Aktuárské vědy

Sven Guldberg
Remark on Polya's law

Aktuárské vědy, Vol. 5 (1935), No. 4, 182–184

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144639`

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

A Remark on Polya's law.

Sven Guldberg (Oslo).

Dr. Miloš Vacek has in an interesting paper treated Polya's frequency function.[1]) Dr. Ota Fischer[2]) has by help of the difference equation of the law amongst others given a recurrence formula for the moments. In the following note I shall give a recurrence formula for the semi-invariants of Polya's law.

Given a discontinuous frequency distribution

$$x_i,\ f(x_i)\ \ (i = 0,\ 1, \ldots, n),$$

where $f(x_i)$ is the probability that the variable x will take the value x_i. We will assume that

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i) = 1,$$

that is to say that x must take one of the values x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

The semi-invariants λ_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ introduced by Thiele, is defined by the formal identity in t:

$$e^{\lambda' t + \frac{\lambda_2}{2!} t^2 + \frac{\lambda_3}{3!} t^3 + \ldots} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, e^{x_i t} = \varphi(t).$$

We find

$$\lambda_r = \left(\frac{\partial^r}{\partial t^r} \ln \varphi(t)\right)_{t=0} \tag{1}$$

$\varphi(t)$ is the generating function of the semi-invariants.

The connection with the moments is[3]):

$$e^{\lambda' t + \frac{\lambda_2}{2!} t^2 + \frac{\lambda_3}{3!} t^3 + \ldots} = 1 + \frac{\sigma_1}{1!} t + \frac{\sigma_2}{2!} t^2 + \frac{\sigma_3}{3!} t^3 + \ldots,$$

where

$$\sigma_r = \sum_{i=0}^{n} x_i^r\, f(x_i).$$

We have:

$$\lambda_1 = \sigma_1,\ \lambda_2 = \sigma_2 - \sigma_1^2,\ \lambda_3 = \sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1^3, \ldots$$

Polya's frequency distribution is:

$$f(x) = \binom{\frac{h}{d} - 1 + x}{x} \frac{d^x}{(1+d)^{h/d + x}} \qquad x \geq 0.$$

---

[1]) This journal 1932, R. III, č. 1, p. 18.
[2]) This journal 1933—34, R. IV, č. 4, p. 169.
[3]) J. F. Steffensen: Matematisk Iagttagelseslcere, p. 22.

The generating function of the semi-invariants is:

$$\varphi(t) = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{\frac{h}{d} - 1 + x}{x} \left(\frac{1}{1+d}\right)^{\frac{h}{d}} \left(\frac{de^t}{1+d}\right)^{x} = (1+d)^{-\frac{h}{d}} \left(1 - \frac{de^t}{1+d}\right)^{-\frac{h}{d}}$$

a formula already given by dr. Vacek (l. c. p. 21). Dr. Vacek has not called attention to $\varphi(t)$'s connection with the semi-invariants.

Introducing this value of $\varphi(t)$ in (1) and putting $\frac{d}{1+d} = a$ we have

$$\lambda_r = \frac{\partial^r}{\partial t^r} \left\{ \left(-\frac{h}{d}\right) [ln\,(1 - ae^t) + ln\,(1+d)] \right\}_{t=0}.$$

We have (d being independant of t):

$$\lambda_r = \frac{\partial^{r-1}}{\partial t^{r-1}} \left\{ \left(-\frac{h}{d}\right) \cdot \frac{-ae^t}{1 - ae^t} \right\}_{t=0}. \tag{2}$$

Putting

$$-\frac{d}{h}\lambda_r = \beta_r$$

we have

$$\beta_r = \frac{\partial^{r-1}}{\partial t^{r-1}} \left\{ \frac{-ae^t}{1 - ae^t} \right\}_{t=0}.$$

But

$$a \frac{\partial}{\partial a} \ln\,(1 - ae^t) = \frac{-ae^t}{1 - ae^t}$$

or we have

$$\beta_r = \frac{\partial^{r-1}}{\partial t^{r-1}} \left\{ a \frac{\partial}{\partial a} \ln\,(1 - ae^t) \right\}_{t=0}.$$

Becauxe a is independent of t, we may change the order of derivation and have

$$\beta_r = a \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{\partial^{r-1}}{\partial t^{r-1}} \ln\,(1 - ae^t) \right\}_{t=0} = a \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{\partial^{r-2}}{\partial t^{r-2}} \frac{-ae^t}{1 - ae^t} \right\}_{t=0}.$$

We hawe the recurrence formula for β_r

$$\beta_r = a \frac{\partial}{\partial a} \beta_{r-1}.$$

Substituting $\beta_r = -\frac{d}{h}\lambda_r$, $a = \frac{d}{1+d}$ we get after a little calculation the recurrence formula:

$$\lambda_r = d(1+d) \frac{\partial \lambda_{r-1}}{\partial d} + (1+d)\,\lambda_{r-1}. \tag{3}$$

Putting $r = 1$ in (2) we have

$$\lambda_1 = h.$$

Then we find by help of (3)

$$\lambda_2 = h\,(1 + d)$$
$$\lambda_3 = h\,(1 + d)\,(1 + 2d)$$
$$\lambda_4 = h\,(1 + d)\,(1 + 6d + 6d^3).$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

LITERATURA.

Sociální revue má v čísle 10. resp. 11. současného ročníku v stati značky „jh“ „Zaměstnanost v srpnu (resp. v září) 1935“ důležitá statistická data, důležitá proto, že mnohá jsou dnes měrnými čísly zaměstnanosti. Zejména z materiálu, který ministerstvo sociální péče každý měsíc vyžaduje od nositelů nemocenského pojištění je tu uveden počet všech aktivních pojištěnců pojištěných u nás pro případ nemoci. Některé údaje této jistě velmi pohotové statistiky jsou uvedeny v tabulce:

Počet osob pojištěných u	březen	červen	září
I. nemocenských pojišťoven podléhajících dozoru Ú. S. P.			
1. dělníci	1,644.633	2,014.188	2,023.667
2. úředníci a zřízenci	171.168	171.929	169.106
celkem I.	1,815.801	2,186.117	2,192.773
II. úřednických nemocenských pojišťoven	209.677	212.173	217.390
III. revírních brat. pokladen	102.299	102.207	103.072
celkem I.—III.	2,127.777	2,500.497	2,513.235
IV. nemocenských pojišťoven a fondů st. podniků*)	189.686	198.600	206.074
V. Léčebného fondu veřejných zam. a Kněžské nem. pokl.	210.137	212.230	212.395
celkem IV. a V.	399.823	410.830	418.469
celkem I.—V.	2,527.600	2,911.327	2,931.704

*) Nemocenská pokladna čsl. státních drah, Léčebný fond poštovních zaměstnanců, nemocenské pojišťovny v tabákových továrnách a nemocenský fond st. lesů a statků.