons son espérance mathématique comme fonction de ce nombre. C'est elle qui sera l'âge limite. Enfin le dernier âge est une valeur approchée de la dominante de la distribution du plus grand âge. Il s'agit donc de calculer les deux moyennes.[8])

Ce problème n'est qu'un cas spécial de la question de savoir, quelle est la plus grande valeur qu'on doit attendre pour une distribution

---

[7]) La table de mortalité traitée comme distribution. Annales de l'Université de Lyon 3ème série A, No. 1, Lyon 1936.

[8]) J. Splawa-Neymann: Sur les valeurs théoriques de la plus. grande de n erreurs, Prac Matematyczno-fizycznych t. 33 Varsovie 1924.

illimitée et un nombre donné N d'observations, question que nous avons traitée dans notre travail précédent.[2])

Appliquons donc ces résultats à la table de mortalité. On n'a qu'à écrire ces formules dans les désignations biométriques. Dans une table de mortalité traitée comme distribution, la variable statistique est l'âge x au moment de la mort, valeur qui est toujours positive. Soit $\vartheta(x)$ la distribution des décès suivant les âges, de sorte que $\vartheta(x)\,dx$ est la probabilité d'un nouveau né de mourir entre l'âge x et $x + dx$. Nous supposons que cette distribution est illimitée, c'est à dire qu'il n'existe pas d'âge limite fixe, condition qui est évidente. Alors la probabilité d'un décès après l'âge x est

$$l(x) = \int_x^\infty \vartheta(z)\,dz. \tag{1}$$

C'est aussi la probabilité d'un nouveau né d'atteindre cet âge. La densité de probabilité qu'un âge x au moment de la mort soit le plus grand pour N décès, est

$$\mathfrak{w}(x) = N\,(1 - l(x))^{N-1}\,\vartheta(x). \tag{2}$$

Donc le plus grand âge au moment de la mort parmi N décès est une variable statistique positive illimitée vers la droite, que l'on peut désigner de nouveau par x. Cette distribution aura une dominante $\tilde{\omega}$, une espérance mathématique $\overline{\omega}$ et un écart type σ. La valeur $\overline{\omega}$ sera appelée l'âge limite tout court.

Pour N observations la dominante, c'est à dire le plus grand âge le plus probable, appelée dernier âge sera calculé par

$$l(\tilde{\omega}) = \frac{1}{N} \tag{3}$$

et augmentera avec N. Le nombre N des décès employé dans la construction de la table, diffère naturellement du nombre 100.000, avec lequel commencent les tables, puisque celui-ci est choisi arbitrairement. Il est légitime de supposer que les plus agés dont nous suivons le sort, ne meurent pas de maladies infantiles. Donc nous pourrons fixer plus tard un nombre N plus restreint.

Ce calcul de la dominante est lié à une condition analytique sur la nature des fonctions biométriques, à savoir qu'il est légitime de poser pour N suffisamment grand

$$\frac{\vartheta'(\tilde{\omega})}{\vartheta(\omega)} = -\frac{\vartheta(\tilde{\omega})}{l(\tilde{\omega})}$$

Pour toute fonction biométrique, qui ne possède pas d'âge limite fixe (condition évidente) la distribution $\vartheta(x)$ et la probabilité $l(x)$ d'atteindre l'âge x tendent vers zéro. De même $\vartheta'(x)$ tend vers zéro, et cela dans le domaine négatif, puisqu'il existe un âge normal pour lequel la densité de mortalité est maximum. Donc cette égalité, qu'on peut écrire

$$\frac{\vartheta'(\tilde{\omega})}{\vartheta(\tilde{\omega})} = -\mu(\tilde{\omega}), \tag{4}$$

n'est qu'une autre forme de la règle de L'Hopital. Alors le plus grand âge dominant peut être calculé par (3) pour n'importe quelle formule biométrique, pourvu que N soit suffisamment grand. D'ailleurs ils existent encore d'autres solutions approchées de l'équation

$$\mathfrak{w}(x),=0, \tag{2'}$$

valables pour de grandes valeurs de N. Mais dans ce travail nous nous bornons au traitement de (3). Alors la densité de probabilité de l'âge dominant est

$$\mathfrak{w}(\tilde{\omega}) = \frac{\mu(\tilde{\omega})}{e}. \tag{5}$$

Si la valeur $\mu(\tilde{\omega})$ augmente avec N, c'est à dire si l'intensité de mortalité augmente pour les grands âges avec l'âge, la distribution (2) se reserre autour de la dominante pour un nombre croissant d'observations. La déterminantion de cet âge est d'autant plus précise que la population traitée est plus grande.

C'est, donc, l'intensité de mortalité qui détermine l'influence du nombre d'observations sur la distribution finale du plus grand âge. Si l'intensité de mortalité tend vers une limite finie comme le suppose M. de Finetti,[5]) la distribution ne se resserre plus à partir d'un nombre N suffisamment grand. En pratique les observations ne permettent pas encore de décider cette question de fait.

L'opinion usuelle sur l'intensité de mortalité est, qu'elle augmente toujours avec l'âge, c'est à dire aussi pour les âges très élevés. Voilà pourquoi il est justifié de poser en première approximation

$$\overline{\omega} = \tilde{\omega}. \tag{6}$$

C'est d'autant plus justifié, plus grand est le nombre des décès employé dans la construction de la table. L'intensité de mortalité de l'âge limite va donc augmenter avec le nombre d'observations.

On peut calculer une valeur plus exacte pour l'âge limite et préciser les constatations faites. Les dérivées successives $\vartheta^{(\nu)}(\tilde{\omega})$ de la densité de mortalité à l'âge dominant ont d'après (4) la qualité

$$\frac{\vartheta^{(\nu)}(\tilde{\omega})}{\vartheta(\tilde{\omega})} = (-1)^\nu \mu^\nu(\tilde{\omega}), \quad \nu = 2, 3 \ldots \tag{7}$$

Donc la distribution du plus grand âge tend pour des valeurs croissantes de N vers la forme finale

$$\mathfrak{w}(x) = \mu(\tilde{\omega})\, e^{-y-e^{-y}} \tag{8}$$

où la variable finale

$$y = \mu(\tilde{\omega})\,(x - \tilde{\omega}) \tag{9}$$

est une transformation linéaire de l'âge. Cette distribution est asymétrique. Elle contient plus de valeurs à la partie droite qu'à la gauche.

Supposons que les dérivées successives de la densité de mortalité, dont la nature nous est inconnue, suffisent à la condition (7). Alors l'espérance mathématique du plus grand âge, c'est à dire l'âge limite, devient

$$\bar{\omega} = \tilde{\omega} + \frac{\gamma}{\mu(\tilde{\omega})} \tag{10}$$

où

$$\gamma = 0{,}57722 \tag{11},$$

est la constante d'Euler. L'âge limite s'approche de la dominante, si l'intensité de mortalité multipliée par l'âge ne diminue pas avec l'âge.

L'écart type de la distribution du plus grand âge sera

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}\,\mu(\tilde{\omega})}. \tag{12}$$

Plus l'intensité de mortalité à l'âge dominant sera grande, plus la determination de cet âge sera précise.

La probabilité que le plus grand âge est inférieur à x sera donnée par

$$\mathfrak{W}(x) = e^{-e^{-y}}. \tag{13}$$

Toutes ces formules ne sont que les résultats de notre travail antérieur, écrites dans les désignations biométriques.

2. Application à la formule de Lexis. Le paradoxe de l'âge limite virtuel.

Pour le calcul de l'âge limite nous demandons que la densité de mortalité tende vers zéro, de même que sa dérivée, ce qui implique qu'il n'y a pas d'âge limite fixe. En outre le produit de l'intensité de mortalité avec l'âge doit augmenter avec l'âge. Dès qu'une formule biométrique remplit ces conditions, on peut l'employer.

La formule de Lexis[9]) donne un exemple d'une telle fonction. Elle convient pour les âges élevés, et la détermination des constantes est très simple. Cette formule exprime la distribution des décès autour de l'âge normal ξ par la formule de Gauss, loi qui suffit aux conditions (7). Donc on peut employer les formules qui traitent la plus grande valeur d'une variable de Gauss.

---

[9]) La distribuzione dei decessi secondo la legge di Gauss. Giornale dell'Istituto italiano degli Attuari, vol. III, n. 3, Rome 1932.
Die Verteilung der Gestorbenen um das Normalalter. Aktuárské vědy, vol. IV, n. 2, Prague 1933.

La loi de survie est d'àprès Lexis

$$l(x) = l(\xi)\left[1 - \Phi\left(\frac{x-\xi}{E(\xi)\sqrt{\pi}}\right)\right], \tag{14}$$

où $l(\xi)$ est la probabilité d'un nouveau né de mourir après l'âge normal ξ et Φ l'intégrale de Gauss. Enfin

$$E(\xi) = \frac{1}{l(\xi)}\int_{\xi}^{\infty} l(z)\,dz, \tag{15}$$

l'espérance de vie à l'âge normal, prend le rôle de l'écart moyen de la distribution des décès. Nous allons l'appeler vie normale. Les valeurs ξ, $l(\xi)$, $E(\xi)$ peuvent être déterminées d'une façon simple d'après la méthode classique de Lexis.

Si l'on désigne par $\mathfrak{D}$ le nombre total des décès, employé pour la construction de la table, le nombre des décès après l'âge normal est $\mathfrak{D}\, l(\xi)$. Par suite de la symétrie de la loi de Gauss on a

$$\tfrac{1}{2}N = \mathfrak{D}\, l(\xi). \tag{16}$$

Pour que les conditions (4) et (7) soient remplies, il faut que

$$\mathfrak{D}\, l(\xi) \geqq 90.000. \tag{17}$$

Le nombre $\mathfrak{D}$ ne se trouve pas dans les tables de survie elles-mêmes, mais dans les statistiques démographiques qui sont à la base de ces constructions.

La condition numérique (17) resulte de la solution approchée (3) de l'équation (2') que nous avons choisie ici. On peut encore restreindre ce nombre en choisissant une autre solution, problème que nous allons considerer en d'autre lieu. Les raisonnements suivants de ce paragraphe s'appliquent en même temps à la dominante et à l'espérance mathématique du plus grand âge. Il suffit donc d'écrire les formules pour le dernier âge dont les conséquences sont aussi valables pour l'âge limite.

D'après les formules de notre travail précédent, la dominante des plus grands âges sera

$$\tilde{\omega} = \xi + \tau\, E(\xi)\sqrt{\pi} \tag{18}$$

où τ, le dernier âge réduit, sera calculé comme fonction de N par des tables numériques. Chaque fois que l'âge normal devient plus élevé, l'âge limite est avancé de la même quantité. Aussi l'âge limite augmente avec la vie normale. Plus le nombre d'observations est grand, plus forte est cette influence.

Pour les tables ayant le même âge normal et la même vie normale, l'âge limite croît avec le nombre d'observations mais d'une façon extrèmement lente. Car on peut poser en première approximation pour de grandes valeurs de $\mathfrak{D}$

$$\tau = 1{,}52743 \sqrt{\log 2\mathfrak{D}}\, l(\xi). \tag{19}$$

Cela signifie que l'âge limite augmente avec le temps même si les conditions hygiéniques restent les mêmes.

Enfin l'écart type de la distribution du plus grand âge sera

$$\sigma = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} E(\xi)}{\sqrt{6}\,.\,2\tau}$$

$$= \frac{1{,}13663\, E(\xi)}{\tau}. \tag{20}$$

Donc, l'écart type croît proportionellement à la vie normale. Plus elle sera grande, moins précise sera la détermination de l'âge limite. En général la vie normale est autant plus faible que l'âge normal est élevé. Dans ce sens l'écart type diminuera avec des valeurs croissantes de l'âge normal. Un accroissement du nombre d'observations ne diminuera l'écart type d'après (19) que d'une façon minime.

L'âge limite dépend d'après (18) de quatre facteurs: de l'âge normal, de son espérance de vie, de la probabilité de l'atteindre et du nombre d'observations. Les trois premiers sont des valeurs biométriques dérivant de la table de mortalité. Par contre le nombre des décès $\mathfrak{D}$ est une valeur démographique. Il sera autre, si l'on traiet tout le territoire ou seulement une partie du pays envisagé, une année, une dixaine ou tout un siècle, grandeurs arbitraires du point de vue biométrique. Ce facteur étant la base même de notre théorie, on ne peut pas essayer d'éliminer son influence. Mais on peut comparer deux populations du point de vue de la longévité en calculant un âge limite virtuel basé sur le même nombre de décès.

L'âge limite virtuel sera d'autant plus élevé que la probabilité d'atteindre l'âge normal sera plus grande. Mais cette influence sera minime, vu que la probabilité d'atteindre l'âge normal ne peut varier pratiquement que dans les limites assez étroites dont les différences disparaissent par rapport à log $2\mathfrak{D}$. Pour deux tables ayant la même vie normale, la table ayant l'âge normal supérieur aura aussi l'âge limite virtuel supérieur.

Ces conséquences simples sont en accord avec les opinions usuelles. Il en est autrement lorsqu'on compare des tables ayant différents âges normaux et différentes vies normales. On déclare en général comme plus favorable une table ayant un âge normal plus élevé qu'une autre. Ce point de vue est encore plus justifié, si les probabilités d'atteindre cet âge sont les mêmes. Car pour la table favorable le même nombre a vécu plus longtemps.

Pourtant il y a une influence telle qu'une table favorable ait un âge limite virtuel plus petit qu'une table défavôrable. Car les influences d'un accroissement de l'âge normal et de son espérance de vie, qui tous les deux tendent à augmenter l'âge limite, peuvent aussi se contrebalancer. Quand on passe d'une table à une autre plus favorable, l'âge normal augmente, mais la vie normale diminue. L'évolution des tables de survie montre le même phénomène. Les tables ayant de grandes valeurs de l'âge normal ont en général de petites valeurs pour l'espérance de vie et réciproquement.

Comparons pour le même nombre de décès deux tables, dont l'une, la première, soit plus favorable que l'autre, et pour lesquelles

$$\xi_1 > \xi_2;\ E_1(\xi_1) < E_2(\xi_2)$$

tandis que

$$l_1(\xi_1) = l_2(\xi_2).$$

Quoique la première soit plus favorable, on aura

$$\tilde{\omega}_2 > \tilde{\omega}_1$$

pourvu que $\tau\sqrt{\pi} > \dfrac{\xi_1 - \xi_2}{E_2(\xi_2) - E_1(\xi_1)}$.

Donc il peut exister un intervalle

$$\tau\sqrt{\pi} < \frac{\xi_1 - \xi_2}{E_2(\xi_2) - E_1(\xi_1)}$$

tel que $\qquad \tilde{\omega}_2 < \tilde{\omega}_1.$

Mais pour un nombre d'observations suffisamment grand, la table défavorable aura un âge limite virtuel supérieur à l'autre, grâce au fait que l'espérance de vie est multipliée par $\bar{t}$ qui augmente avec le nombre d'observations. Une table favorable du point de vue général peut donc en même temps être défavorable du point de vue de la longévité. Cette différence entre les âges limites virtuels augmentera avec les observations.

Il vaut la peine de se rendre compte comment l'âge limite croît avec les observations et comment la différence entre les tables défavorables s'évalue. Puisque de telles extrapolations dépassent le calcul exacte, les résultats nous interessent seulement du point de vue de l'ordre de grandeur. Choisissons deux tables distinctes quant à l'âge et l'espérance de vie normale, pour lesquelles la probabilité d'atteindre l'âge normal est sensiblement la même. Négligeons enfin les différences entre le dernier âge et l'âge limite.

I. Table favorable et défavorable.

	Australie m. 1901/10	Indes m. 1901/10
Age normal ξ	74,20	38,5
Vie normale $E(\xi)$	6,88	18,65
Probabilité normale $l(\xi)$	0,28011	0,28455

Ces valeurs sont tirées de la confrontation de James W. Glover.[10]) Pour notre but il est légitime de prendre $l(\xi) = 0{,}28$. Alors les âges limites virtuels seront d'après (18) et (19) en première approximation

$$\bar{\omega}_1 = 74{,}2 + 18{,}63 \sqrt{\log 0{,}56\mathfrak{D}},$$
$$\bar{\omega}_2 = 38{,}5 + 50{,}49 \sqrt{\log 0{,}56\mathfrak{D}}.$$

Ces valeurs sont portées dans le tableau II. Elle donne pour des valeurs choisies de $0{,}56D$ (colonne 1) les âges limites virtuels pour la table favorable (2) et défavorable (3).

II. Extrapolation de l'âge limite.

$0{,}56\mathfrak{D}$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$
10^5	115,86	151,40
10^6	119,83	162,18
10^7	123,49	172,08
10^8	126,89	181,31
10^9	130,09	189,97
10^{10}	133,11	198,16
10^{11}	135,99	205,96
10^{12}	138,74	213,40
10^{13}	141,37	220,54
10^{14}	143,91	227,41
10^{15}	146,37	234,05

(La suite.)

LITERATURA.

Polská sociální pojišťovna. Zakład ubezpieczeń społecznych ve Varšavě, vydala v roce 1935 u příležitosti výpočtu pojistně-matematické bilance ke dni 31. 12. 1932, tabulky pojistně matematických hodnot a základních čísel polského povinného invalidního a starobního pojištění duševních pracovníků. Toto pojištění bylo na celé území Polska rozšířeno dnem 1. 1. 1928; před tím existovalo jen v těch částech Polska, které byly dříve pruské a rakouské.

V předmluvě tabulkové části jsou uvedeny důvody, proč bylo kterých základních čísel použito a také tu je namnoze srovnání zjevů nastalých

[10]) United States Life Tables 1890, 1901, 1910, 1901/10. Washington Government Printing Office 1921.