Alf Guldberg

Eine Anwendung der Differenzengleichungen in der theoretischen Statistik

Aktuárské vědy, Vol. 5 (1935), No. 3, 116–128

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144632

Ablauf der ersten zehn Jahre gedeckt werden, wobei ein detailierter Deckungsplan später festgesetzt werden soll. Falls die Entwicklung der Bergarbeiterversicherung von den hier angeführten Voraussetzungen nicht wesentlich abweicht, würde es z. B. genügen, daß die Sanierungsbeiträge und der Zuschuß für eine Gesamtdauer von 30 Jahren eingehoben würden. Die Entscheidung über die weitere Regelung wird mit Recht einer späteren Regierungsverordnung überlassen, bis nämlich die Auswirkung der beantragten Sanierungsvorkehrungen bereits kontrolliert und vor allem auch der tatsächliche Verlauf mit den angenommenen Voraussetzungen verglichen werden kann.*)

Eine Anwendung der Differenzengleichungen in der theoretischen Statistik.

Alf Guldberg (Oslo).

Die theoretische Statistik behandelt, nach v. Mises, Untersuchungen, die darauf hinzielen, eine statistische Aufnahme mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Beziehung zu setzen. Es handelt sich darum zu unterscheiden, ob eine vorgelegte statistische Reihe als der endliche Abschnitt eines Wahrscheinlichkeitsgesetzes aufgefaßt werden kann.

Im folgenden werde ich mir erlauben, einige einfache Bemerkungen über dies Problem zu machen.

Bekanntlich lassen sich viele schwierige Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Lösungen von Differenzengleichungen zurückführen.

Ich werde zeigen, daß man für unser Problem viel Nutzen von der Differenzengleichung der betrachteten Wahrscheinlichkeitsgesetz ziehen kann.

Ich betrachte zuerst das eindimensionale Problem und beschränke mich um die Ideen zu fixieren auf ein von Polya in der Statistik eingeführte Urnenschema.

Dr. F. Eggenberger schreibt[1]) betreffend des Urnenschemas von Polya.

„Die Sätze hingegen, die wir aus dem Urnenschema von Polya herleiten, finden sich in sehr befriedigender Weise bestätigt, und dadurch ist die Brauchbarkeit dieses Schema bewiesen. Eine Untersuchung der Statistik der Erkrankungen an Pocken im Kanton Zürich hat ergeben, daß die Reihen der Erkrankungen auch diesem Schema gemäß auf-

---

*) Siehe eine nachträgliche Mitteilung auf der Seite 144.

[1]) Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 19. Heft, 1924, p. 34.

gebaut sind.“ Dr. Miloš Vacek[2]) und Dr. Ota Fischer[3]) haben weitere interessante Untersuchungen über die Brauchbarkeit von dem Urnenschema von Polya veröffentlicht.

Das Urnenschema von Polya ist:

In einer Urne befinden sich zu Beginn des Spieles a weiße und b schwarze, insgesamt $a + b = N$ Kugeln. Wir ziehen eine Kugel aus der Urne und legen hierauf $1 + \Delta$ Kugeln von der Farbe der Gezogenen in die Urne zurück. Aus der Urne, die nun $N + \Delta$ Kugeln enthält, machen wir einen zweiten Zug und legen wieder um $1 + \Delta$ Kugeln von der Farbe der gezogenen in die Urne zurück. Diese Operation wiederholen wir k-mal.

Die Wahrscheinlichkeit, in k Züge x weiße und $k - x$ schwarze Kugeln zu erhalten, ist dann:

$$f(x) = \binom{k}{x} \frac{a\,(a+\Delta)\ldots[a+(x-1)\,\Delta]\,.\,b\,(b+\Delta)\ldots[b+(k-x-1)\,\Delta]}{N\,(N+\Delta)\ldots[N+(k-1)\,\Delta]}.$$

Ist $\Delta = 0$, hat man das Bernoulli'sche Gesetz, ist $\Delta = -1$, hat man das hypergeometrische Gesetz.

Eine wichtige Aufgabe ist die Momente unseres Gesetzes zu bestimmen, die vollständige und die unvollständige. Sind die Momente in erforderlicher Anzahl bestimmt, ist das Gesetz bestimmt. Die Bestimmung der unvollständigen Momente ist ein schwieriges Problem. Professor Frisch schreibt:[4]) „Dans l'analyse direct des problems relatifs aux moments incomplets de certain distributions importantes par exemple la distribution binomiale et la distribution hypergéometrique on rencontre des très grands difficultés, qui dans bien des cas empêche d'obtenir des exprenions exactes.“

Wir werden sehen, daß die Bestimmung dieser Momente mit Hilfe der Differenzengleichung des Wahrscheinlichkeitsgesetzes sehr einfach ist.

Wir bezeichnen das unvollständige Moment n^{ter} Ordnung (in Beziehung auf Origo) mit

$${}_t\sigma_n = \sum_{x=t}^{x=k} x^n\, f(x);$$

ist $t = 0$, hat man das (vollständige) Moment n^{ter} Ordnung. Polya's Gesetz befriedigt die Differenzengleichung:

$$f(x+1) = \frac{(k-x)\,(a+\Delta x)}{(x+1)\,[b+(k-x-1)\,\Delta]}\, f(x).$$

---

[2]) Dieser Journal, 1932, p. 18.
[3]) Dieser Journal, 1934, p. 169.
[4]) Det norske Videnskabs-Akademi. II, 1926, Nr. 3, p. 25.

Wir schreiben diese Gleichung:

$$(b+\Delta k)(x+1)f(x+1)-\Delta(x+1)^2 f(x+1)=$$
$$= ka\, f(x)+(k\Delta-a)\, x\, f(x)-\Delta x^2 f(x).$$

Wir multiplicien die Gleichung mit:

$$(x+1)^{n-1}=x^{n-1}+\binom{n-1}{1}x^{n-2}+\binom{n-1}{2}x^{n-3}+\ldots+1.$$

und erhalten:

$$(b+\Delta k)(x+1)^n f(x+1)-\Delta(x+1)^{n+1} f(x+1)=$$
$$= ka\, x^{n-1}+\binom{n-1}{1}x^{n-2}+\ldots+1\, f(x)+$$
$$+(k\Delta-a)\left(x^n+\binom{n-1}{1}x^{n-1}+\ldots+x\, f(x)\right)-$$
$$-\Delta\left[x^{n+1}+\binom{n-1}{1}x^4+\ldots+x^2\right]f(x).$$

Wir summieren hier von $x=t$ bis $x=k$ und bemerken, daß

$$\sum_{x=t}^{x=k}(x+1)^n f(x+1)=\sum_{x=t}^{x=k}x^n f(x)-t^n f(t)={}_t\sigma_n-t^n f(t),$$

wir erhalten die Rekursionsformel für ${}_t\sigma_n$:

$$(b+\Delta k)\left[{}_t\sigma_n-t^n f(t)\right]-\Delta\left[{}_t\sigma_{n+1}-t^{n+1} f(t+1)\right]=$$
$$= ka\left[{}_t\sigma_n+\binom{n-1}{1}{}_t\sigma_{n-2}+\ldots+{}_t\sigma_0\right]+$$
$$+(k\Delta-a)\left[{}_t\sigma_{n-1}+\binom{n-1}{1}{}_t\sigma_{n-1}+\ldots+{}_t\sigma_1\right]-$$
$$-\Delta\left[{}_t\sigma_{n+1}+\binom{n-1}{1}{}_t\sigma_n+\ldots+{}_t\sigma_0\right].$$

Setzen wir $t=0$, erhalten wir die Rekursionsformel für das Moment n^{ter} Ordnung:

$$\left[a+b+\Delta\binom{n-1}{1}\right]\sigma_n=ka\left[\sigma_{n-1}+\binom{n-1}{1}\sigma_{n-2}+\ldots+1\right]+$$
$$+(k\Delta-a)\left[\binom{n-1}{1}\sigma_{n-1}+\binom{n-1}{2}\sigma_{n-2}+\ldots+\sigma_1\right]-$$
$$-\Delta\left[\binom{n-1}{2}\sigma_{n-1}+\binom{n-1}{3}\sigma_{n-2}+\ldots+\sigma_2\right].$$

Für $n=1$, haben wir

$$\sigma_1=k\frac{a}{a+b}.$$

Für $n = 2$, haben wir

$$\sigma_2 = \frac{ka\,(ka + b + k\Delta)}{(a + b)\,(a + b + \Delta)}$$

u. s. w. Setzen wir $\frac{a}{N} = p, \frac{\Delta}{N} = \delta$, können wir die Formel schreiben:

$$\left[1 + \delta \binom{n-1}{1}\right] \sigma_n = kp \left[\sigma_{n-1} + \binom{n-1}{1} \sigma_{n-2} + \ldots + 1\right] +$$
$$+ (k\delta - p) \left[\binom{n-1}{1} \sigma_{n-1} + \binom{n-1}{2} \sigma_{n-2} + \ldots + \sigma_1\right] -$$
$$- \delta \left[\binom{n-1}{2} \sigma_{n-1} + \binom{n-1}{3} \sigma_{n-2} + \ldots + \sigma_2\right].$$

Betrachten wir den Grenzfall des Gesetzes von Polya, wo

$$k \to \infty,\ k\delta = d,\ \delta \to 0,\ kp = h,\ p \to 0,$$

und
$$f(x) = \binom{\frac{h}{d} + x - 1}{x} \frac{d^x}{(1 + d)^{\frac{h}{d} + x}},$$

so erhalten wir für das Moment n^{ter} Ordnung:

$$\sigma = h \left[\sigma_{n-1} + \binom{n-1}{1} \sigma_{n-2} + \ldots + 1\right]$$
$$d \left[\binom{n-1}{1} \sigma_{n-1} + \binom{n-1}{2} \sigma_{n-2} + \ldots + \sigma_1\right],$$

eine Formel, die Dr. Ota Fischer (l. c. p. 170) aufgestellt hat. Außer den Momenten sind auch die Faktorielsummen und die Halb-Invarianten wichtig.

Wir bezeichnen mit Professor Steffensen die Faktorielsummen

$$\sigma_{(r)} = \sum_{x=\nu}^{k} x\,(x-1)\,(x-2) \ldots (x - r + 1)\, f(x).$$

Die Faktorielsummen drücken sich eindeutig aus durch die Momente und umgekehrt; man hat:

$$\sigma_{(1)} = \sigma_1$$
$$\sigma_{(2)} = \sigma_2 - \sigma_1$$
$$\sigma_{(3)} = \sigma_3 - 3\sigma_2 + 2\sigma_1$$

u. s. w. Für das Gesetz von Polya findet man

$$\sigma_{(1)} = kp$$
$$\sigma_{(2)} = k(k-1)\frac{p(p+\delta)}{1(1+\delta)}$$
$$\sigma_{(3)} = k(k-1)(k-2)\frac{p(p+\delta)(p+2\delta)}{1.(1+\delta)(1+2\delta)}.$$

u. s. w. Die Halb-Invarianten, eingeführt von Thiele, sind definiert durch die formelle Identität:

$$e^{\lambda_1 t + \lambda_2 \frac{t^2}{1.2} + \dots} = 1 + \frac{\sigma_1}{1} t + \frac{\sigma_2}{1.2} t^2 + \dots$$

Man erhält für die ersten Halb-Invarianten:

$$\lambda_1 = \sigma_1, \ \lambda_2 = \sigma_2 - \sigma_1^2, \ \lambda_3 = \sigma_3 - 3\sigma_2\sigma_1 + 2\sigma_1^3,$$

u. s. w. Für Polya's Gesetz sind

$$\lambda_1 = kp, \ \lambda_2 = kp(1-p)\frac{1+k\delta}{1+\delta}.$$

Wir werden Kriterien aufstellen, die eine statistische Reihe erfüllen müssen, um durch das Gesetz von Polya dargestellt werden zu können. Wir schreiben die Differenzengleichung, die Polya's Gesetz befriedigt, folgendermaßen:

$$(1 + k\delta - p)(x+1)f(x+1) - \delta(x+1)^2 f(x+1) =$$
$$= [kp + (k\delta - p)x - \delta x^2] f(x).$$

Wir müssen die Ausdrücke: $k\delta - p$, kp, δ durch die Momente, Faktorielsummen oder Halb-Invarianten ausdrücken. In unserem Falle geschieht das am leichtesten durch die Faktorielsummen.

Wir haben unmittelbar

$$kp = \sigma_{(1)}$$

und finden leicht die 2 Gleichungen

$$\delta[(\sigma_{(2)} + \sigma_{(1)})] - (k\delta - p)\sigma_1 = \sigma_{(1)}^2 - \sigma_{(2)}$$
$$\delta[(2\sigma_{(3)} + 4\sigma_{(1)})] - (k\delta - p)2\sigma_1 = \sigma_{(1)}\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}.$$

Aus diesen Gleichungen finden wir:

$$\delta = \frac{\sigma_{(1)}^2\sigma_{(2)} + \sigma_{(1)}\sigma_{(3)} - 2_{(2)}^2}{2[\sigma_{(2)}^2 - \sigma_{(1)}\sigma_{(2)} - \sigma_{(1)}\sigma_{(3)}]},$$

$$k\delta - p = \frac{\sigma_{(1)}\sigma_{(2)}^2 - \sigma_{(1)}\sigma_{(3)} - 2\sigma_{(1)}^2\sigma_{(2)} - 3\sigma_{(1)}^2\sigma_{(2)} + \sigma_{(2)}\sigma_{(3)} + 4\sigma_{(2)}^2}{2[\sigma_{(1)}\sigma_{(2)} + \sigma_{(1)}\sigma_3 - \sigma_{(2)}^2]}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke für $k\delta - p$, kp, δ in unsere Differenzengleichung ein, können wir die Gleichung folgendermaßen schreiben:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}(x+1)\,[2\sigma_{(1)}\sigma_{(2)}+\sigma_{(1)}\sigma_{(3)}+2\sigma_{(2)}{}^2-3\sigma_{(1)}{}^2\sigma_{(2)}-2\sigma_{(1)}{}^2\sigma_{(3)}+$$
$$+\sigma_{(1)}\sigma_{(2)}{}^2+\sigma_{(2)}\sigma_{(3)}]$$
$$+\frac{f(x+1)}{f(x)}(x+1)^2[\sigma_{(1)}{}^2\sigma_{(2)}+\sigma_{(1)}\sigma_{(2)}-2\sigma_{(3)}{}^2]+x[3\sigma_{(1)}{}^2\sigma_{(2)}+2\sigma_{(1)}{}^2\sigma_{(2)}-$$
$$-\sigma_{(1)}\sigma_{(2)}{}^2-4\sigma_{(2)}{}^2-\sigma_{(2)}\sigma_{(3)}+\sigma_{(1)}\sigma_{(3)}]+x^2[2\sigma_{(2)}{}^2-\sigma_{(1)}{}^2\sigma_{(2)}-\sigma_{(1)}\sigma_{(3)}]=$$
$$=2\,[\sigma_{(1)}\sigma_{(2)}+\sigma_{(1)}\sigma_{(3)}-\sigma_{(2)}{}^2]\,\sigma_{(1)}.$$

Drücken wir die Faktorielsummen durch die Momente aus, lautet die Gleichung:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}(x+1)\,[(\sigma_1{}^2-\sigma_2)(\sigma_2-\sigma_3)-\sigma_1(\sigma'\sigma_3-\sigma_2{}^2)]+$$
$$+\frac{f(x+1)}{f(x)}(x+1)^2\,[(\sigma_1\sigma_3-\sigma_2{}^2)-(\sigma_1{}^2-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)]+$$
$$+x\,[(\sigma_1+\sigma_2)(\sigma_1\sigma_3-\sigma_2{}^2)-(\sigma_1{}^2-\sigma_2)(\sigma_2-\sigma_3)]+$$
$$+x^2\,[(\sigma_1{}^2-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)-(\sigma_1\sigma_3-\sigma_2{}^2)]=2\sigma_1\,[\sigma_1\sigma_3-\sigma_2{}^2].$$

Führen wir die Halb-Invarianten ein, lautet die Gleichung:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}(x+1)\,[(\lambda_1{}^2-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)+2\lambda_1\lambda_2(2\lambda_2-\lambda_1)]+$$
$$+\frac{f(x+1)}{f(x)}(x+1)^2\,(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-2\lambda_2{}^2)+$$
$$+x\,[(\lambda_1{}^2-\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)+2\lambda_1(\lambda_1\lambda_2-2\lambda_2{}^2+\lambda_3)]+$$
$$+x^2\,[2\lambda_2{}^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3]=2\lambda_1\,[\lambda_1{}^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2{}^2].$$

Bezeichnen wir die linke Seite dieser Gleichung mit $\psi(x)$, sehen wir, daß $\psi(x)$ für alle Werte $x=0, 1, \ldots, k$ des Polya'schen Gesetzes konstant gleich $2\lambda_1\,[\lambda_1{}^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2{}^2]$ ist, oder der Quotient

$$\psi(x):2\lambda_1\,(\lambda_1{}^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2{}^2)\equiv\alpha(x)$$

für alle x gleich eins sein soll.

Haben wir eine statistische Reihe $[H_i(x_i),\ x_i]$ vorgelegt, und wollen wir untersuchen, inwieweit die Reihe durch das Polya'sche Gesetz approximiert werden kann, bilden wir die drei ersten Halb-Invarianten der Reihe $\overline{\lambda}_1$, $\overline{\lambda}_2$, $\overline{\lambda}_3$ und die entsprechenden Ausdrücke $\alpha_i(x_i)$. Soll die Reihe durch das Polya'sche Gesetz approximiert werden, müssen für alle x der Reihe die $\alpha_i(x_i)$ um eins oszillieren. — Beispiel: Professor Karl Pearson hat die Reihe gegeben:

x:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$H(x)$:	215	1724	5262	7440	6371	2450	852	166	20	0

$H(x)$ ist die Anzahl Male, daß die erste Hand in Whist x Trumphe bei 25.000 Kartenspiele erhalten hat. In diesem Falle dürfte die Reihe durch das Polya'sche Gesetz dargestellt werden, nämlich für $a = 13$, $b = 39$, $k = 13$, $\Delta = -1$. Man findet auch für die $\alpha(x)$:

x_i:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\alpha_i(t_i)$:	1,01	1,01	0,96	1,02	0,99	1,02	1,02	1,0	0,84

Die theoretische Werte für das Polya'sche Gesetz sind:

x:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$25.000\, f(x)$:	320	2002	5147	7158	5965	3117	1039	220	29	2

Die Theorie der diskontinuierlichen zweidimensionalen Verteilungen ist ziemlich negligiert, trotzdem daß alle Statistiker die Bedeutung dieser Theorie hervorheben.

Es ist der Verdienst von Tschuprow eine klare und strenge Definition des Wesens der stochastischen Abhängigheit von zwei zufälligen Variabeln gegeben zu haben.

„Das Wesen der stochastischen Verbundenheit zwischen zwei zufälligen Variablen besteht darin, daß die möglichen Werte der einen Variablen in Verbindung mit verschiedenen möglichen Werten der anderen Variablen auftreten und daß jeder solchen Kombination eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zukommt. Die Gesamtheit der verschiedenen Kombinationen der möglichen Werte der beiden Variablen und der diesen Kombinationen zukommenden Wahrscheinlichkeiten wollen wir als das Abhängigkeitsgesetz der Variablen bezeichnen.

Ist das Abhängigkeitsgesetz gegeben, so kennt man alles, was über die stochastische Verbundenheit zwischen den Variablen ausgesagt werden kann. Alles übrige läßt sich aus dem Abhängigkeitsgesetze deduzieren. Man darf mithin die Bestimmung des Abhängigkeitsgesetzes als die eigentliche Hauptaufgabe der Forschung betrachten."

Ich werde heute einige Bemerkungen über dieses Hauptproblem machen.

Ich betrachte um die Ideen zu fixieren eine einfache, diskontinuierliche, zweidimensionale Verteilung. Wir haben schon gesehen, daß in dem Studium der eindimensionalen Verteilungen die Differenzengleichung des Verteilungsgesetzes ein ausgezeichnetes Mittel bildet.

Ich werde jetzt zeigen, wie auch im Studium der zweidimensionalen Verteilungen die Differenzengleichung eine wichtige Rolle spielt.

Es sind in dieser Theorie wie in der Theorie der eindimensionalen Verteilungen, zwei wichtige Probleme, nämlich erstens die Momente des Verteilungsgesetzes durch die Konstanten des Gesetzes zu bestimmen; zweitens Kriterien aufzustellen, die angeben, inwieweit eine gegebene Korrelationstabelle durch ein theoretisches Verteilungsgesetz approximiert werden kann.

Ich werde zeigen, wie diese beiden Probleme in einfacher Weise bei Hilfe der Differenzengleichung des Verteilungsgesetzes gelöst werden können. Ich bezeichne mit $f(x, y)$ die zweidimensionale Verteilung von den Variabeln x und y und mit $\sigma_{f/g}$ die Momente $(f+g)^{\text{ter}}$ Ordnung der Verteilung, das heißt die mathematische Erwartung des Produktes der f^{ten} Potenz von x in die g^{te} Potenz von y, so daß

$$\sigma_{f/g} = Ex^f g^g = \Sigma\Sigma x^f g^g f(x, y).$$

Ferner bezeichnen wir mit:

$$m_{f/g} = E(x-\sigma_{10})^f (y-\sigma_{01})^g = \Sigma\Sigma(x-\sigma_{10})^f (y-\sigma_{01})^g f(x, y)$$

und

$$r_{f/g} = \frac{m^{f/g}}{m_{20}^{\frac{1}{2}f} m_{02}^{\frac{1}{2}g}}.$$

Wenn $g = 0$ gesetzt, so erhalten wir die entsprechende Parameter, durch welche das Verteilungsgesetz von x charakterisiert wird. Wird $f = 0$ gesetzt, so erhalten wir die Parameter des Verteilungsgesetzes von y. So ist σ_{10} die mathematische Erwartung von x, σ_{01} die mathematische Erwartung von y; $\sqrt{m_{20}}$ die Streuung von x, $\sqrt{m_{0}}$, die Streuung von y.

Ist die Verteilung $f(x, y)$ gegeben, lassen sich alle die Parameter eindeutig bestimmen. Umgekehrt läßt sich die Verteilung eindeutig bestimmen, falls die Parameter σ in zweckdienlicher Auswahl und erforderlicher Anzahl gegeben sind.

Der erste der r-Parameter ist der Korrelationskoeffizient:

$$r_{11} = \frac{m_{11}}{\sqrt{m_{10} m_{02}}} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{10}\sigma_{01}}{\sqrt{(\sigma_{20} - \sigma_{10}^2)(\sigma_{02} - \sigma_{01}^2)}}.$$

Kennen wir einige von diesen Parameter haben wir ein erstes Kenntnis unserer Verteilung.

Beim Studium einer Verteilung einer Variable verlangt man wenigstens das Kenntnis der zwei ersten der Momente, die mathematische Erwartung und die Streuung.

Es ist merkwürdigerweise oft der Fall, daß man bei der viel komplizierter Theorie der Verteilungen zweier Variablen meint, daß einer dieses Parameter der Korrelationskoeffizient ein Maß der Abhängigkeitsgesetz liefert. In einer neulich erschienenen Abhandlung (März 1933) steht:

„La liaison est faible, si

$$-0{,}5 < r < -0{,}3 \text{ ou } 0{,}5 > r > 0,\ 3.$$

il n'y a pas liaison entre les deux phénomènes si

$$-0{,}3 < r < 0{,}3$$

und später: la dépendance ou corrélation est plus forte dans le cas où l'on trouve 0,80 que dans le cas où l'on trouve 0,6.“

Außer den oben angeführten Parameter werden wir auch die Halb-Invarianten λ_{ik} unser Verteilung einführen. Wir definieren sie bei der formalen Identität:

$$e^{1(\lambda_{10}u+\lambda_{01}v)+\frac{1}{1.2}[\lambda_{10}u^2+2\lambda_{11}uv+\lambda_{02}v^2]+\dots} = \Sigma\Sigma f(x, y)\, r^{xu+vv} = 1 +$$
$$+ 1\,[\sigma_{10}u + \sigma_0{}'\nu] + \frac{1}{1\,.\,2}[\sigma_{20}u^2 + 2\sigma_{11}u\,.\,\nu + \sigma_{12}\nu^2] + .$$

Wir finden für die erste Halb-Invarianten:

$$\lambda_{10} = \sigma_{10},\ \lambda_{01} = \sigma_{01},\ \lambda_{10} = \sigma_{20} - \sigma_{10}{}^2,\ \lambda_{11} = \sigma_{11} - \sigma_{10}\sigma_{01},$$
$$\lambda_{02} = \sigma_{02} - \sigma_{01}{}^2$$

u. s. w. Wir betrachten folgendes Urnenschema, das eine direkte Verallgemeinerung von Polya's Schema in einer Variable ist.

Eine Urne enthält a weiße, b schwarze und c rote Kugel, $a + b + c = N$. Man macht eine Reihe von Ziehungen von Kugeln. Nach jedem Zug legt man in der Urne anstatt die gezogene Kugel $1 + \Delta$ Kugel von derselben Farbe wie die gezogene Kugel.

Die Wahrscheinlichkeit x weiße, y schwarze Kugel in k Züge zu erhalten, ist:

$$f(x, y) = \frac{k!}{x!\,y!\,(k - x - y)!} \times$$
$$\times \frac{a\,(a + \Delta)\dots[a + (x - 1)\,\Delta]\,.\,b\,(b + \Delta)\dots}{N\,(N + \Delta)\dots} \times$$
$$\times \frac{\dots[b + (y - 1)\,\Delta]\,.\,c\,.\,(c + \Delta)\dots[c + (k - x - y - 1)\,\Delta)]}{\dots(N + (k - 1)\,\Delta)}.$$

Für $\Delta = 0$ hat man die Bernoulli'sche Verteilung, für $\Delta = -1$ die hypergeometrische Verteilung.

$f(x, y)$ genügt die zwei Differenzengleichungen:

$$(x + 1)\,[c + (k - x - y - 1)\,\Delta]\,f(x + 1, y) =$$
$$= (a + \Delta x)\,(k - x - y)\,f(x, y),$$
$$(y + 1)\,[c + (k - x - y - 1)\,\Delta]\,f(x, y + 1) =$$
$$= (b + \Delta y)\,(k - x - y)\,f(x, y).$$

Wir setzen

$$\frac{a}{N} = p,\ \frac{b}{N} = q,\ \frac{c}{N} = 1 - p - q,\ \frac{\Delta}{N} = \delta.$$

Wir können da die 2 Gleichungen folgendermaßen schreiben:

$$(1 - p - q + k\delta)\,(x + 1)\,f(x + 1, y) - \delta(x + 1)^2 f(x + 1, y) -$$
$$- \delta(x + 1)\,y\,f(x + 1, y) =$$
$$= kp\,f(x, y) + (\delta k - p)\,x\,f(x, y) - py\,f(x, y) - \delta xy\,f(x, y) - dx^2 f(x, y)$$

$$(1-p-q+k\delta)(y+1)f(x,y+1)-\delta(y+1)^2 f(x,y+1)-$$
$$-\delta(y+1)\,x\,f(x,y+1)=$$
$$=kq\,f(x,y)+(\delta k-q)\,y\,f(x,y)-qx\,f(x,y)-\delta xx\,f(x,y)-\delta y^2 f(x,y).$$

Wir können nun von diesen Differenzengleichungen Rekursionsformeln für die Momente, ganz wie im Falle einer Variablen, erhalten. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $(x+1)^{n-1}y^r$ und die zweite Gleichung mit $x^r(y+1)^{n-1}$ und summieren über alle möglichen Werte von x und y.

Wir erhalten:

$$(1-p-q+k\delta)\,\sigma_{n,r}-\delta\sigma_{n+1,r}-\delta\sigma_{n,r+1}=$$
$$=kp\left[\sigma_{n+1,r}+\binom{n-1}{1}\sigma_{n-2r,}+\ldots+\sigma_{0,\nu}\right]+$$
$$+(\delta k-p)\left[\sigma_{n,r}+\binom{n-1}{1}\sigma_{n-1,\nu}+\ldots+\sigma_{1,\nu}\right]-$$
$$-p\left[\sigma_{n-1,\nu+1}+\binom{n-1}{1}\sigma_{n-2\nu+1}+\ldots+\sigma_{0,\nu+1}\right]-$$
$$-\delta\left[\sigma_{,\nu n+1}+\binom{n-1}{1}\sigma_{n-1,r+1}+\ldots+\sigma_{1,\nu+1}\right]-$$
$$-\delta\left[\sigma_{n+1,r}+\binom{n-1}{1}\sigma_{n+r}+\ldots+\sigma_{1,r+1}\right],$$

$$(1-p-q+k\delta)\,\sigma_{r,n}-\delta\sigma_{r,n+1}-\delta\sigma_{r+1,n}=$$
$$=kq\left[\sigma_{r,n-1}+\binom{n-1}{1}\sigma_{r,n-2}+\ldots+\sigma_{r,0}\right]+$$
$$+(\delta k-q)\left[\sigma_{r,n}+\binom{n-1}{1}\sigma_{r,n-1}+\ldots+\sigma_{r,1}\right]-$$
$$-q\left[\sigma_{r+1,n-1}+\binom{n-1}{1}\sigma_{r+1,n-2}+\ldots+\sigma_{r+1,0}\right]+$$
$$-\delta\left[\sigma_{r+1,n}+\binom{n-1}{1}\sigma_{r+1,n-1}+\ldots+\sigma_{r+1,1}\right]-$$
$$-\delta\left[\sigma_{r,n+1}+\binom{n-1}{1}\sigma_{r,n}+\ldots+\sigma_{r,2}\right].$$

Setzen wir $n=1$, $r=0$ erhalten wir, nach einer leichten Reduktion:

$$(1-q)\,\sigma_{1,0}+p\sigma_{0,1}=pk,$$
$$q\sigma_{1,0}+(1-p)\,\sigma_{0,1}=qk$$

oder:

$$\sigma_{1,0}=kp,\ \ \sigma_{0,1}=kq.$$

Setzen wir $n = 2$, $r = 0$, erhalten wir:

$$(1 - q + \Delta)\,\sigma_{2,0} + (p + \delta)\,\sigma_{1,1} = pk + (k\delta - p)\,\sigma_{1,0} - p\sigma_{0,1} + pk\sigma_{1,0}.$$
$$(1 - p + \Delta)\,\sigma_{0,2} + (q + \delta)\,\sigma_{1,1} = qk + (k\delta - q)\,\sigma_{1,0} - q\sigma_{1,0} + qk\sigma_{0,1},$$

Setzen wir $n = 1$, $r = 1$ in die erste Gleichung erhalten wir

$$(1 - q)\,\sigma_{1,1} + p\sigma_{0,2} = pk\sigma_{0,1}.$$

Aus diesen drei Gleichungen erhalten wir:

$$\sigma_{2,0} = \frac{1 + k\delta}{1 + \delta}\,kp\,(1 - p) + (kp)^2,\quad \sigma_{0,2} = \frac{1 + k\delta}{1 + \delta}\,kq\,(1 - q) + (kq)^2,$$

$$\sigma_{1,1} = \frac{1}{1 + \delta}\,k\,(k - 1)\,pq.$$

Ferner erhalten wir für die ersten Halb-Invarianten:

$$\lambda_{1,0} = kp,\ \lambda_{0,1} = kq,\ \lambda_{2,0} = \frac{1 + k\delta}{1 + \delta}\,kp\,(1 - p),$$

$$\lambda_{0,2} = \frac{1 + k\delta}{1 + \delta}\,kq\,(1 - q),\ \lambda_{1,1} = -\frac{1 + k\delta}{1 + \delta}\,kpq,$$

und den Korrelationskoeffizient:

$$r_{1,1} = \frac{\lambda_{1,1}}{\sqrt{\lambda_{2,0}\cdot\lambda_{0,2}}} = -\sqrt{\frac{p\cdot q}{(1 - p)(1 - q)}}.$$

Der Korrelationskoeffizient ist also unabhängig von Δ, d. h. der Korrelationskoeffizient ist derselbe entweder die Wahrscheinlichkeiten sind unabhängig, Bernoullis' Schema $\Delta = 0$, oder die Wahrscheinlichkeiten sind verkettet, $\Delta \neq 0$.

Wir werden jetzt die Konstanten p, q, k, δ unserer Verteilung durch die Halb-Invarianten ausdrücken. Wir verifizieren leicht, daß:

$$k = \frac{\lambda_{10}\lambda_{11} - \lambda_{20}\lambda_{01}}{\lambda_{11}} \equiv \nabla.$$

Wir finden:

$$p = \frac{\lambda_{10}}{\nabla},\ q = \frac{\lambda_{01}}{\nabla},\ \delta = -\frac{\lambda_{10}\lambda_{01} + \lambda_{11}\,\nabla}{\nabla\,[\lambda_{11} + \lambda_{10}\lambda_{01}]}.$$

Führen wir diese Ausdrücke für p, q, k, δ in die Differenzengleichungen unserer Verteilung ein, können die Differenzengleichungen folgendermaßen geschrieben werden:

$$[\lambda_{11}\,(\nabla - \lambda_{10} - \lambda_{01}) - \lambda_{10}\lambda_{01}\,(\lambda_{10} + \lambda_{01}) - \lambda_{11}\nabla^2]\,\frac{(x + 1)\,f(x + 1, y)}{f(x, y)} +$$

$$+ (\lambda_{10}\lambda_{01} + \lambda_{11}\nabla)\,\frac{(x + 1)^2\,f(x + 1, y)}{f(x, y)} + (\lambda_{10}\lambda_{01} + \lambda_{11}\nabla)\,\times$$

$$\times\,\frac{(x + 1)\,y\,f(x + 1, y)}{f(x, y)} +$$

$$+ [\lambda_{10}\lambda_{01}(\nabla + \lambda_{10}) + \lambda_{11}(\nabla^2 + \lambda_{10})]\, x + \lambda_{10}(\lambda_{10}\lambda_{01} + \lambda_{11}\nabla)\, y -$$
$$- (\lambda_{10}\lambda_{01} + \lambda_{11}\nabla)\, yx - (\lambda_{10}\lambda_{01} + \lambda_{11}\nabla)^2 = \lambda_{10}\nabla(\lambda_{11} + \lambda_{10}\lambda_{01}),$$

$$\lambda_{11}(\nabla - \lambda_{10} - \lambda_{01}) - \lambda_{10}\lambda_{01}(\lambda_{10} + \lambda_{01}) - \lambda_{11}\nabla^2)\, \frac{(y+1)\, f(x, y+1)}{f(x, y)} +$$
$$+ (\lambda_{10}\lambda_{01} + \lambda_{11}\nabla)\frac{(y+1)^2 f(x, y+1)}{f(x, y)} + (\lambda_{10}\lambda_{01} + \lambda_{11}\nabla) \times$$
$$\times \frac{(y+1)\, x\, f(x, y+1)}{f(x, y)} +$$
$$+ [\lambda_{10}\lambda_{01}(\nabla + \lambda_{01}) + \lambda_{11}(\nabla^2 + \lambda_{01})]\, y + \lambda_{01}(\lambda_{10}\lambda_{01} + \lambda_{11}\nabla)\, y -$$
$$- (\lambda_{10}\lambda_{01} + \lambda_{11}\nabla)\, xy - (\lambda_{10}\lambda_{01} + \lambda_{11}\nabla)\, y^2 = \lambda_{01}\nabla(\lambda_{11} + \lambda_{10}\lambda_{01}).$$

Bezeichnen wir die linke Seiten dieser Gleichungen mit $\psi_1(x, y)$ und $\psi_2(x, y)$, müssen für alle mögliche x und y unsere Verteilung die Quotienten:

$$\frac{\psi_1(x, y)}{\nabla\lambda_{10}(\lambda_{11} + \lambda_{10}\lambda_{01})} \equiv \alpha_1(x, y),$$
$$\frac{\psi_2(x, y)}{\nabla\lambda_{01}(\lambda_{11} + \lambda_{10}\lambda_{01})} \equiv \alpha_2(x, y)$$

konstant gleich eins sein. Es sei eine statistische Reihe $[H_{ij}(x_i, y_j), x_i y_j]$ vorgelegt. Wir versuchen diese Reihe durch unsere theoretische Verteilung zu erklären.

Wir bilden die erste Halb-Invarianten unserer Reihe: λ_0, λ_{01}, λ_{20}, λ_{11}, λ_{02} und die oben besprochenen Ausdrücke $\alpha_1(x_i y_j)$, $\alpha_2(x_i y_j)$ für alle $x_i y_j$ unserer Reihe. Approximieren alle $\alpha(x, y)$ eins, darf die Reihe durch unsere Verteilung approximiert werden.

Beispiel. Man hat die Anzahl von Pick und Treff bei ersten Hand in Whist notiert. 2000 Whist Spiele sind gespielt.

In folgender Tabelle bezeichnet x die Anzahl Male, die die erste Hand Pick erhalten hat, und y die Anzahl Male, die die erste Hand Treff erhalten hat.

Aus der Natur der Versuche darf man voraussetzen, daß die erhaltene Tabelle durch das von uns betrachtete Wahrscheinlichkeitsgesetz für $a = 13$, $b = 13$, $c = 26$, $k = 13$, $\Delta = -1$ approximiert werden kann.

Die theoretische Halb-Invarianten sind in diesem Falle:

$$\lambda_{10} = \lambda_{01} = 3{,}25;\ \lambda_{20} = \lambda_{02} = 12{,}43;\ \lambda_{11} = 9{,}44.$$

Der theoretische Korrelationskoeffizient ist

$$r_{11} = -0{,}33.$$

Die theoretische marginale Verteilungen sind in diesem Falle von der Form:

$$F(x) = \frac{\binom{13}{x}\binom{39}{k-x}}{\binom{52}{13}}.$$

$2000\,F(x)$:	26	160	412	573	477	249	83	18	2	0
x:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

		$x =$										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summ
$y =$	0	—	1	4	9	11	7	5	5	—	—	42
	1	—	6	12	42	49	31	14	9	1	—	164
	2	2	18	69	87	116	59	32	13	1	—	397
	3	7	50	110	191	137	57	20	—	—	—	572
	4	10	49	112	135	95	13	2	—	—	—	448
	5	14	37	83	60	48	13	2	—	—	—	257
	6	7	17	31	21	5	1	3	—	—	—	85
	7	2	6	11	6	2	1	—	—	—	—	28
	8	2	—	2	1	1	—	—	—	—	—	6
	9	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Summ	45	134	434	552	464	203	86	30	2	—	2000

Aus der Tabelle findet man für die Halb-Invarianten folgende Werte: $\lambda_{10} = \sigma_{10} = 3{,}16$; $\lambda_{01} = \sigma_{01} = 3{,}26$; $\lambda_{20} = 12{,}04$; $\lambda_{02} = 12{,}70$; $\lambda_{11} = 9{,}56$, und den Korrelationskoeffizient

$$r_{11} = -0{,}35.$$

Man hat keine schlechte Übereinstimmung mit den theoretischen Halb-Invarianten Korrelationskoeffizient und marginalen Verteilungen.

Ich gebe einige Werte von $\alpha_1(x, y)$:

$$\alpha_1(1{,}3) = 0{,}7,\ \alpha_1(1{,}4) = 0{,}8,\ \alpha_1(1{,}5) = 0{,}7;$$
$$\alpha_1(3{,}2) = 1{,}7,\ \alpha_1(4{,}2) = 0{,}8,\ \alpha_1(5{,}2) = 0{,}9;$$
$$\alpha_1(3{,}3) = 0{,}8,\ \alpha_1(4{,}3) = 0{,}7,\ \alpha_1(5{,}3) = 0{,}9.$$

Die übrige α Werte oszillieren in derselben Weise um eins.