Hans Koeppler

Das zweiändrige Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen der Prämienreserve eines Bestandes von Versicherungen mit verschiedenen Auflösungsmöglichkeiten. II

Aktuárské vědy, Vol. 4 (1933), No. 4, 163–169

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144612`

jusqu'à quel point on doit placer la fortune des porteurs de l'assurance dans telles créances il s'en suit que la fortune des porteurs d'assurance est complètement à la disposition de l'Etat. Un règlement pareil est très risquant n'étant nullement en accord avec les intérêts de l'assurance. Il est certain que le porteur de l'assurance sociale comme toute l'institution de l'assurance sociale est étroitement lié avec l'Etat et avec ses destins mais il est nécésaire qu'une liberté relative de l'action reste au porteur de l'assurance envers l'Etat. Peut-être signifie ce règlement le commencement de la fin de l'independance des assurances sociales et prépare le changement de l'assurance en assistance.

Das zweiändrige Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen der Prämienreserve eines Bestandes von Versicherungen mit verschiedenen Auflösungsmöglichkeiten.

Von *Hans Koeppler*, Berlin.

(Beendigung.)

Darauf entwickeln wir $\ln X$ in die nach den zweiten Potenzen und dem Produkt der Variablen abgebrochene Maclaurinsche Reihe

$$(\ln X)_{\substack{x=0\\y=0}} + x\left(\frac{\partial \ln X}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + y\left(\frac{\partial \ln X}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[x^2\left(\frac{\partial^2 \ln X}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + 2xy\left(\frac{\partial^2 \ln X}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + y^2\left(\frac{\partial^2 \ln X}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}\right],$$

in der, wie die Untersuchung lehrt,

$$(\ln X)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0,\quad \left(\frac{\partial \ln X}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0,\quad \left(\frac{\partial \ln X}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

ist, und

$$\left(\frac{\partial^2 \ln X}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\frac{\partial^2 \ln Y}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -C_{11},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \ln X}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\frac{\partial^2 \ln Y}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -C_{22},\ \left(\frac{\partial^2 \ln X}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\frac{\partial^2 \ln Y}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -C_{12}$$

gesetzt werden kann, sodaß man zu dem Näherungsausdruck

$$\frac{dX}{ds} = -X\frac{1}{2s}\left(C_{11}x^2 + 2C_{12}xy + C_{22}y^2\right)$$

gelangt, dessen Anwendung auf den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial P(u,v)}{\partial s} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dX}{ds}e^{-(ux-vy)i}\,dx\,dy$$

für diesen den Näherungsausdruck

$$\frac{\partial P(u,v)}{\partial s} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Xe^{-(ux-vy)i}\,(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)\,dx\,dy$$

liefert, wenn noch

$$\frac{C_{11}}{2s} = a_{11}, \quad \frac{C_{12}}{2s} = a_{12}, \quad \frac{C_{22}}{2s} = a_{22},$$

gesetzt wird. Ferner kann man die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u^2} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Xe^{-(ux-vy)i}\,x^2\,dx\,dy,$$

$$\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial v^2} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Xe^{-(ux-vy)i}\,y^2\,dx\,dy,$$

$$\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u\,\partial v} = +\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\,e^{-(ux-vy)i}\,xy\,dx\,dy$$

berechnen, deren Substitution in den Näherungsausdruck für die Ableitung von $P(u, v)$ nach s die von Bachelier[7]) in die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführte partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial P}{\partial s} = a_{11}\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} - 2a_{12}\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v} + a_{22}\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \qquad \text{(VIII)}$$

liefert. Mit der Lösung dieser hat sich der Verfasser[8]) mehrfach befaßt. Die einfachste uns hier genügende Lösung lautet

$$P(u,v) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)-(ux-vy)i}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4\pi s\sqrt{A}}\,e^{-\frac{a_{22}u^2+2a_{12}uv+a_{11}v^2}{4sA}} \qquad (A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$

[7]) Calcul des probabilités, Paris 1912.

[8]) Die Elementarwahrscheinlichkeit für zwei Arten von Abweichungen; Het Verzekerings-Archief.'s-Gravenhage 1926. Die Differentialgleichungen des normalen Verteilungsgesetzes der betrachteten Eigenschaften bei einer hinreichend großen Anzahl von Vertretern einer Gattung; Atti del Congresso internazionale dei Matematici, Bologna 1928, Tomo VI.

und geht nach Einführung der Werte von a_{11}, a_{22} und a_{12} über in den Ausdruck (VI).

Interessant ist wohl der Hinweis, daß man die partielle Differentialgleichung ohne vorhergehende Transformation unmittelbar durch Anwendung eines Doppelintegrals mit Besselscher Funktion lösen kann. Dieses Doppelintegral hat die Form

$$P = C \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(a_{11}x^2 - 2a_{12}xy + a_{22}y^2)s} (ux+vy)^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}(ux+vy)\, dx\, dy. \quad \text{(IX)}$$

Daß es die Gleichung befriedigt, erkennt man durch seine Anwendung auf die Gleichung. Dabei ist zu beachten, daß man auf Grund der Besselschen Differentialgleichung

$$I''_{-\frac{1}{2}}(ux+vy) + \frac{1}{ux+vy} I'_{-\frac{1}{2}}(ux+vy) - \frac{1}{4(ux+vy)^2} I_{-\frac{1}{2}}(ux+vy) = \\ = - I_{-\frac{1}{2}}(ux+vy)$$

setzen kann. Zwecks Auswertung des vorstehenden Integrals setze man

$$ux + vy = z, \quad x = \frac{z - vy}{u}, \quad dx = \frac{dz}{u}$$

und forme dementsprechend den Ausdruck

$$(a_{11}x^2 - 2a_{12}xy + a_{22}y^2)\, s$$

um in

$$\frac{\mathfrak{A}z^2 + (A_{22}y - A_{12}z)^2}{A_{22}}.$$

Hierin bedeutet dann

$$\mathfrak{A} = A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2 = \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2)\, s}{u^2} = \frac{As^2}{u^2},$$

$$A_{11} = \frac{a_{11}s}{u^2}, \quad A_{12} = \frac{(a_{11}v + a_{12}u)\, s}{u^2}, \quad A_{22} = \frac{(a_{11}v^2 + 2a_{12}uv + a_{22}u^2)\, s}{u^2}.$$

Man kann durch diese Vornahme dem Doppelintegral die Form geben:

$$P = \frac{C}{u} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mathfrak{A}}{A_{22}} z^2} z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}(z)\, dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{A_{22}}(A_{22}y - A_{12}z)^2}\, dy.$$

Nachdem man die Innenintegration ausgeführt hat, verbleibt das einfache Integral

$$P = \frac{C\sqrt{\pi}}{u\sqrt{A_{22}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mathfrak{A}}{A_{22}} z^2} z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}(z)\, dz.$$

Mit Benutzung des im Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen von Nielsen mitgeteilten Integrals

$$\int_0^\infty e^{-yt^2} t^{\nu+1} I_\nu(tx)\, dt = \frac{x^\nu}{(2y)^{\nu+1}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

äßt sich das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-yt^2} t^{\nu+1} I_\nu(xt)\, dt = [1 + (-1)^{2(\nu+1)+1}] \frac{x^\nu}{(2y)^{\nu+1}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \tag{X}$$

herleiten, welches für $\nu = -\frac{1}{2}$ das für unsere Lösung erforderliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-yt^2} t^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}(t)\, dt = \sqrt{\frac{2}{y}}\, e^{-\frac{1}{4y}} \tag{Xa}$$

liefert. Indem man für y den Wert

$$\frac{\mathfrak{A}}{A_{22}} = \frac{As}{a_{22}u^2 - 2a_{12}uv + a_{11}v^2}$$

setzt, erhält man

$$P = \frac{C\sqrt{2\pi}}{As} e^{-\frac{a_{22}u^2 + 2a_{12}uv + a_{11}v^2}{4As}},$$

und da die Konstante C den Wert

$$C = \frac{\sqrt{A}}{2^{3/2}\pi^{3/2}}$$

haben muß, damit die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 beträgt, so ergibt sich die oben angegebene Lösung. Die Lösung der entsprechenden Gleichung von 4 Variablen hat der Verfasser, von denselben Prinzipien ausgehend, in seinem Aufsatz „Equazioni alle derivate parziali della teoria delle probabilità che intervengono anche nella teoria del calore"[9]) gegeben.

6. Die Wahrscheinlichkeit $P(u, v)$ gibt zu der schönen mathematischen Aufgabe Anlaß, das fernere mathematische Risiko mittels des Doppelintegral-Ausdrucks

$$R = \iint P(u, v)\,(u - v)\, du\, dv$$

zu berechnen, in welchem die Integrationen über alle Werte von u und v zu erstrecken sind, welche der Ungleichung

$$u - v \geqq 0$$

genügen. Inbezug auf das jährliche mathematische Risiko hat sich der

[9]) Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari, Anno IV, n. 2, aprile 1933-XI.

Verfasser mit dieser Aufgabe mehrfach befaßt.[10]) Hier sei kurz bemerkt, daß beispielsweise der Bedingung $u - v \geqq 0$ der Ausdruck

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{v}^{\infty} P(u, v)\, u\, du - \int_{-\infty}^{\infty} v\, dv \int_{v}^{\infty} P(u, v)\, du \tag{XI}$$

genügt. Durch einige Umformungen und Einführung vereinfachender Variablen erhält man für R den Ausdruck

$$R = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left\{\sqrt{\frac{A}{C_{22}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{\frac{C_{12}+C_{12}}{\sqrt{A}}x}^{\infty} e^{-y^2} y\, dy - \frac{C_{22}+C_{12}}{\sqrt{C_{22}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x\, dx \int_{\frac{C_{22}+C_{12}}{\sqrt{A}}x}^{\infty} e^{-y^2} dy\right\}. \tag{XII}$$

Aus den Doppelintegralen, die der Verfasser in seinem 1930 im Giornale di Matematica finanziaria erschienenen Aufsatz dargestellt hat, lassen sich die Doppelintegrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{\alpha x}^{\infty} e^{-y^2} y\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+\alpha^2}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x\, dx \int_{\alpha x}^{\infty} e^{-y^2} dy = -\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$$

herleiten, deren Anwendung auf den Ausdruck für R diesen nach Ausführung einiger vereinfachenden Berechnungen umwandelt in

$$R = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{2\,(C_{11} + C_{22} + 2C_{12})}. \tag{XIII}$$

7. Um aus der Wahrscheinlichkeit $P(u, v)$ die Wahrscheinlichkeit $P(\Delta)$ der Gesamtabweichung $\Delta = u - v$ herzuleiten, eliminiere man etwa u vermöge der Substitution $u = \Delta + v$. Nach einigen Umformungen und nach der Integration nach v (vergl. des Verfassers Aufsatz im Het Verzekerings-Archief 1926), erhält man das gesuchte Wahrscheinlichkeitsgesetz $P(\Delta)$ in der allgemeinen Form

$$P(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\,(C_{11} + C_{22} + 2C_{12})}}\, e^{-\frac{\Delta^2}{2(C_{11}+C_{22}+2C_{12})}}, \tag{XIV}$$

die für alle Arten von Versicherungen gilt, bei denen wenigsten zwei ver-

[10]) Die Berechnung des jährlichen Risikos schwierigerer Versicherungsarten, Mitteil. der Verein. schweiz. Versich.-mathematiker, 11. Heft, Bern 1916. Das jährliche mathematische Risiko der Versicherungen, bei denen zwei von einander verschiedene Ereignisse die vorzeitige Auflösung herbeiführen können. — Giornale di Matematica finanziaria, Turin, Volume XII, 1930. Ferner Aktuárské vědy, Prag, ročník II, 1931, číslo 2. Zur Anwendung von Polarkoordinaten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Giornale di Matematica finanziaria, Turin, Serie II, Volume I, 1931.

schiedene Möglichkeiten das Ausscheidens bestehen. Mittels dieses Ausdrucks kann man natürlich des mathematische fernere Risiko und das Quadrat des mittleren ferneren Risikos durch die bekannten Formeln

$$R = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-h^2\Delta^2} \Delta \, d\Delta = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \text{ und } M^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Delta^2} \Delta^2 \, d\Delta = \frac{1}{2h^2}$$

recht schnell darstellen. Schließlich überzeuge man sich durch Berechnung, daß das entwickelte Gesetz auch tatsächlich das gesuchte ist, indem man zu diesem Zweck auch aus $\ln Y$ die Größen C_{11}, C_{22} und C_{12} berechnet. Für diese ergeben sich die Ausdrücke

$$C_{11} = -\left(\frac{\partial^2 \ln Y}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left[\frac{\partial^2 Z_\lambda}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial Z_\lambda}{\partial x}\right)^2\right]_{\substack{x=0\\y=0}} =$$

$$= \sum_{t=1}^{\lambda=s} \Bigg[\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)} (v^t S^{(1)}_{k_\lambda+t})^2 + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)} (v^t S^{(2)}_{k_\lambda+t})^2 +$$

$$+ p^{(3)}_{\nu_\lambda} (v^{\nu_\lambda} S^{(3)}_{n_\lambda})^2 - \mathfrak{A}^2{}_{(x+k)_\lambda}\Bigg]$$

$$C_{22} = -\left(\frac{\partial^2 \ln Y}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left[\frac{\partial^2 Z_\lambda}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial Z_\lambda}{\partial y}\right)^2\right]_{\substack{x=0\\y=0}} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} P^2_{x_\lambda} \left[\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)+(2)}_{(t-1,\lambda)} \; (a_{t\rceil})^2 + p^{(3)}_{\nu_\lambda} (a_{\overline{\nu_\lambda}|})^2 - a^2_{(x+k)_\lambda}\right]$$

$$C_{12} = -\left(\frac{\partial^2 \ln Y}{\partial x \, \partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left[\frac{\partial^2 Z_\lambda}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial Z_\lambda}{\partial x} \cdot \frac{\partial Z_\lambda}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} =$$

$$= -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} P_{x_\lambda} \Bigg[\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)} v^t S^{(1)}_{k_\lambda+t} a_{\overline{t}|} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)} v^t S^{(2)}_{k_\lambda+t} a_{\overline{t}|} +$$

$$+ p^{(3)}_{\nu_\lambda} v^{\nu_\lambda} S^{(3)}_{n_\lambda} a_{\overline{\nu_\lambda}|} - \mathfrak{A}_{(x+k)_\lambda} a_{(x+k)_\lambda}\Bigg].$$

Durch Einführung dieser Werte erhält man aber leicht

$$C_{11} + C_{22} + 2C_{12} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left[\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)} a_t^2 + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)} b_{(t,\lambda)}^2 + p^{(3)}_{\nu_\lambda} c^2_{\nu_\lambda} - V_\lambda^2\right],$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} M_\lambda^2 = \mathfrak{M}^2.$$

Hierbei ist zur Abkürzung

$$v^t S^{(1)}_{k_\lambda+t} - P_{x_\lambda} a_{\overline{t|}} = a_{(t,\lambda)}, \quad v^t S^{(2)}_{k_\lambda+t} - P_{x_\lambda} a_{\overline{t|}} = b_{(t,\lambda)}, \quad v^{\nu_\lambda} S^{(3)}_{n_\lambda} - P_{x_\lambda} a_{\overline{\nu_\lambda|}} = c_{\nu_\lambda}$$

gesetzt worden.

Das Thema dieser Arbeit war bereits in dem seinerzeit nicht mehr veröffentlichten Schluß des im 14. Heft (1919) der Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungs-Mathematiker abgedruckten Aufsatzes kurz behandelt und mußte vegen Raummangels auch aus dem im 28. Heft der genannten Zeitschrift veröffentlichten Aufsatz fortgelassen werden.

Une remarque sur l'article de M. A. Guldberg: „On discontinuous frequency functions and statistical series."[1])

Dr. *Ota Fischer.*

Dans l'article cité, M. A. Guldberg déduit d'équations aux différences finies des quattre fonctions de fréquence (binômial, de Poisson, de Pascal et hypergéometrique) tantôt des formules pour les moments complets même incomplets de ces fonctions, tantôt des critères si on peut représenter le collectif donné par une de ces fonctions. On peut trouver des résultats analogues même pour la loi de Polya.[2])

La loi de Polya

$$\mathrm{f}(x) = \binom{\frac{h}{d} + x - 1}{x} \frac{d^x}{(1+d)^{\frac{h}{d}+x}}, \qquad x \geq 0 \tag{1}$$

satisfait à l'équation

$$\frac{\mathrm{f}(x+1)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{h + dx}{(1+d)(x+1)}. \tag{2}$$

Ecrivons l'équation (2) dans la forme

$$(1+d)(x+1)\,\mathrm{f}(x+1) = h\,\mathrm{f}(x) + dx\,\mathrm{f}(x)$$

et en la multipliant par

$$(x+1)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{1} x + 1$$

[1]) Skandinavisk Aktuarietidskrift 1931.

[2]) Dr. M. Vacek: Sur la loi de Polya régissant les faits corrélatifs. — Aktuárské vědy III.