Otomar Pankraz

Zur Grundgleichung für den zeitlichen Zerfall der statistischen Kollektivs

Aktuárské vědy, Vol. 4 (1933), No. 1, 32–59

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144593`

auch rascher die Zunahme hinsichtlich der seit dem Eintritte der Invalidität verstrichenen Zeit ein.

Bei den Frauen ist die Sterblichkeit bei den 20—24 jährigen an Lungentuberkulose Leidenden im ersten Jahre mit dem Prozentsatze von 82% grösser als bei den Männern, aber schon der Prozentsatz von 47% des zweiten, ebenso jener von 25% des dritten Jahres kleiner, als bei den Männern. Sowohl die absolute, als auch die relative Abnahme besteht auch später. Hinsichtlich der Eintrittsalter ist die Tendenz dieselbe wie bei den Männern, dabei begegnen wir überall kleineren Zahlen, als bei den Männern. Die Sterblichkeit von 68% der im Alter von 25—29 Jahren invalid gewordenen nimmt stark ab und beträgt im 7. Jahre nur mehr 7%. In den Altersgruppen von 30—35 Jahren sinkt sie von 56% bis zum 7. Jahre auf 6%, in den Altersgruppen der 60—64 jährigen im 4. Jahre von 25% auf 11%, in der Altersgruppe der 65—69 jährigen von 21% im zweiten Jahre auf 11%. Die Tendenzänderung hinsichtlich der verflossenen Zeit tritt daher rascher als bei den Männern ein.

Auch die Sterblichkeit der aus sonstigen Ursachen invalid Gewordenen ist geringer als bei den Männern. Natürlich spielen auch die verschiedenen Invaliditätsursachen in verschiedener Stärke mit, sowohl bei den Frauen, als auch bei den Männern und hieraus erklären sich auch die Abweichungen.

Diese auf die Sterblichkeit der an Lungentuberkulose Leidenden getroffenen Untersuchungsergebnisse geben im Vereine mit den Erfahrungen die hinsichtlich der Sterbeverhältnisse der aus sonstigen Ursachen invalid Gewordenen gesammelt wurden, vollständige Erklärung für die Änderung der Sterblichkeitsverhältnisse, je nach der seit dem Eintritte der Invalidität verflossenen Zeit und den Eintrittsaltern, ebenso für die bei Männern und bei Frauen festgestellten Unterschiede in der Sterblichkeit.

Zur Grundgleichung für den zeitlichen Zerfall der statistischen Kollektivs.

Otomar Pankraz.

Einleitung.

Bei der Konstruktion der Invaliditätstabellen sind Ergebnisse erreicht worden, welche als eine ganz allgemeine Grundlage beim Lösen von solchen Problemen dienen können, bei denen es sich um den Zeitzerfall der statistischen Kollektivs handelt. Die erste Arbeit, in welcher diese Fragen systematisch durchgenommen werden, ist die Abhandlung des Herrn Dr. E. Schoenbaum „Anwendung der Volterra'schen

Integralgleichungen in der mathematischen Statistik [Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1924 (241—265), 1925 (1—22)]." Eine interessante Erweiterung dieser Fragen hat H. R. Taucer durchgeführt in der Mitteilung „Sulla teoria dei gruppi (Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 1928; tomo V, pag. 413—418)."[1])

In der folgenden Abhandlung habe ich mir die Aufgabe gestellt, die Probleme, die bei den Zeitzerfällen der statistischen Kollektivs vorkommen, allgemein zu formulieren und ihre Lösung (soweit es jetzt schon möglich ist) anzugeben.

Im ersten Teil der Abhandlung führe ich die Dêfinition des zeitlichen Zerfalles eines Kollektivs an. Dabei teile ich die Kollektivs in offene und abgeschlossene je nachdem, ob im Laufe des Beobachtungsintervalles neue Individuen in das Kollektiv eintreten oder dies nicht stattfindet. Weiter unterscheide ich die ein- und zweidimensionalen Probleme je nachdem, ob die Funktionen, die die Verteilung des Kollektivs angeben, allein von dem Beobachtungsaugenblick abhängen, oder ob sie ausserdem noch auch von einem anderen Zeitparameter abhängig sind.

Dann befasse ich mich mit dem eindimensionalen Problem und zwar speziell für die abgeschlossenen Kollektivs bei sehr allgemeinen Bedingungen. Zuerst werden wir annehmen, dass die die Zeitverteilung des Kollektivs beschreibende Funktion stetig ist, während wir von ihrer Ableitung nichts voraussetzen, und mit Hilfe der Stieltjes'schen Integration leiten wir die Grundrelation für den Zerfall ab. Was die methodische Seite betrifft, werden wir auf dem Wege fortschreiten, den H. E. Lenzi eingeführt hat in der Arbeit „Sulle equazioni integrali della riserva matematica (Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari, III, 4, 1932, pag. 461—472)." Dann werden wir uns auf den Fall beschränken, dass die Verteilungsfunktion eine stetige Ableitung besitzt und werden zeigen, dass durch einfache Operationen aus der Grundrelation die bekannte gewöhnliche Integrodifferentialgleichung entsteht, die die Verteilungsfunktion bestimmt.

Der zweite Teil befasst sich mit dem zweidimensionalen Problem und sein Inhalt ist die Ableitung der partiellen Integrodifferentialgleichung für ein offenes Kollektiv. Die vollständige Lösung dieser Gleichung werden wir in der Form einer unendlichen nach den Potenzen eines geeignet gewählten Parameters fortschreitenden Reihe angeben. Dabei kommt die Aufgabe vor, die Glieder auf eine „geeignete" Art zu gruppieren oder bestimmte Teile dieser unendlichen Reihe durch

[1]) Weitere Bibliographie und Behandlung dieser Probleme enthält das Buch R. Risser: Applications de la statistique à la démographie et à la biologie, Paris 1932.

einen einzigen Ausdruck, als ihre Summe, zu ersetzen. Nachdem aber a priori für dieses Gruppieren resp. Summieren von Gliedern keine Vorschrift gegeben ist, löse ich die Gleichung auf zweierlei Art, wodurch zwei Formen der Lösung erhalten werden, von denen wohl die eine auf die andere reduzierbar sein muss. In beiden Fällen verwende ich die Methode der sukzessiven Approximationen, nur gehe ich im ersten Falle direkt von der gegebenen Integrodifferentialgleichung aus, wogegen ich im zweiten die Reduktion der Grundgleichung auf eine Integralgleichung durchführe, die ich dann auf die übliche Art löse. Den ersten Fall rechne ich ausführlich durch, und zwar unabhängig von der Volterra'schen Theorie der Integralgleichungen. Zum Schluss führe ich eine partielle Integrodifferentialgleichung an, die sich auf ein unendliches Intervall bezieht, deren vollständige Diskussion ich vorläufig noch nicht durchführe.

I. Teil.

Die Definition des Zerfalles eines statistischen Kollektivs. Das eindimensionale Problem.

§ 1. Formulation der Aufgabe.

In der Theorie des zeitlichen Zerfalls der statistischen Kollektivs löst man folgende Aufgabe:

[1] — Es sei eine bestimmte endliche Menge (Gesamtheit, Kollektiv) von Individuen gegeben. Die Individuen haben folgende Eigenschaften:

1. Jedem Individuum sind die Zahlen

$$1, 2, \ldots, n$$

als Merkmale zugeordnet.

2. Im bestimmten Augenblicke kann jedes Individuum nur ein einziges Merkmal verlieren resp. wieder erwerben.

3. Der Verlust eines Merkmales hat zur Folge das Austreten (Ausscheiden) des Individuums aus der Menge; das Wiedererwerben eines verlorenen Merkmales bedeutet die Rückkehr des Individuums in die Menge.

Beobachten wir diese Menge im Zeitintervalle

$$0 \leq t \leq 1.$$

Im Augenblicke $t = 0$ hat sie eine bekannte Zahl $l_0(0)$ der Individuen. Wir unterscheiden dann zwei Gruppen von diesen Mengen, und zwar nach Voraussetzungen:

Voraussetzung α). Im Laufe des Zeitintervalls

$$0 < t \leq 1$$

können nicht neue Individuen in die Menge eintreten. D. i. jedes Individuum trat zum ersten Male in die Menge im Augenblicke $t = 0$ ein. Eine solche Menge wollen wir als eine abgeschlossene Menge bezeichnen.

Voraussetzung β). Neue Individuen können im beliebigen Augenblick t in die Menge eintreten. Die Verteilung dieses ersten Eintrittes im Intervalle $0 \leq t \leq 1$ soll durch die Funktion $\mathrm{l}_0(t)$ gegeben werden. Jedes neu hinzugetretene Individuum kann durch den Verlust einiger seiner Merkmale austreten und wieder eintreten, sobald es die verlorenen Merkmale wieder erworben hat. Eine Menge von diesem Typus nennen wir offene Menge.

Über das Austreten und die Rückkehr von jedem Individuum wollen wir immer nur mit bestimmter Wahrscheinlichkeit entscheiden und daher hat jede betrachtete Menge den Charakter eines statistischen Kollektivs.

[2] — Betrachten wir ein bestimmtes Individuum im geschlossenen Intervall $< 0, t >$.[2]) Dann die ganze Zeit (d. h. die Summe der Längen der Intervalle), welche das Individuum im Laufe $< 0, t >$ in der Menge war, bezeichnen wir als τ. Ersichtlich

$$0 \leq \tau \leq t \leq 1. \qquad (+)$$

Die Hauptfrage lautet nun:

Es ist die Anzahl $\mathrm{l}(t, \tau)$ derjenigen Individuen zu bestimmen, die sich im Augenblick t in einer bestimmten Menge befinden und ausserdem in dieser Menge insgesamt die Zeit τ verbracht hatten.

Wenn l nicht von τ abhängt, also $l = \mathrm{l}(t)$, dann bildet die Aufgabe den Kern des Problemes, welches wir eindimensionales nennen, während es sich im allgemeinen Falle um ein zweidimensionales Problem handelt.

Die Funktion $\mathrm{l}(t, \tau)$, deren Definitionsgebiet durch die Ungleichung $(+)$ ausgedrückt ist, nennen wir Verteilungsfunktion des gegebenen Kollektivs. Aus ihrer Definition folgt die Bedeutung folgender Werte:

$\mathrm{l}(0, 0) =$ Anfangsstand der Individuen im Kollektiv;

$\mathrm{l}(t, 0) = \mathrm{l}_0(t) =$ die Anzahl derjenigen Individuen, die im Augenblicke t zum erstenmale in das Kollektiv eintreten. (Die Verteilung des ersten Eintrittes in das Kollektiv);

$\mathrm{l}(t, t) =$ die Anzahl der Individuen, die in dem Kollektiv vom Anfange der Beobachtung ununterbrochen bis zum Augenblicke t waren. (Die Verteilung der Individuum, die sich an dem Zerfall überhaupt nicht beteiligen.)

[2]) Wir bezeichnen $< a, b >$ als geschlossenes, (a, b) als offenes Intervall.

Ausserdem ergibt sich

$$\mathfrak{l}(t, \tau) \equiv 0 \quad (t < \tau).$$

[3] — Die analytische Formulation der Voraussetzungen im Falle des zweidimensionalen Problems für beide Gruppen der Kollektivs führt zu folgenden Bedingungen. Es soll erfüllt werden:

α) für ein abgeschlossenes Kollektiv

$$\mathfrak{l}(0, 0) = \text{gegebene Konstante} > 0,$$
$$\mathfrak{l}(t, 0) \equiv 0 \text{ für } 0 < t \leq 1;$$

β) für ein offenes Kollektiv

$$\mathfrak{l}(t, 0) = \mathfrak{l}_0(t),$$

wo $\mathfrak{l}_0(t)$ eine gegebene identisch nicht verschwindende Funktion im $0 \leq t \leq 1$ ist. Für statistische Erwägungen ist es speziell zweckmässig vorauszusetzen, dass $\mathfrak{l}_0(t)$ eine glatte Funktion ist.[3])

Die Verteilung des geschlossenen Kollektivs können wir approximativ lösen, indem wir die Bedingung α) durch folgenden Fall ersetzen:

Voraussetzung α'). Wir setzen voraus, dass der Anfangsstand $\mathfrak{l}(0, 0)$ eines abgeschlossenen Kollektivs sich auf ein genügend kleines Zeitintervall $< 0, \varepsilon >$ zerlegt. Dann können wir die Funktion $\mathfrak{l}_0(t)$ so wählen, dass sie zwar sehr heftig aber doch glatt zur Null sinkt, sodass im $< \varepsilon, 1 >$ stets gleich Null ist. Diese Bedingung ist augenscheinlich ein spezieller Fall von β).

§ 2. Hilfsfunktionen.

Zur analytischen Beschreibung des Zerfalls eines bestimmten Kollektivs benützen wir Funktionen:

1. Die Austritts- (Ausscheidungs-)intensitäten. Es sei

$$\eta_i(t, \tau)$$

die Intensität, mit der das Ausscheiden eines Individuums, welches insgesamt die Zeit τ im Kollektiv verbracht hatte, im Augenblicke t aus dem Kollektiv infolge des Verlustes des Merkmales i geschieht.

2. Die Rückkehrintensitäten. Das Individuum hat das Kollektiv infolge des Verlustes des Merkmales i im Augenblick

$$\xi < t$$

verlassen und bis zum Beobachtungsaugenblick t ist es nicht zurückgekehrt. Dann sei

$$\varrho_i(t, \xi)$$

die Rückkehrintensität infolge des Wiedererwerbens des Merkmales i im Augenblicke t.

---

[3]) Wie bekannt eine Funktion $\mathfrak{l}(t, \tau)$ heisst glatt, wenn sie stetig nebst ihren ersten Abgeleiteten ist.

In der statistischen Praxis könnte speziell der Fall

$$\varrho_i = \varrho_i(t, t - \xi)$$

eintreten.

3. Die Wahrscheinlichkeiten des ununterbrochenen Vorkommens ausserhalb des Kollektivs. Ist ξ ein beliebiger Augenblick vor dem Beobachtungsaugenblicke t, also $\xi < t$, so sei

$$p_i(t, \xi)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass das Individuum, welches im Augenblick ξ das Merkmal i verloren hat, bis zum t noch immer (d. h. ununterbrochen) ohne dieses Merkmal ist.

Aus der Definitionen der ϱ_i, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ folgt, dass das Individuum im Laufe des halbgeschlossenen Intervalls $< \xi, t)$ dauernd ausserhalb des Kollektivs ist.

[2] Im Falle, dass die Austrittsintensitäten nicht von der Veränderlichen τ abhängen, also wenn

$$\eta_i = \eta_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ist es vorteilhaft statt dieser Intensitäten die Austrittsfunktionen

$$\mathfrak{f}_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

einzuführen. Dem Inhalt nach bedeutet $\mathfrak{f}_i(t)$ die Anzahl derjenigen Individuen, die aus dem Kollektiv im Laufe des Zeitintervalls $< 0, t >$ infolge des Verlustes des Merkmales i ausgetreten sind.

Der Zusammenhang zwischen Austrittsfunktion und Austrittsintensität wird wie folgt ausgedrückt:

Es sei $\mathfrak{f}_i(t)$ eine differenzierbare Funktion; dann

$$\eta_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{\Delta \mathfrak{f}_i(t)}{\Delta t}}{\mathfrak{l}(t)} = \frac{\mathfrak{f}'_i(t)}{\mathfrak{l}(t)}$$

für jeden Punkt $0 \leq t \leq 1$ (in Endpunkten 0 und 1 handelt es sich um den einseitigen Limes).

§ 3. Eindimensionales Problem für abgeschlossene Kollektivs.

[1] — Den Kern des eindimensionalen Problems für abgeschlossene Kollektivs bildet folgende Aufgabe:

Aus der gegebenen Anzahl $\mathfrak{l}(0)$ der Individuen ist die Anzahl $\mathfrak{l}(t)$ derjenigen Individuen zu bestimmen, die im Augenblicke t in das Kollektiv gehören.

Bei der Lösung dieser Aufgabe wird unser Ziel sein mittels der Stieltjes'schen Integration die allgemeine Beziehung abzuleiten, aus der durch die Spezialisation der Voraussetzungen die gewöhnliche Integrodifferentialgleichung folgt, die die Anzahl $l(t)$ der Individuen im Kollektiv im beliebigen Augenblick bestimmt.

Deshalb wollen wir uns früher die Definition der Stieltjes'schen Integration ins Gedächtnis rufen. (Stieltjes: Recherches sur les fonctions continues, Ann. Fac. Sc. de Toulouse 1894, 1895, chap. VI.)[4])

Auf dem geschlossenen Intervall $< a, b >$ seien gegeben:

1. eine stetige Funktion $f(x)$ und

2. eine Funktion $\varphi(x)$, welche auf diesem Intervalle beschränkte Variation hat.

Teilen wir das Intervall durch die Punkte

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu < \ldots < x_n = b$$

und wählen wir im $<x_{\nu-1}, x_\nu>$ einen beliebigen Punkt ξ_ν. Dann existiert

$$\lim \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\,[\varphi(x_\nu) - \varphi(x_{\nu-1})]$$

für $n \to \infty$ und $\mathrm{Max}\,(x_\nu - x_{\nu-1}) \to 0$ und zwar unabhängig von der Wahl der Zahlen x_ν und ξ_ν. Diesen Limes bezeichnen wir

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$$

und nennen das Stieltjes'sche Integral.

[2] — Wir wollen folgende Voraussetzungen annehmen:

1. Die Austrittsfunktionen

$$f_i = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

seien auf $< 0, 1 >$ stetig und monoton.[5])

2. Die Rückkehrintensitäten $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\varrho_i = \varrho_i(t, u)$$

und die Wahrscheinlichkeiten $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$p_i = p_i(t, u)$$

seien stetig in beiden Veränderlichen t, u auf $0 \leq u \leq t \leq 1$.

---

[4]) Genauer gesagt handelt es sich um die Riemann-Stieltjes'sche Integration.

[5]) Aus der Bedeutung der Austrittsfunktionen folgt, dass f_i monoton und nicht abnehmend sind, sodass für zwei beliebige Werte $T > t$

$$f_i(T) \geq f_i(t)$$

gilt, wobei das Gleichheitszeichen nur in dem Falle Geltung hat, wenn $f_i = \text{const.}$ auf dem geschlossenen Intervalle $< t, T >$.

Über die Ableitungen stellen wir keine Voraussetzungen auf. Wählen wir zwei feste (sonst beliebige) Augenblicke

$$t_1 < t$$

auf $< 0, 1 >$. Weiter soll σ einen veränderlichen Augenblick bedeuten, für welchen

$$t_1 \leq \sigma \leq t.$$

Wenn wir uns σ als fest denken, dann sei ξ ein neuer veränderlicher Augenblick, welcher die Bedingung

$$0 \leq \xi \leq \sigma$$

erfüllen soll.

Der Wert $$\mathrm{l}(t) - \mathrm{l}(t_1)$$

gibt die Veränderung in der Zahl der Individuen im Laufe des Zeitintervalls $< t_1, t >$ an. Dieser Wert gleicht aber

[der Anzahl derjenigen Individuen, die im geschlossenen Intervall $< t_1, t >$ aus der Gesamtheit aller ausgetretenen zwischen 0 und t zurückkehren] minus [die Anzahl der im $< t_1, t >$ ausgetretenen Individuen].

Wählen wir auf $< t_1, t >$ einen beliebigen, vorläufig festen, Augenblick σ und teilen das Interval $< 0, \sigma >$ durch die Punkte

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{\nu-1} < \xi_\nu < \ldots < \xi_m = \sigma$$

Im Intervall $< \xi_{\nu-1}, \xi_\nu >$ sind

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathrm{f}_i(\xi_\nu) - \mathrm{f}_i(\xi_{\nu-1})]$$

Individuen ausgetreten, welche wir uns alle in dem Augenblick $\dfrac{\xi_{\nu-1} + \xi_\nu}{2}$ konzentriert denken. Aus denen sind dann wahrscheinlich

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_i \left(\sigma, \frac{\xi_{\nu-1} + \xi_\nu}{2}\right) [\mathrm{f}_i(\xi_\nu) - \mathrm{f}_i(\xi_{\nu-1})]$$

bis zum Augenblick σ nicht zurückgekehrt. Aus dieser Anzahl werden

$$d\sigma \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_i \left(\sigma, \frac{\xi_{\nu-1} + \xi_\nu}{2}\right) \varrho_i \left(\sigma, \frac{\xi_{\nu-1} + \xi_\nu}{2}\right) [\mathrm{f}_i(\xi_\nu) - \mathrm{f}_i(\xi_{\nu-1})]$$

im Intervall $(\sigma, \sigma + d\sigma)$ zurückkehren. Der Beitrag in dem ganzen Intervall $< 0, \sigma >$ ist

$$d\sigma \sum_{i=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{m} \mathrm{p}_i \left(\sigma, \frac{\xi_{\nu-1} + \xi_\nu}{2}\right) \varrho_i \left(\sigma, \frac{\xi_{\nu-1} + \xi_\nu}{2}\right) [\mathrm{f}_i(\xi_\nu) - \mathrm{f}_i(\xi_{\nu-1})].$$

Wenn $m \to \infty$ und Max $(\xi_\nu - \xi_{\nu-1}) \to 0$, dann konvergiert dieser Ausdruck zur Summe der n Stieltjes'schen Integrale

$$d\sigma \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\sigma} p_i(\sigma, \xi)\, \varrho_i(\sigma, \xi)\, df_i(\xi).$$

Ist nun σ ein veränderlicher Augenblick, kehren insgesamt

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t} d\sigma \int_{0}^{\sigma} p_i(\sigma, \xi)\, \varrho_i(\sigma, \xi)\, df_i(\xi)$$

Individuen zurück.

Dem gegenüber treten im $< t_1, t >$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t} df_i(\xi)$$

Individuen aus.

Durch Vergleich folgt also

$$l(t) - l(t_1) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{t_1}^{t} d\sigma \int_{0}^{\sigma} p_i(\sigma, \xi)\, \varrho_i(\sigma, \xi)\, df_i(\xi) - \int_{t_1}^{t} df_i(\xi) \right\}.$$

Weil auf der rechten Seite stetige Funktionen mit beschränkter Variation nach der Veränderlichen t vorkommen, ist $l(t)$ gleichfalls eine stetige Funktion mit beschränkter Variation, sodass zwischen den den Zerfall des Kollektivs beschreibenden Funktionen die Grundrelation

$$\int_{t_1}^{t} dl(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{t_1}^{t} d\sigma \int_{0}^{\sigma} p_i(\sigma, \xi)\, \varrho_i(\sigma, \xi)\, df_i(\xi) - \int_{t_1}^{t} df_i(\xi) \right\} \tag{1}$$

besteht und zwar für jede zwei Punkte $0 \leq t_1 \leq t \leq 1$.

[3] — Wir wollen nun beweisen, dass unter spezialisierenden Voraussetzungen aus der Grundrelation die gewöhnliche Integrodifferentialgleichung für die Verteilungsfunktion $l(t)$ entsteht.

Wir wählen nämlich die Werte

$$t,\ t + \Delta t$$

als Integrationsgrenzen und setzen voraus, dass $l(\xi)$ und $f_i(\xi)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ in jedem Punkte auf $< 0, 1 >$ stetige Ableitung haben (in den Intervallgrenzen handelt es sich um die einseitigen Ableitungen).

Laut der Definition

$$\eta_i(\xi) = \frac{f'_i(\xi)}{l(\xi)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

führen wir statt Austrittsfunktionen $f_i(\xi)$ die Austrittsintensitäten $\eta_i(\xi)$ ein. Dann

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} dl(\sigma) = \frac{dl(t)}{dt},$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{t+\Delta t} d\sigma \int_0^{\sigma} p_i(\sigma, \xi)\, \varrho_i(\sigma, \xi)\, df_i(\xi) = \int_0^t p_i(t, \xi)\, \varrho_i(t, \xi)\, \eta_i(\xi)\, l(\xi)\, d\xi$$

und

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} df_i(\xi) = \eta_i(t)\, l(t)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wenn wir

$$K(t, \xi) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t, \xi)\, \varrho_i(t, \xi)\, \eta_i(\xi)$$

und

$$\eta(t) = -\sum_{i=1}^{n} \eta_i(t)$$

setzen, so entsteht aus (1) die Integrodifferentialgleichung

$$\frac{dl(t)}{dt} = \eta(t) \,.\, l(t) + \int_0^t K(t, \xi)\, l(\xi)\, d\xi$$

$$(0 \leq t \leq 1)$$

mit der Anfangsbedingung $l(0)$, d. i. die Gleichung, zu welcher Herr Dr. E. Schoenbaum bei der Konstruktion der Invaliditätstabellen gekommen ist.

II. Teil.

Das zweidimensionale Problem.

§ 1. Integrodifferentialgleichung für das offene Kollektiv.

Setzen wir voraus, daß sich die Verteilung des offenen Kollektivs durch eine glatte Funktion $l(t, \tau)$, d. h. durch eine stetige Funktion nebst ihren ersten stetigen Derivierten, beschreiben lässt.

Im Innern des Gebietes $0 \leq \tau \leq t \leq 1$ wählen wir einen beliebigen Punkt (t, τ) und beobachten wir die Veränderungen, welche im Intervall $(t, t + \Delta t)$ in dem Kollektiv entstehen.

(I.) Vorerst scheiden die Individuen

$$l(t, \tau) \,.\, \left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i(t, \tau)\right] .\, \Delta t = A(t, \tau) \,.\, \Delta t$$

aus.

(II.) Es kommen sodann hinzu Individuen, welche im Augenblick $\xi < t$ ausgeschieden sind und im offenen Intervall (ξ, t) noch nicht zurückgekehrt sind. Ihre Anzahl bestimmen wir wie folgt:

Im $(\xi, \xi + \Delta\xi)$ sind

$$l(\xi, \tau) \,.\, \left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i(\xi, \tau)\right] .\, \Delta\xi$$

Individuen ausgeschieden, von welchen wahrscheinlich bis zum Augenblick t

$$\mathrm{l}(\xi, \tau)\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i(\xi, \tau)\, \mathrm{p}_i(t, \xi)\right] . \Delta\xi$$

noch nicht zurückgekehrt sind.

Aus dieser Anzahl kehrt im $(t, t + \Delta t)$

$$\mathrm{l}(\xi, \tau)\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i(\xi, \tau)\, \mathrm{p}_i(t, \xi)\, \varrho_i(t, \xi)\right] . \Delta\xi \,.\, \Delta t$$

zurück.

In Frage kommen alle Teilintervalle $\Delta\xi$ zwischen 0 und t mit der Bedingung Max $\Delta\xi \to 0$, wenn sich die Anzahl dieser Intervalle über alle Grenzen vergrössert, sodass die ganze Anzahl der zurückkehrenden Individuen

$$\Delta t \,.\int_0^t \mathrm{l}(\xi, \tau) \,.\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i(\xi, \tau)\, \mathrm{p}_i(t, \xi)\, \varrho_i(t, \xi)\right] \mathrm{d}\xi$$

ist. Aber

$$\mathrm{l}(t, \tau) \equiv 0 \quad (t < \tau),$$

voraus das Resultat

$$\Delta t \,.\int_\tau^t \mathrm{l}(\xi, \tau) \,.\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i(\xi, \tau)\, \mathrm{p}_i(t, \xi)\, \varrho_i(t, \xi)\right] \mathrm{d}\xi = \mathrm{B}(t, \tau) \,.\, \Delta t.$$

(III.) Die Anzahl der Individuen, welche im Zeitraume $(t, t + \Delta t)$ im Kollektiv war, ist

$$\mathrm{l}(t + \Delta t, \tau + \Delta t) - \mathrm{l}(t, \tau).$$

Aus (I), (II) und (III) folgt

$$\frac{\mathrm{l}(t + \Delta t, \tau + \Delta t) - \mathrm{l}(t, \tau)}{\Delta t} = \mathrm{B}(t, \tau) - \mathrm{A}(t, \tau).$$

Nach Voraussetzung ist $\mathrm{l}(t, \tau)$ eine glatte Funktion, daher können wir den Mittelwertsatz

$$\mathrm{l}(t + \Delta t, \tau + \Delta t) = \mathrm{l}(t, \tau) + \Delta t\left[\frac{\partial \mathrm{l}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial \tau}\right]_{t+\vartheta\Delta t,\, \tau+\vartheta\Delta t}$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

verwenden, voraus

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\mathrm{l}(t + \Delta t, \tau + \Delta t) - \mathrm{l}(t, \tau)}{\Delta t} = \frac{\partial \mathrm{l}(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{l}(t, \tau)}{\partial \tau}.$$

Wenn wir zur Vereinfachung

$$\eta(t, \tau) = -\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t, \tau)$$

und

$$\alpha(\xi, t, \tau) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t, \tau)\, \mathrm{p}_i(t, \xi)\, \varrho_i(t, \xi)$$

setzen, entsteht für $\mathrm{l}(t, \tau)$ die Gleichung

$$\frac{\partial \mathrm{l}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial \tau} = \mathrm{l}(t, \tau) \,.\, \eta(t, \tau) + \int_{\tau}^{t} \mathrm{l}(\xi, \tau) \,.\, \alpha(\xi, t, \tau)\, d\xi. \tag{1}$$

Diese Gleichung werden wir lösen unter der Voraussetzung, dass die Anfangsbedingung

$$\mathrm{l}(t, 0) = \mathrm{l}_0(t)$$

eine glatte Funktion ist.

§ 2. Satz über die Lösung des zweidimensionalen Problemes.

Die Lösung der Gleichung (1) ist im folgenden Satz enthalten:

In der Integrodifferentialgleichung

$$\frac{\partial \mathrm{l}(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{l}(t, \tau)}{\partial \tau} = \mathrm{l}(t, \tau) \,.\, \eta(t, \tau) + \lambda \int_{\tau}^{t} \mathrm{l}(\xi, \tau) \,.\, \alpha(\xi, t, \tau)\, d\xi$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leq \tau \leq \xi \leq t \leq 1 \\ \lambda = \text{allgemein komplexer Parameter} \end{array} \right)$$

seien $\eta(t, \tau)$ und $\alpha(\xi, t, \tau)$ in ihren Definitionsgebieten glatte Funktionen. Weiter sei im Intervall $0 \leq t \leq 1$ die Anfangsbedingung $\mathrm{l}(t, 0) = \mathrm{l}_0(t)$ gegeben, wobei $\mathrm{l}_0(t)$ gleichfalls eine glatte Funktion ist.

Dann existiert eine einzige Funktion $\mathrm{l}(t, \tau; \lambda)$, die

1. im Gebiete $0 \leq \tau \leq t \leq 1$ eine glatte,

2. eine ganze Transzendente in der Veränderlichen λ ist, und

3. bei der angeführten Anfangsbedingung der gegebenen Integrodifferentialgleichung entspricht.

Den Beweis dieses Satzes geben wir in [§§ 3—9] unabhängig von der Volterra'schen Theorie der Integralgleichungen in folgender Weise: Wir setzen voraus, dass es möglich ist die Funktion l formal in eine unendliche Reihe nach den Potenzen eines Parameters λ zu entwickeln und direkt aus der gegebenen Integrodifferentialgleichung bestimmen wir die Bedingungen für die Koeffizienten dieser Reihe. Gelingt es dann diese Koeffizienten zu bestimmen, beweisen wir, dass die formalen Reihen für

$$\mathrm{l},\ \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial t} \text{ und } \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial \tau}$$

in einem bestimmten Gebiete gleichmässig konvergieren. Darauf verifizieren wir, dass die Reihe für l wirklich die Lösung der gegebenen Gleichung ist und in gewöhnlicher Weise beweisen wir die Unizität dieser Lösung bei der gewählten Anfangsbedingung.

§ 3. Formale Reihe, die der Lösung der Grundgleichung entspricht.

Es sei im Gebiete

$$0 \leq \tau \leq \xi \leq t \leq 1$$

für die Funktion $\mathrm{l}(t, \tau)$ die Gleichung

$$\frac{\partial \mathrm{l}(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{l}(t,\tau)}{\partial \tau} = \mathrm{l}(t,\tau) \,.\, \eta(t,\tau) + \lambda \int_{\tau}^{t} \mathrm{l}(\xi,\tau)\, \alpha(\xi, t, \tau)\, \mathrm{d}\xi \tag{2}$$

gegeben. Dabei λ ist ein allgemein komplexer veränderlicher Parameter.

Führen wir die Bezeichnung

$$\mathrm{D}[\mathrm{l}] \equiv \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial \tau}$$

ein und versuchen wir, unter welchen Bedingungen die formale Reihe

$$\mathrm{l}(t, \tau; \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathrm{A}_i, \tag{3}$$

wo $\qquad \mathrm{A}_i = \mathrm{A}_i(t, \tau) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$

der Gleichung genügt. Weil

$$\mathrm{D}[\mathrm{l}] = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\, \mathrm{D}[\mathrm{A}_i],$$

folgt aus (2)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\, \mathrm{D}[\mathrm{A}_i] = \eta \,.\, \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathrm{A}_i + \int_{\tau}^{t} \alpha \,.\, \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{i+1} \mathrm{A}_i\, \mathrm{d}\xi,$$

also durch Vergleichen der Koeffizienten bei den Potenzen des Parameters λ

$$\mathrm{D}[\mathrm{A}_0] = \eta \,.\, \mathrm{A}_0 \tag{4'}$$

$$\mathrm{D}[\mathrm{A}_i] = \eta \mathrm{A}_i + \int_{\tau}^{t} \mathrm{A}_{i-1} \,.\, \alpha\, \mathrm{d}\xi, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4''}$$

was die gesuchten Bedingungen für die Funktionen $\mathrm{A}_i(t, \tau)$ ($i =$ $= 0, 1, 2, \ldots$) sind.

§ 4. Analytischer Ausdruck der Koeffizienten der Reihe (3).

[1] — Die die Koeffizienten bestimmenden Relationen (4′) und (4″) sind lineare partielle Differentialgleichungen I. Ordnung und zwar allgemein von der Form

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z(x, y) \,.\, f_1(x, y) + f_2(x, y) \tag{5'}$$

für die unbekannte Funktion $z = z(x, y)$, wobei $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ in einem gewissen Gebiete gegebene stetige Funktionen sind.

Die Lösung der Gleichung (5') kann man am leichtesten durchführen, wenn man sie durch die Substitution

$$v = \frac{x - y}{2}, \quad w = \frac{x + y}{2}$$

auf die Form

$$\frac{\partial z}{\partial w} = z(w + v, w - v) \,.\, f_1(w + v, w - v) + f_2(w + v, w - v) \tag{5''}$$

reduziert. Die Gleichung (5'') lösen wir als eine gewöhnliche Differentialgleichung mit der Veränderlichen w und mit dem Parameter v.[6]) Es folgt sogleich

$$z(w + v, w - v) \,.\, \exp\left(-\int_v^w f_1(\xi + v, \xi - v)\, d\xi\right) =$$

$$= c + \int_v^w f_2(\xi_1 + v, \ \xi_1 - v) \,.\, \exp\left(-\int_v^{\xi_1} f_1(\xi_2 + v, \ \xi_2 - v) \ d\xi_2\right) d\xi_1,$$

wo c die Integrationskonstante ist.

Also das allgemeine Integral von (5') ist

$$\left.\begin{aligned} z(x, y) \,.\, \exp\left(-\int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}} f_1\left(\xi + \frac{x-y}{2}, \xi - \frac{x-y}{2}\right) d\xi\right) = \\ = \varphi(x - y) + \int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}} f_2\left(\xi_1 + \frac{x-y}{2}, \xi_1 - \frac{x-y}{2}\right) \times \\ \times \exp\left(-\int_{\frac{x-y}{2}}^{\xi_1} f_1\left(\xi_2 + \frac{x-y}{2}, \xi_2 - \frac{x-y}{2}\right) d\xi_2\right) d\xi_1, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wo φ eine beliebige glatte Funktion bedeutet.

---

[6]) E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen. 1930, pag 33.

Es lässt sich leicht verifizieren, dass die Funktion (6) wirklich der Gleichung (5′) genügt.

[2] — Benützen wir das Integral (6) im Spezialfall (4′). Wir setzen

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv t,\ y \equiv \tau \\ \mathrm{f}_1 \equiv \eta(t, \tau),\ \mathrm{f}_2 \equiv 0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

und führen die Anfangsbedingung ein, sodass

$$\mathrm{A}_0(t, \tau) = \mathrm{l}_0(t - \tau) \,.\, \exp\left(\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta}\, \mathrm{d}\xi\right) \tag{7'}$$

ist, wo

$$\bar{\eta} = \eta\left(\xi + \frac{t-\tau}{2},\ \xi - \frac{t-\tau}{2}\right)$$

zur Verkürzung gebraucht wird.

Für die Gleichung (4″) ist aber

$$\mathrm{f}_2 \equiv \int\limits_{\tau}^{t} \mathrm{A}_{i-1}(\xi, \tau)\, \alpha(\xi, t, \tau)\, \mathrm{d}\xi,$$

also aus (6) bei der Wahl $\varphi \equiv 0$ folgt für A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ die rekurrente Relation

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}_i(t, \tau) \,.\, \exp\left(-\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta}\, \mathrm{d}\xi\right) = \\ = \int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \mathrm{d}\xi_1 \,.\, \exp\left(-\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1} \bar{\eta}\, \mathrm{d}\xi_2\right) \times \\ \times \int\limits_{\xi_1 - \frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1 + \frac{t-\tau}{2}} \mathrm{A}_{i-1}\left(\xi_3, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right) . \,\alpha\left(\xi_3, \xi_1 + \frac{t-\tau}{2},\ \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right) \mathrm{d}\xi_3. \end{array}\right\} \tag{7''}$$

[3] — Die Formeln (7′) und (7″) genügen wirklich, denn aus der Definition des offenen Kollektivs folgt, dass die Reihe (3) für $\tau = 0$ gleich

$$\mathrm{l}(t, 0; \lambda) = \mathrm{l}_0(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\, \mathrm{A}_i(t, 0)$$

ist. Aber

$$A_0(t, 0) = l_0(t)$$
$$A_i\,(t, 0) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

also die Anfangsbedingung ist wirklich erfüllt.

§ 5. Hilfssatz 1.

Den Beweisen für die Konvergenz der Reihe (3) und der abgeleiteten Reihen legen wir folgenden Satz zu Grunde.

Hilfssatz 1. Voraussetzung: Es sei im Definitionsgebiete

$$0 \leq l_0(t-\tau) < M = \text{const.},$$
$$|\,\eta(t, \tau)\,| < N = \text{const.},$$

und

$$|\,\alpha(\xi, t, \tau)\,| < L = \text{const.}$$

Behauptung: Dann für jeden Punkt des Gebietes

$$0 \leq \tau \leq t \leq 1$$

gilt

$$|\,A_i(t, \tau)\,| < B_0 \frac{(e^{2N} L t)^i}{i!}$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo positive Konstante B_0 unabhängig von dem Index i ist.

Beweis: Aus der Formel (7′) für A_0 folgt

$$|\,A_0(t, \tau)\,| < M e^N = B_0.$$

Aus der Formel (7″) für A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ ableiten wir zuerst

$$|\,A_i(t, \tau)\,| < \exp\left(\int_0^1 N d\xi\right) \cdot \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} d\xi_1 \exp\left(+\int_0^1 N d\xi_2\right) \cdot \int_{\xi_1-\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1+\frac{t-\tau}{2}} L \cdot |\,A_{i-1}\,|\, d\xi_3.$$

Wenn t auf einen Augenblick ein fester Wert ist, vergrössern wir im Hinblick darauf die Integrationsgrenzen dadurch, dass wir

$$\int_0^1 \ldots d\xi_3 \text{ statt } \int_{\xi_1-\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1+\frac{t-\tau}{2}} \ldots d\xi_3$$

wählen, denn es ist

$$0 \leq \xi_1 - \frac{t-\tau}{2} \leq \xi_1 + \frac{t-\tau}{2} \leq t.$$

Darauf wählen wir

$$\int_0^t \ldots d\xi_1 \quad \text{statt} \quad \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \ldots d\xi_1,$$

weil $0 \leq \tau \leq t \leq 1$ ist.

Daher

$$|\,\mathrm{A}_{i-1}(t,\tau)\,| < e^{2N} L \int_0^1 d\xi_1 \int_0^t \left|\,\mathrm{A}_{i-1}\left(\xi_3, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right)\right| d\xi_3.$$

Wenn wir nun die Grössen B_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) durch die Relation

$$B_i(t) = e^{2N} L \int_0^t B_{i-1}(\xi_3)\, d\xi_3$$

$$(B_0 = \text{const.} > 0)$$

definieren, dann

$$B_i(t) = B_0 \frac{(e^{2N} L t)^i}{i!}.$$

Weil

$$|\,\mathrm{A}_0(t,\tau)\,| < B_0,$$

folgt leicht durch vollständige Induktion

$$|\,\mathrm{A}_i(t,\tau)\,| < B_i(t)$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots),$$

w. z. b. w.

§ 6. Konvergenzbeweis für die Reihe (3).

Aus dem Hilfssatz 1 folgt sogleich

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \,|\,\mathrm{A}_i(t,\tau)\,| < \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i B_i(t) < B_0 \,.\, \exp(e^{2N} L \lambda t).$$

Diese Reihe ist aber eine Majorantenreihe zur (3) und daher konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathrm{A}_i(t,\tau)$ absolut und gleichmässig für jede endliche λ und für jedes Paar (t,τ) im $0 \leq \tau \leq t \leq 1$, w. z. b. w.

§ 7. Hilfssatz 2.

[1] — Im Folgenden brauchen wir die partiellen Derivierten von A_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$). Aus der Formel (7″) folgt:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \exp\left(\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \overline{\eta}\, d\xi\right) \cdot \left[\tfrac{1}{2}\eta(t,\tau) - \tfrac{1}{2}\eta(t-\tau, 0) + \int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \frac{\partial \eta}{\partial t}\, d\xi\right] \cdot \int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \dots d\xi_1 +$$

$$+ \exp\left(\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \overline{\eta}\, d\xi\right) \cdot \left[\tfrac{1}{2} \exp\left(-\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \overline{\eta}\, d\xi_2\right) \cdot \int\limits_{\tau}^{t} A_{i-1}\alpha\, d\xi_3 - \tfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{t-\tau} A_{i-1}\alpha\, d\xi_3 +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} d\xi_1 \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left\{\exp\left(-\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1} \overline{\eta}\, d\xi_2\right) \cdot \int\limits_{\xi_1-\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1+\frac{t+\tau}{2}} A_{i-1} \cdot \alpha\, d\xi_3\right\}\right],$$

wo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\dots\right\} = \left[\exp\left(-\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1} \overline{\eta}\, d\xi_2\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\eta(t-\tau, 0) - \int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1} \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial t}\, d\xi_2\right)\right] \cdot \int\limits_{\xi_1-\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1+\frac{t-\tau}{2}} A_{i-1}\alpha\, d\xi_3 +$$

$$+ \exp\left(-\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1} \overline{\eta}\, d\xi_2\right) \cdot \left[\tfrac{1}{2} A_{i-1}\left(\xi_1 + \frac{t-\tau}{2},\ \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right) \times\right.$$

$$\times\, \alpha\left(\xi_1 + \frac{t-\tau}{2},\ \xi_1 + \frac{t-\tau}{2},\ \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} A_{i-1}\left(\xi_1 - \frac{t-\tau}{2}, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right) \cdot \alpha\left(\xi_1 - \frac{t-\tau}{2}, \xi_1 + \frac{t-\tau}{2}, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right) +$$

$$\left. + \int\limits_{\xi_1-\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1+\frac{t-\tau}{2}} \alpha \cdot \frac{\partial A_{i-1}}{\partial t}\, d\xi_3 + \int\limits_{\xi_1-\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1+\frac{t-\tau}{2}} A_{i-1} \frac{\partial \alpha}{\partial t}\, d\xi_3\right].$$

Wenn wir den Ausdruck in der geschweiften Klammer $\{\dots\}$ zurücksetzen, ist ersichtlich, dass $\frac{\partial A_i}{\partial t}$ die Summe von elf Summanden ist.

Für $\frac{\partial A_i}{\partial \tau}$ erhalten wir einen ähnlichen Ausdruck. Der Unterschied ist nur in folgenden Gliedern:

der 2te und 5te Summand hat das Vorzeichen + statt —,

der 6te, 8te und 9te Summand hat das Vorzeichen — statt +.

Um zu verifizieren, dass die Gleichung (4″) erfüllt ist, genügt es zu bemerken, dass

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \tau} = 0 \tag{8}$$

und weiter, wenn wir den Ausdruck in der geschweiften Klammer zwecks Kürzung durch seine Argumente bezeichnen, gleichfalls

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\xi_1;\ t-\tau\} + \frac{\partial}{\partial \tau}\{\xi_1;\ t-\tau\} = 0. \tag{9}$$

Durch Addition entsteht

$$\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial \tau} = \exp\left(\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta}\,\mathrm{d}\xi\right) . \left[\eta(t,\tau) . \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \ldots \mathrm{d}\xi_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \tau}\right) \mathrm{d}\xi \,. \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \ldots \mathrm{d}\xi_1 \right] +$$

$$+ \int_{\tau}^{t} \mathrm{A}_{i-1} \alpha\, \mathrm{d}\xi_3 + \exp\left(\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta}\,\mathrm{d}\xi\right) . \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \mathrm{d}\xi_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\{\xi_1;\ t-\tau\} + \frac{\partial}{\partial \tau}\{\xi_1;\ t-\tau\}\right),$$

also laut der Definition und den Beziehungen (8) und (9) folgt

$$\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial \tau} = \eta(t,\tau) . \mathrm{A}_i + \int_{\tau}^{t} \mathrm{A}_{i-1} . \alpha\, \mathrm{d}\xi_3,$$

was wirklich eine Gleichung des Typus (4″) ist.

Für die Funktion $\mathrm{A}_0(t, \tau)$ ist die Berechnung analog, aber kürzer.

[2] — Sind

$$l_0(t-\tau), \quad \eta(t,\tau), \quad \alpha(\xi, t, \tau)$$

in ihren geschlossenen Definitionsgebieten g l a t t e Funktionen, dann existieren positive Konstanten M, N, L der Eigenschaft, dass

$$\mathrm{l}_0(t-\tau),\quad \left|\frac{\partial \mathrm{l}_0}{\partial t}\right|,\quad \left|\frac{\partial \mathrm{l}_0}{\partial \tau}\right| < M,$$

$$|\eta(t,\tau)|,\quad \left|\frac{\partial \eta}{\partial t}\right|,\quad \left|\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right| < N$$

und

$$|\alpha(\xi,t,\tau)|,\quad \left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right|,\quad \left|\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\right| < L$$

gilt.

Auf Grund dieses Umstandes beweisen wir den Hilfssatz 2:

Hilfssatz 2: Es seien $\mathrm{l}_0(t-\tau)$, $\eta(t,\tau)$, $\alpha(\xi,t,\tau)$ in ihren geschlossenen Definitionsgebieten glatte Funktionen. Dann

$$\left|\frac{\partial \mathrm{A}_i(t,\tau)}{\partial t}\right| < \frac{(Bt)^i}{i!} + C\int_0^1 d\xi_1 \int_0^t \left|\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{A}_{i-1}\left(\xi_3, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right)\right| d\xi_3$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo positive Konstanten B und C unabhängig sind von i. Die analoge Abschätzung gilt für $\left|\frac{\partial \mathrm{A}_i(t,\tau)}{\partial \tau}\right|$.

Den Beweis führen wir sodurch, dass wir Glied nach Glied aller elf Teile der im [§ 7, 1] berechneten Derivation abschätzen. Bei einigen Gliedern könnte man zwar diese Abschätzung kürzen, wir führen jedoch eine genaue Berechnung durch um die Kontrolle direkt zu ermöglichen.

Der erste, zweite und dritte Summand in dem Ausdrucke für $\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial t}$ hat die Form

$$\mathrm{A}_i(t,\tau)\left[\tfrac{1}{2}\eta(t,\tau) - \tfrac{1}{2}\eta(t-\tau,0) + \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \frac{\partial \eta}{\partial t}\, d\xi\right]$$

und absolut genommen ist kleiner als

$$|\mathrm{A}_i(t,\tau)| \cdot \left[\tfrac{1}{2}N + \tfrac{1}{2}N + \int_0^1 N\, d\xi\right],$$

voraus nach dem Hilfssatz 1. die obere Grenze

$$2NB_0' \frac{(e^{2N}Lt)^i}{i!}$$

folgt.

Der vierte Summand hat die Form

$$\exp\left(\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta}\, d\xi\right) \cdot \tfrac{1}{2} \exp\left(-\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta}\, d\xi_2\right) \cdot \int_{\tau}^{t} \mathrm{A}_{i-1}(\xi_3, \tau) \cdot \alpha(\xi_3, t, \tau)\, d\xi_3$$

und im absoluten Wert ist er kleiner als

$$\frac{L}{2} \int_0^t |\mathrm{A}_{i-1}(\xi_3, \tau)|\, d\xi_3.$$

Aber aus dem Hilfssatz 1.

$$|\mathrm{A}_{i-1}(\xi_3, \tau)| < B_0 \frac{(e^{2N} L \xi_3)^{i-1}}{(i-1)!},$$

also gilt sicher die Abschätzung

$$\tfrac{1}{2} B_0 \frac{(e^{2N} L t)^i}{i!}.$$

Der fünfte Summand

$$-\tfrac{1}{2} \exp\left(\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta}\, d\xi\right) \cdot \int_0^{\frac{t-\tau}{2}} \mathrm{A}_{i-1}(\xi_3, 0) \cdot \alpha(\xi_3, t-\tau, 0)\, d\xi_3$$

führt zu derselben Abschätzung.[7])

Der sechste Summand

$$\exp\left(\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta}\, d\xi\right) \cdot \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} d\xi_1 \cdot \exp\left(-\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1} \bar{\eta}\, d\xi_2\right) \cdot \tfrac{1}{2} \eta(t-\tau, 0) \times$$

$$\times \int_{\xi_1 - \frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1 + \frac{t-\tau}{2}} \mathrm{A}_{i-1}\left(\xi_3, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right) \cdot \alpha\left(\xi_3, \xi_1 + \frac{t-\tau}{2}, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right) d\xi_3$$

---

[7]) Es ist

$$\tfrac{1}{2} e^N L \cdot \int_0^t |\mathrm{A}_{i-1}(\xi_3, 0)|\, d\xi_3 < \tfrac{1}{2} e^{2N} L B_0 (e^{2N} L)^{i-1} \frac{t^i}{i!} = \frac{B_0}{2} \frac{(e^{2N} L t)^i}{i!}.$$

gibt die obere Grenze

$$\exp\left(\int_0^1 N\,d\xi\right) . \int_0^1 d\xi_1 \exp\left(+\int_0^1 N\,d\xi_2\right) . \frac{N}{2} . \int_0^t L . \left|A_{i-1}\left(\xi_3, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right)\right| d\xi_3$$

und nach dem Hilfssatz 1 entsteht

$$\frac{B_0 N}{2} e^{2N} L\,(e^{2N} L)^{i-1} \frac{t^i}{i!} = \tfrac{1}{2} B_0 N \frac{(e^{2N} L t)^i}{i!} .$$

Für den siebenten Summand

$$-\exp\left(\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \overline{\eta}\,d\xi\right) . \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} d\xi_1 \exp\left(-\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1} \overline{\eta}\,d\xi_2\right) \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1} \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial t}\,d\xi_2 \int_{\xi_1 - \frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1 + \frac{t-\tau}{2}} A_{i-1} . \alpha\,d\xi_3$$

ganz analog

$$e^{2N} \int_0^1 d\xi_1 . \int_0^1 N\,d\xi_2 . \int_0^t L \left|A_{i-1}\left(\xi_3, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right)\right| d\xi_3,$$

sodass das Resultat

$$B_0 N \frac{(e^{2N} L t)^i}{i!}$$

ist.

Der achte Summand hat die Form

$$\exp\left(\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \overline{\eta}\,d\xi\right) . \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} d\xi_1 \exp\left(-\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1} \overline{\eta}\,d\xi_2\right) . \tfrac{1}{2} A_{i-1}\left(\xi_1 + \frac{t-\tau}{2},\ \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right) \times$$

$$\times\, \alpha\left(\xi_1 + \frac{t-\tau}{2},\ \xi_1 + \frac{t-\tau}{2},\ \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right)$$

und die dazugehörige Abschätzung ist

$$\tfrac{1}{2} e^{2N} L \int_0^t \left|A_{i-1}\left(\xi_1 + \frac{t-\tau}{2},\ \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right)\right| d\xi_1.$$

Weil

$$\left|A_{i-1}\left(\xi_1 + \frac{t-\tau}{2},\ \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right)\right| < B_0 \frac{(e^{2N} L)^{i-1}}{(i-1)!} \left(\xi_1 + \frac{t-\tau}{2}\right)^{i-1},$$

nach Einführung der neuen Integrationsvariablen

$$u = \xi_1 + \frac{t-\tau}{2}$$

entsteht

$$\frac{B_0}{2}\,\frac{(e^{2N}L)^i}{(i-1)!}\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{3t-\tau}{2}} u^{i-1}\,\mathrm{d}u < \frac{B_0}{2}\,\frac{(e^{2N}L)^i}{i!}\cdot\left(\frac{3t-\tau}{2}\right)^i.$$

Aber

$$3t-\tau \leq 3t,$$

also die obere Grenze ist

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{B_0}{i!}\left(\frac{3e^{2N}Lt}{2}\right)^i.$$

Dieselbe Abschätzung erhalten wir für den neunten Summand.

Der zehnte Summand

$$\exp\left(\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta}\,\mathrm{d}\xi\right)\cdot\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}}\mathrm{d}\xi_1\cdot\exp\left(-\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1}\bar{\eta}\,\mathrm{d}\xi_2\right)\cdot\int\limits_{\xi_1-\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1+\frac{t-\tau}{2}}\alpha\cdot\frac{\partial \mathrm{A}_{i-1}}{\partial t}\,\mathrm{d}\xi_3$$

ist in seinem absoluten Wert kleiner als

$$e^{2N}L\int\limits_0^1\mathrm{d}\xi_1\int\limits_0^t\left|\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{A}_{i-1}\left(\xi_3,\,\xi_1-\frac{t-\tau}{2}\right)\right|\mathrm{d}\xi_3.$$

Der letzte, elfte Summand führt zur Grenze

$$e^{2N}L\int\limits_0^1\mathrm{d}\xi_1\int\limits_0^t\left|\mathrm{A}_{i-1}\left(\xi_3,\,\xi_1-\frac{t-\tau}{2}\right)\right|\mathrm{d}\xi_3,$$

aus welcher folgt wie früher

$$B_0\,\frac{(e^{2N}Lt)^i}{i!}.$$

Addieren wir jetzt alle Abschätzungen, ist ersichtlich, dass bei geeigneter Wahl der positiven Konstante A (unabhängig vom Index i)

$$\left|\frac{\partial \mathrm{A}_i(t,\tau)}{\partial t}\right| < \frac{A}{i!}\left(\frac{3e^{2N}Lt}{2}\right)^i + e^{2N}L\int\limits_0^1\mathrm{d}\xi_1\int\limits_0^t\left|\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{A}_{i-1}\left(\xi_3,\,\xi_1-\frac{t-\tau}{2}\right)\right|\mathrm{d}\xi_3$$

ist.

Noch einfacher können wir schreiben

$$\left|\frac{\partial \mathrm{A}_i(t,\tau)}{\partial t}\right| < \frac{(Bt)^i}{i!} + C\int_0^1 \mathrm{d}\xi_1 \int_0^t \left|\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{A}_{i-1}\left(\xi_3, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right)\right| \mathrm{d}\xi_3,$$

wenn wir passend weitere positive Konstanten B und C (unabhängig von i) wählen, was durch vollständige Induktion die im Hilfssatz 2 ausgesprochene Abschätzung ist.

§ 8. Hilfssatz 2′. Beweis der Konvergenz der abgeleiteten Reihen.

[1] — Die Formel im Hilfssatz 2 stellt eine rekurrente Relation vor und wir können leicht aus ihr durch sukzessive Einsetzung eine einfachere Abschätzung ableiten. Wir drücken diese Abschätzung als Hilfssatz 2′ aus.

Hilfssatz 2′. Ausser den Voraussetzungen im Hilfssatz 2 sei

$$\left|\frac{\partial \mathrm{A}_0}{\partial t}\right| \text{ und } \left|\frac{\partial \mathrm{A}_0}{\partial \tau}\right| < K = \text{Konstante} \qquad (K \geq 1).$$

Dann ($i = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\left|\frac{\partial \mathrm{A}_i(t,\tau)}{\partial t}\right| \text{ und } \left|\frac{\partial \mathrm{A}_i(t,\tau)}{\partial \tau}\right| < \frac{(Et)^i}{i!},$$

wo

$$E = B + CK.$$

Der Beweis ist sehr einfach und man kann ihn direkt aus dem Hilfssatz 2 ableiten.[8])

[2] — Aus dem Hilfssatz 2′ folgt der Schluss:

Es ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \left|\frac{\partial \mathrm{A}_i(t,\tau)}{\partial t}\right| \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \left|\frac{\partial \mathrm{A}_i(t,\tau)}{\partial \tau}\right| < e^{E\lambda t},$$

---

[8]) Es ist, z. B. für $i = 1$ und 2:

$$\left|\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial t}\right| < (B + CK)\, t$$

$$\left|\frac{\partial \mathrm{A}_2}{\partial t}\right| < \frac{(Bt)^2}{2!} + C\int_0^1 \mathrm{d}\xi_1 \int_0^t (B + CK)\, \xi_3\, \mathrm{d}\xi_3 = \frac{t^2}{2}\left[B^2 + BC + C^2K\right]$$

und weil $K \geq 1$, also sicher

$$\left|\frac{\partial A_2}{\partial t}\right| < \frac{t^2}{2}\left[B^2 + 2BC + C^2K^2\right] = \frac{t^2}{2}(B + CK)^2.$$

und man kann daher beweisen, dass die Reihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{\partial A_i}{\partial t}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{\partial A_i}{\partial \tau}$$

absolut und gleichmässig konvergieren im $0 \leq \tau \leq t \leq 1$ und für jede endliche λ, w. z. b. w.

§ 9. Verifikation, dass die Reihe (3) die Lösung der Grundgleichung ist.

Die Verifikation, dass die Reihe (3) wirklich die Lösung der Gleichung (2) vorstellt, ist nur ein Schluss der vorigen Erwägungen. Denn wir können die Hilfsgrösse

$$A_{-1} \equiv 0$$

definieren und daher genügen die Koeffizienten A_i ($i = 0, 1, 2, 3, \ldots$) den Gleichungen

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial \tau} = \eta . A_i + \int_{\tau}^{t} \alpha . A_{i-1} \, d\xi.$$

Addieren wir diese Gleichungen für $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, wobei wir früher die i-te Gleichung durch die i-te Potenz des Parameters λ multiplizieren. Dann

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=0}^{n} \lambda^i A_i + \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{i=0}^{n} \lambda^i A_i = \eta . \sum_{i=0}^{n} \lambda^i A_i + \lambda \int_{\tau}^{t} \alpha . \sum_{i=0}^{n} \lambda^{i-1} A_{i-1} \, d\xi.$$

Nun aber konvergieren alle betrachteten Reihen gleichmässig und wir können daher den Limesprozess $n \to \infty$ durchführen, wodurch man zur ursprünglichen Gleichung (3) gelangt.

Bemerkung: Die Unizität der Lösung bei gegebenen Anfangsbedingungen führe ich nicht ein. weil sie leicht nach bekannten Methoden sich beweisen lässt.

§ 10. Eine Hilfswahrscheinlichkeit.

[1] — Die Exponentialfunktionen in den Formeln (7′) und (7″) lassen sich durch Einführung gewisser Wahrscheinlichkeiten statt Intensitäten beseitigen. Damit erhalten wir auch eine inhaltliche Interpretation der Koeffizienten A_i.

So z. B. können wir folgende Erwägung machen: Wir setzen voraus, dass die ausgetretenen Individuen nicht mehr zurückkehren. Dann folgt leicht die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\mathrm{l}\left(\xi+\frac{t-\tau}{2}, \xi-\frac{t-\tau}{2}\right)} \cdot \frac{\mathrm{dl}\left(\xi+\frac{t-\tau}{2}, \xi-\frac{t-\tau}{2}\right)}{\mathrm{d}\xi} = \bar{\eta}.$$

Durch Integration im $< \frac{t-\tau}{2}, \frac{t+\tau}{2} >$ also

$$\mathrm{l}(t, \tau) = \mathrm{l}(t-\tau, 0) \,.\, \exp\left(\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta} \, \mathrm{d}\xi\right).$$

Den Sinn haben nun nur diejenigen Werte $(t-\tau)$, für welche $\mathrm{l}(t-\tau, 0) \neq 0$, sodass

$$\frac{\mathrm{l}(t, \tau)}{\mathrm{l}(t-\tau, 0)} = \exp\left(\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta} \, \mathrm{d}\xi\right) = \bar{p}(t, \tau)$$

die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Individuum, welches zum erstenmal im Augenblick $(t-\tau)$ in das Kollektiv tritt, in ihm im Augenblick t gerade die ganze Zeit τ sein wird.

Wenn wir $$t-\tau = a$$

setzen, dann
$$\frac{\mathrm{l}(t, \tau)}{\mathrm{l}(t-\tau, 0)} = \frac{\mathrm{l}(a+\tau, \tau)}{\mathrm{l}(a, 0)} = \bar{p},$$

sodass man auch sagen kann, dass $\bar{p}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Individuum von seinem Eintritt a bis zum Beobachtungsaugenblicke $(a+\tau)$ immerwährend im Kollektiv sein wird.

[2] — Mittels der gerade angeführten Hilfswahrscheinlichkeit $\bar{p}$ können wir verschiedene Spezialkollektivs construiren, die mit beliebiger Genauigkeit das gegebene Kollektiv approximieren. Es genügt z. B. auf bestimmter Anzahl der Glieder in der Reihe (3) sich zu beschränken.

Als einfacher Fall will ich die Bedeutung des ersten Koeffizienten (7') andeuten. Es ist nämlich

$$\mathrm{A}_0(t, \tau) = \bar{p}(t, \tau) \,.\, \mathrm{l}_0(t, \tau)$$

was sich interpretieren lässt wie folgt: Wenn die Austrittsintensitäten nicht wirken, dann verteilt sich das Kollektiv in den Koordinaten t und τ nach der Funktion l_0. Unter Wirkung der Austrittsintensitäten hat das Kollektiv Verluste und die wahrscheinliche Verteilung ist daher A_0.

§ 11. Reduktion der Grundgleichung auf eine Integralgleichung II. Art.

[1] — Statt der Gleichung (2) kann man die Gleichung mit dem Parameter μ

$$\frac{\partial \mathrm{l}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial \tau} = \mu \left\{ \mathrm{l} \cdot \eta + \int_{\tau}^{t} \mathrm{l}(\xi, \tau) \cdot \alpha(\xi, t, \tau)\, d\xi \right\}$$

benutzen.

Durch die im [§ 4, 1] eingeführte Substitution reduziert sich diese Gleichung auf

$$\mathrm{l}(t, \tau) = \mathrm{l}_0(t - \tau) + \mu \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \mathrm{F}\left(\xi, \frac{t-\tau}{2}; \mathrm{l}\right) d\xi, \tag{10}$$

wo

$$\mathrm{F}\left(\xi, \frac{t-\tau}{2}; \mathrm{l}\right) \equiv \mathrm{l}\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \cdot \eta\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) +$$
$$+ \int_{\xi-\frac{t-\tau}{2}}^{\xi+\frac{t-\tau}{2}} \mathrm{l}\left(\xi_1, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \cdot \alpha\left(\xi_1, \xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) d\xi_1.$$

Dabei ist l_0 eine glatte nach den Anfangsbedingungen beliebig wählbare Funktion.

[2] — Die Lösung der Gleichung (10) ist im Gebiete

$$0 \leq \tau \leq t \leq 1$$

durch die gleichmässig konvergente (ganze Transzendente in μ) Reihe

$$\mathrm{l}(t, \tau; \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i\, \mathrm{F}_i(t, \tau) \tag{11}$$

mit den Gliedern $\qquad \mathrm{F}_0(t, \tau) = \mathrm{l}_0(t - \tau)$

$$\mathrm{F}_i(t, \tau) = \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} d\xi \left\{ \mathrm{F}_{i-1}\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \cdot \eta\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \int_{\xi-\frac{t-\tau}{2}}^{\xi+\frac{t-\tau}{2}} \mathrm{F}_{i-1}\left(\xi_1, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \cdot \alpha\left(\xi_1, \xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) d\xi_1 \right\}$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

gegeben, wie sich leicht nach der Volterra'schen Theorie der Integralgleichungen bestätigen lässt.

[3] — Wenn

$$\lambda = \mu = 1,$$

dann ist die Reihe (11) nur eine Umformung der Reihe (3). Infolge der Exponentialfunktionen konvergiert (3) schneller als (11). Weiter kann man in (3) die Hilfswahrscheinlichkeit $\bar{p}$ [§ 10] statt Intensitäten setzen.

§ 12. Schlussbemerkung.

Ich will noch eine mögliche Erweiterung der Theorie des zeitlichen Zerfalls der statistischen Kollektivs andeuten.

Verändern wir das Modell des Kollektivs so, damit die Grundgleichung die Form

$$\frac{\partial \mathrm{l}(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{l}(t,\tau)}{\partial \tau} = \eta(t,\tau)\,.\,\mathrm{l}(t,\tau) + \int_{-\infty}^{t} \mathrm{l}(\xi,\tau)\,.\,\alpha(\xi,t,\tau)\,d\xi \qquad (12)$$

annimmt. Dazu genügt es die Funktionen η und α entsprechend zu definieren.

Der Sinn der Gleichung (12) ist folgender: Bisweilen haben wir vorausgesetzt, dass ein Kollektiv erst vom Beobachtungsaugenblicke $t = 0$ gegeben ist. Die Veränderungen, die mit den Individuen des Kollektivs vor diesem Augenblicke vorgefallen sind, haben wir vernachlässigt. Aber ein statistisches Kollektiv ist in der Regel ein Auswahl der Individuen, die schon früher in gegenseitigen Beziehungen waren.[9]) Und es ist jetzt sehr wahrscheinlich, dass diese früheren gegenseitigen Beziehungen auch einen Einfluss auf den Zerfall im Laufe des Beobachtungsintervalls ausüben. Die Gleichung (12) ermöglicht gerade solche Zerfallseinflüsse zu ergreifen.

Indessen bleibt die Frage nach der Konstruktion der entsprechenden Modelle der auf (12) führenden Kollektivs offen.

---

[9]) Soweit die früheren Beziehungen der Individuen schon in den Definitionen der Funktionen η und α enthalten sind (denn diese Funktionen sind in der Regel auf Grund eines statistischen Materials aus der Vergangenheit abgeleitet), ist das nicht genügend.