Aktuárské vědy

J. Wertheimer

Le risque moyen d'une assurance générale

Aktuárské vědy, Vol. 5 (1935), No. 1, 47–53

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144622

bedingt ist. Speziell ist der Fall interessant, bei dem zwischen Konsum und Produktion der Gütergattung D die Gütergattungen $D_1, D_2, \ldots, D_n$ einschalten werden, welche zwar nicht direkt für den Konsum bestimmt sind, die man aber notwendig bei der Produktion der Gütergattung D braucht. Analytische Beschreibung dieses Problems erfordert die Lösung eines Systems der simultanen Volterra'schen Integralgleichungen.

§ 2. — Es bleibt noch die Frage offen, was für Bedeutung die angeführten theoretischen Erwägungen für die wirtschaftliche Praxis haben. Dieses wollen wir auf folgender Art erläutern: In jeder Wirtschaft ist die Industrie gezwungen dem Konsum voranzueilen und Produktionsreserven zu bilden und deswegen ist es notwendig verschiedene Voraussetzungen über den künftigen Verbrauch (und zwar manchmal auf lange Zeit voraus) zu machen. Unser Ziel war diese Voraussetzungen klar zu formulieren und eine theoretische Grundlage für sie zu geben.

Le risque moyen d'une assurance générale.

Par *J. Wertheimer* à Paris.

La présente étude a pour but de généraliser les formules employées pour déterminer le risque moyen d'une assurance. Les développements qui vont suivre aboutissent à l'établissement de formules qui permettent, outre l'évaluation du risque moyen dans les cas déjà connus, celles des autres cas qui sortent du cadre des formules déjà existantes.

Nous utilisons pour ce travail la combinaison d'assurance générale élaborée par Monsieur A. Loewy,[1]) qui est basée sur un schéma comportant n causes de sortie s'excluant les unes des autres. Nous nous servons dans nos calculs des intégrales de Stieltjes, que Monsieur A. Loewy[2]) a introduites le premier dans les mathématiques d'assurances.

Une personne agée de y années s'assure pour une durée de p années moyennant le paiement de la prime continuelle $P_{[y]+t}$, de manière que la compagnie d'assurances ait à lui payer une certaine somme, si une des n causes — mettons la $i^{\text{ème}}$ — survient; à ce moment l'assuré reçoit la somme $U^{(i)}_{[y]+t}$. Si aucune des conditions faisant l'objet du contrat ne s'est réalisée pendant cette période de p années, la compagnie d'assurances paie à l'assuré au moment $y + p$ la somme T. En outre, et dans les deux cas, la compagnie sert à l'assuré une rente de l'intensité $S_{[y]+t}$,

[1]) A. Loewy, Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmathematik, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-nat. Klasse, Jahrgang 1917, 6. Abhandlung.

[2]) A. Loewy, Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik, Blätter für Versicherungsmathematik und verwandte Gebiete, vol. 2, p. 3, 1931.

cette rente étant servie jusqu'à la sortie de l'assuré dans le premier cas, ou jusqu'au moment $y + p$ dans le second cas.

Soit $l_{[y]+t}$ le nombre des personnes pour lesquelles aucune des conditions du contrat n'a joué jusqu'au moment $y + t$ et soit $f^{(i)}_{[y]+t}$ le nombre des personnes pour qui la $i^{\text{ème}}$ cause s'est produite dans l'intervalle $(y, y + t)$; alors nous avons

$$l_{[y]} - l_{[y]+t} = \sum_{i=1}^{i=n} f^{(i)}_{[y]+t}. \qquad (1)$$

$f^{(i)}_{[y]+t}$ et $l_{[y]} - l_{[y]+t}$ sont évidemment des fonctions de t non diminuantes; nous supposons que $P_{[y]+t}$, $U^{(i)}_{[y]+t}$ et $S_{[y]+t}$ sont des fonctions continues de t.

Pour établir le risque moyen de cette assurance générale nous nous servons d'une définition du risque moyen qui, dans un certain sens, représente une généralisation de la définition du risque moyen, donnée par exemple dans le travail de Bohlmann (Sechster Internationaler Kongreß für Versicherungswissenschaft, Wien, 1909; I, 1, page 593—683).

Nous divisons la période $(y, y + p)$ par

$$y + t_0 = y,\ y + t_1, \ldots, y + t_{\pi-1},\ y + t_\pi = y + p$$

en π intervalles de temps et calculons pour chacun de ces intervalles $(y + t_{k-1}, y + t_k)$ le gain dont bénéficie une des personnes sortant dans cette intervalle par suite de la $i^{\text{ème}}$ cause ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, \pi$).

Nous appelons le gain $g^{(i)}(t_k)$ l'excédent de la valeur des recettes de l'assuré pour qui se produit la $i^{\text{ème}}$ cause dans l'intervalle $(y, y + t_k)$, escomptées au moment de la conclusion du contrat, sur la valeur des dépenses de la même personne pendant la même période, également escomptées au moment de la conclusion du contrat; la valeur des dépenses pouvant dépasser la valeur des recettes, $g^{(i)}(t_k)$ peut être une expression négative. Pour simplifier nos calculs, nous supposons que les sommes ainsi définies sont encaissées ou dépensées à la fin de chaque intervalle. Chacune des $l_{[y]+p}$ personnes qui au moment $y + p$ sont encore en état d'assurés obtient, après l'encaissement pendant p années de la rente et après la réception de la somme T, le gain $g^{(T)}$.

D'après le principe de l'égalité des encaissements et versements nous avons

$$\sum_{k=1}^{k=\pi} g^{(1)}(t_k) \,.\, [f^{(1)}_{[y]+t_k} - f^{(1)}_{[y]+t_{k-1}}] + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{k=1}^{k=\pi} g^{(n)}(t_k) \,.\, [f^{(n)}_{[y]+t_k} - f^{(n)}_{[y]+t_{k-1}}] + g^{(T)} \,.\, l_{[y]+p} = 0 \qquad (2)$$

et au cas $\lim\, (t_k - t_{k-1}) = 0$

$$\lim_{t_k - t_{k-1} \to 0} \sum_{k=1}^{k=\pi} g^{(1)}(t_k) \,.\, [f^{(1)}_{[y]+t_k} - f^{(1)}_{[y]+t_{k-1}}] + \ldots$$

$$\ldots + \lim_{t_k - t_{k-1} \to 0} \sum_{k=1}^{k=\pi} g^{(n)}(t_k) \,.\, [f^{(n)}_{[y]+t_k} - f^{(n)}_{[y]+t_{k-1}}] + g^{(T)} \,.\, l_{[y]+p} = 0. \quad (3)$$

Cette équation nous sert à définir le carré du risque moyen $M(P_{[y]+t})$

$$l_{[y]}\, M^2(P_{[y]+t}) = \lim_{t_k - t_{k-1} \to 0} \sum_{k=1}^{k=\pi} [g^{(1)}(t_k)]^2 . \, [f^{(1)}_{[y]+t_k} - f^{(1)}_{[y]+t_{k-1}}] + \ldots$$

$$\ldots + \lim_{t_k - t_{k-1} \to 0} \sum_{k=1}^{k=\pi} [g^{(n)}(t_k)]^2 \,.\, [f^{(n)}_{[y]+t_k} - f^{(n)}_{[y]+t_{k-1}}] + l_{[y]+p} \,.\, [g^{(T)}]^2. \quad (4)$$

Ainsi nous avons, si $g^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions continues de t,

$$M^2(P_{[y]+t}) = \frac{1}{l_{[y]}} \int_0^p [g^{(1)}(t)]^2 \, \mathrm{d}f^{(1)}_{[y]+t} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{l_{[y]}} \int_0^p [g^{(n)}(t)]^2 \, \mathrm{d}f^{(n)}_{[y]+t} + \frac{l_{[y]+p}}{l_{[y]}} [g^{(T)}]^2. \quad (5)$$

Il s'agit donc de calculer les fonctions

$$g^{(i)}(t) \ (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ et } g^{(T)}$$

pour notre assurance générale et prouver qu'elles sont des fonctions continues de t.

Si nous supposons que les sommes payées par la compagnie d'assurances sont escomptées au moment de la conclusion du contrat, la personne agée de y années reçoit, si c'est au moment $y + t$ que la $i^{\text{ème}}$ cause joue, la somme

$$v^t \,.\, U^{(i)}_{[y]+t},$$

et elle recevait pendant l'intervalle $(y, y + t)$ la rente

$$\int_0^t S_{[y]+\tau}\, v^\tau \, \mathrm{d}\tau,$$

donc en totalité la somme

$$v^t \,.\, U^{(i)}_{[y]+t} + \int_0^t S_{[y]+\tau}\, v^\tau \, \mathrm{d}\tau.$$

Par contre elle payait comme prime

$$\int_0^t P_{[y]+\tau}\, v^\tau \, \mathrm{d}\tau,$$

de façon qu'il résulte

$$g^{(i)}(t) = v^t U^{(i)}_{[y]+t} + \int_0^t S_{[y]+\tau}\, v^\tau\, d\tau - \int_0^t P_{[y]+\tau}\, v^\tau\, d\tau = v^t \,.\, U^{(i)}_{[y]+t} +$$
$$+ \int_0^t (S_{[y]+\tau} - P_{[y]+\tau})\, v^\tau\, d\tau. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Les fonctions $g^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont évidemment des fonctions continues de t, parceque $U^{(i)}_{[y]+t}$, $S_{[y]+t}$ et $P_{[y]+t}$ étaient supposés fonctions continues de t.

Si jusqu'à la fin de la période de p années une des n conditions n'a pas joué, l'assuré reçoit au moment $y + p$ la somme T qui, à la conclusion du contrat, avait la valeur

$$v^p \,.\, T.$$

En outre il recevait pendant l'intervalle $(y, y + p)$ la rente

$$\int_0^p S_{[y]+\tau}\, v^\tau\, d\tau,$$

donc en totalité la somme

$$v^p \,.\, T + \int_0^p S_{[y]+\tau}\, v^\tau\, d\tau,$$

cependant qu'il avait à payer comme prime la somme

$$\int_0^p P_{[y]+\tau}\, v^\tau\, d\tau.$$

Il en résulte

$$g^{(T)} = v^p \,.\, T + \int_0^p S_{[y]+\tau}\, v^\tau\, d\tau - \int_0^p P_{[y]+\tau}\, v^\tau\, d\tau =$$
$$= v^p \,.\, T + \int_0^p (S_{[y]+\tau} - P_{[y]+\tau})\, v^\tau\, d\tau. \tag{7}$$

Ainsi nous avons

$$M^2(P_{[y]+t}) = \frac{1}{l_{[y]}} \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^p \left[v^t\, U^{(i)}_{[y]+t} + \int_0^t (S_{[y]+\tau} - P_{[y]+\tau})\, v^\tau\, d\tau \right]^2 df^{(i)}_{[y]+t} +$$
$$+ \frac{l_{[y]+p}}{l_{[y]}} \,.\, \left[v^p \,.\, T + \int_0^p (S_{[y]+\tau} - P_{[y]+\tau}) \,.\, v^\tau\, d\tau \right]^2. \tag{8}$$

Si au lieu du paiement continuel des primes, nous considérons le cas de la prime payée en une seule fois lors de la conclusion du contrat, nous obtenons de la même façon pour le carré du risque moyen l'expression suivante

$$M^2(P) = \frac{1}{l_{[y]}} \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^p \left[v^t \, U_{[y]+t}^{(i)} + \int_0^t S_{[y]+\tau} \, v^\tau \, d\tau - P \right]^2 d f_{[y]+t}^{(i)} +$$
$$+ \frac{l_{[y]+p}}{l_{[y]}} \left[v^p \, . \, T + \int_0^p S_{[y]+\tau} \, v^\tau \, d\tau - P \right]^2 . \qquad (9)$$

Si nous mettons $n = 1$, c'est à dire

$$f_{[y]+t}^{(1)} = l_{[y]} - l_{[y]+t}, \quad U_{[y]+t}^{(1)} = U_{[y]+t}$$

et si nous supposons que $l_{[y]+t}$ est une fonction dérivable de t, nous obtenons l'expression générale des formules qui furent données par J. P. Gram (1889) et Alf Guldberg (1909). Ainsi on a:

$$M^2(P_{[y]+t}) = \frac{1}{l_{[y]}} \int_0^p \Bigg[v^t \, . \, U_{[y]+t} +$$
$$+ \int_0^t (S_{[y]+\tau} - P_{[y]+\tau}) \, v^\tau \, d\tau \Bigg]^2 d[l_{[y]} - l_{[y]+t}] +$$
$$+ \frac{l_{[y]+p}}{l_{[y]}} \left[v^p \, . \, T + \int_0^p (S_{[y]+\tau} - P_{[y]+\tau}) \, v^\tau \, d\tau \right]^2 =$$
$$= \frac{1}{l_{[y]}} \int_0^p \left[v^t \, . \, U_{[y]+t} + \int_0^t (S_{[y]+\tau} - P_{[y]+\tau}) \, v^\tau \, d\tau \right]^2 \frac{d(l_{[y]} - l_{[y]+t})}{dt} \, dt +$$
$$+ \frac{l_{[y]+p}}{l_{[y]}} \left[v^p \, . \, T + \int_0^p (S_{[y]+\tau} - P_{[y]+\tau}) \, v^\tau \, d\tau \right]^2 =$$
$$= - \int_0^p \left[v^t \, . \, U_{[y]+t} + \int_0^t (S_{[y]+\tau} - P_{[y]+\tau}) \, v^\tau \, d\tau \right]^2 \frac{l'_{[y]+t}}{l_{[y]}} \, dt +$$
$$+ \frac{l_{[y]+p}}{l_{[y]}} \left[v^p \, . \, T + \int_0^p (S_{[y]+\tau} - P_{[y]+\tau}) \, v^\tau \, d\tau \right]^2 \qquad (10)$$

et

$$M^2(P) = - \int_0^p \left[v^t \, . \, U_{[y]+t} + \int_0^t S_{[y]+\tau} \, v^\tau \, d\tau - P \right]^2 \frac{l'_{[y]+t}}{l_{[y]}} \, dt +$$
$$+ \frac{l_{[y]+p}}{l_{[y]}} \left[v^p \, . \, T + \int_0^p S_{[y]+\tau} \, . \, v^\tau \, d\tau - P \right]^2 . \qquad (11)$$

Le cas special $n = 1$ étant déjà traité dans les publications parues, nous n'emploierons nos formules que pour le cas $n = 2$ dans l'assurance contre l'invalidité.

Nous nous basons sur une table de validité. Soit $l_{[y]+t}^{\overline{aa}}$ le nombre des assurés entrés dans leur profession à l'âge de y années et qui ont terminé leur $(y+t)^{\text{ème}}$ année sans interrompre leur activité dans leur profession,

$\overline{d}^{aa}_{[y]+t}$ le nombre des personnes qui dans leur $(y+t+1)^{\text{ème}}$ année sont mortes en activité et étaient entrées dans leur profession agées de y années,

$J_{[y]+t}$ le nombre des personnes qui ont été atteintes d'invalidité dans leur $(y+t+1)^{\text{ème}}$ année et qui étaient entrées dans leur profession à l'âge de y années.

Alors nous avons

$$\overline{l}^{aa}_{[y]+t+1} = \overline{l}^{aa}_{[y]+t} - \overline{d}^{aa}_{[y]+t} - J_{[y]+t}. \tag{12}$$

Si nous supposons maintenant que l'assuré reçoit, en sortant par suite de la première cause (mort) la somme S_1, en sortant par suite de la deuxième cause (invalidité) la somme S_2 et que l'assurance ne se termine qu'avec la sortie du fait d'une de ces deux raisons, la prime que l'assuré a à payer lors de la conclusion du contrat est égale à

$$P = S_1 \cdot \frac{1}{\overline{l}^{aa}_{[y]}} \int_0^\infty v^t \, d\overline{d}^{aa}_{[y]+t} + S_2 \cdot \frac{1}{\overline{l}^{aa}_{[y]}} \int_0^\infty v^t \, dJ_{[y]+t} \tag{13}$$

et le risque moyen M est donné d'après la formule (9) par

$$M^2 = \frac{1}{\overline{l}^{aa}_{[y]}} \int_0^\infty [S_1 v^t - P]^2 \, d\overline{d}^{aa}_{[y]+t} + \frac{1}{\overline{l}^{aa}_{[y]}} \int_0^\infty [S_2 v^t - P]^2 \, dJ_{[y]+t}. \tag{14}$$

Si nous mettons

$$\frac{1}{\overline{l}^{aa}_{[y]}} \int_0^\infty v^t \, d\overline{d}^{aa}_{[y]+t} = F, \qquad \frac{1}{\overline{l}^{aa}_{[y]}} \int_0^\infty v^t \, dJ_{[y]+t} = G$$

et

$$\frac{1}{\overline{l}^{aa}_{[y]}} \int_0^\infty v^{2t} \, d\overline{d}^{aa}_{[y]+t} = F^{(2)}, \qquad \frac{1}{\overline{l}^{aa}_{[y]}} \int_0^\infty v^{2t} \, dJ_{[y]+t} = G^{(2)}$$

nous avons

$$M^2 = S_1^2 \cdot F^{(2)} - 2PS_1F + P^2 \frac{1}{\overline{l}^{aa}_{[y]}} \int_0^\infty d\overline{d}^{aa}_{[y]+t} +$$

$$+ S_2^2 \cdot G^{(2)} - 2PS_2G + P^2 \frac{1}{\overline{l}^{aa}_{[y]}} \int_0^\infty dJ_{[y]+t},$$

et si nous considérons que

a) $$\int_0^\infty d\overline{d}^{aa}_{[y]+t} + \int_0^\infty dJ_{[y]+t} = \overline{l}^{aa}_{[y]},$$

b) $$S_1 \cdot F + S_2 \cdot G = P$$

et mettons encore

$$S_1^2 F^{(2)} + S_2^2 G^{(2)} = P^{(2)}$$

nous obtenons

$$M^2 = P^{(2)} - P^2 = \left\{ \frac{S_1^2}{l_{[y]}^{aa}} \int_0^\infty v^{2t}\, d\overline{d_{[y]+t}^{aa}} + \frac{S_2^2}{l_{[y]}^{aa}} \int_0^\infty v^{2t}\, dJ_{[y]+t} \right\} -$$

$$- \left\{ \frac{S_1}{l_{[y]}^{aa}} \int_0^\infty v^t\, d\overline{d_{[y]+t}^{aa}} + \frac{S_2}{l_{[y]}^{aa}} \int_0^\infty v^t\, dJ_{[y]+t} \right\}^2 . \qquad (15)$$

Les tables de mortalité pour les provinces tchèques.

Vladimír Kořínek.

L'Office de Statistique de la République Tchécoslovaque a récemment publié les tables de mortalité pour les provinces tchèques.[1]) Ces tables ont été calculées par la même méthode qui fut employée par Ernst Blaschke pour la construction des tables de mortalité autrichiennes de 1905—1910.[2])

La méthode de Blaschke emploie pour les calculs une période située entre deux recensements de la population. Blaschke a choisi pour les tables autrichiennes la période 1906—1910 située entre le recensement fait à 31 décembre 1900 et celui fait à 31 décembre 1910. Pour les présentes tables on a choisi la période 1924—1930 située entre le recensement fait à 15 février 1921 et celui fait à 1 décembre 1930. Les raisons qui ont déterminé ce choix étaient les suivantes: Il fallait d'une part exclure de la période à déterminer les années peu éloignées de la fin de la guerre, où la mortalité était encore considérablement surnormale. Telles étaient les années 1921 et 1922. En 1923, la mortalité des personnes, ayant l'âge supérieur à un an, était déjà assez normale, mais la mortalité des nourissons était encore un peu au-dessus de la moyenne. On a préferé alors d'exclure encore cette dernière année du calcul. D'autre part, on a choisi une période aussi longue que possible pour écarter l'influence des fluctuations accidentelles survenant dans le

---

[1]) Zprávy Státního úřadu statistického republiky československé, 15, 1934, čís. 133 (en tchèque).

Mitteilungen des Statistischen Staatsamtes der Čechoslovakischen Republik. 15, 1934, No. 133 (en allemand).

L'édition française va paraître dans un court délai.

[2]) Österreichische Statistik, Neue Folge, Bd. 1, 4. Heft 1927. Österreichische Sterbetafeln.