Alfred Tauber

Die Interpolation durch Bernoulli'sche Funktionen

Aktuárské vědy, Vol. 3 (1932), No. 4, 145–165

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144579

Die Interpolation durch Bernoulli'sche Funktionen.*)

Von Prof. Dr. *Alfred Tauber* (Wien).

Die Tatsache, dass für die Interpolation bestimmter Funktionstypen dem Verfahren mit Benützung der Bernoulli'schen Polynome eine grössere Genauigkeit eignet als dem Newtonschen, lässt eine systematische kurze Betrachtung des ersteren, das auch unmittelbar die Sätze von Euler (Woolhouse) über die angenäherte Berechnung von Integralen und Summen reproduziert, wohl gerechtfertigt erscheinen. Definiert man nämlich, in der Bezeichnungsweise von A. Markoff,[1]) die Funktionen

$$\varphi_1(x) = x,\ \varphi_2(x) = \frac{x(x-1)}{2},\ \varphi_3(x) = \frac{x(x-\frac{1}{2})(x-1)}{6},$$

$$\varphi_4(x) = \frac{x^2(x-1)^2}{24}, \ldots \tag{1}$$

und allgemein, unter Verwendung der Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ der Potenzreihe

$$\frac{u}{e^u - 1} = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots, \tag{2}$$

die m-te Bernoulli'sche Funktion als Polynom m-ten Grades

$$\varphi_m(x) = A_0 \frac{x^m}{m!} + A_1 \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + A_{m-1} \frac{x}{1!},\quad m = 1, 2, \ldots \tag{2a}$$

so ergibt sich für den Wert $\mathfrak{f}(a + xh)$, den irgend eine Funktion $\mathfrak{f}$ an der Stelle $a + xh$ annimmt, die interpolierte Darstellung

*) Anmerkung. Bei diesem Aufsatze, der vor Erscheinen des Kowalewski'schen Buches „Interpolation und genäherte Quadratur" (1932) der Redaktion vorgelegt wurde, glaubte der Verfasser im Hinblick auf den Hauptzweck seiner Arbeit, die Vergleichung der Newton'schen und Bernoulli'schen Interpolation, von einer nachträglichen Anknüpfung an die neuen Resultate Kowalewski's absehen zu dürfen.

[1]) A. A. Markoff, Differenzenrechnung (Leipzig 1896), Seite 113.

$$\mathrm{f}(a)+\varphi_1(x)\,[\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)]+\varphi_2(x)\,h\,[\mathrm{f}'(b)-\mathrm{f}'(a)]+\varphi_3(x)\,h^2\,[\mathrm{f}''(b)-\mathrm{f}''(a)]+\ldots \tag{3}$$

mittels der Werte der Funktion f sowie ihrer Ableitungen f′, f″, . . . an den beiden Stellen a und $b = a + h$, während sich die Newton'sche Entwicklung

$$\mathrm{f}(a+xh) \backsim \mathrm{f}(a)+x\,\Delta\mathrm{f}(a)+\binom{x}{2}\Delta^2\mathrm{f}(a)+\binom{x}{3}\Delta^3\,\mathrm{f}(a)+\ldots \tag{4}$$

der Werte von f an den Stellen a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, . . . bedient, ohne die Ableitungen von f zu benützen. Beim Vergleich zwischen den Fehlern (Resten) R, S der Entwicklungen (3), (4), vorausgesetzt dass in beiden nach gleichviel Termen abgebrochen wird, hat man der ersteren jedenfalls dann die grössere Genauigkeit beizumessen, wenn im ganzen Intervall a bis $a+h$ die drei Funktionen S, S — R, S + R ein und dasselbe Vorzeichen besitzen. Zu den Funktionen, bei denen, im Falle des Abbrechens nach drei Termen, die Interpolation (3) genauer ist als die Newton'sche, zählen z. B. zwei so heterogene Typen wie die Exponentialfunktion und der Logarithmus, der Integrallogarithmus, ausserdem auch Versicherungswerte.

Für Logarithmentabellen bietet die Interpolation (3) mithilfe von Nebenkolonnen entschiedenen Vorteil gegenüber derjenigen nach Newton, was auch auf den Mindestumfang der Tabellen Einfluss übt. So genügen die 8-stelligen (markierten)[2]) Logarithmen der dreiziffrigen ganzen Zahlen, um mit ganz geringfügiger Rechnung den Logarithmus jeder positiven Grösse bis auf eine Einheit der 8-ten Dezimalstelle genau anzugeben.

Allerdings muss bei Anwendung der Interpolation (3) wenigstens die erste Ableitung f′ an den beiden Stellen a, $a+h$ bekannt sein, sei es direkt, sei es durch einen Zusammenhang mit der Funktion f selbst. Dies trifft auch bei kontinuierlichen Versicherungswerten zu.

Als unmittelbare Konsequenz von (3) erhält man die Sätze von Euler-Maclaurin und Woolhouse, wenn zwischen 0 und 1 nach x integriert resp. bei ganzzahligem μ die Summe $\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}\left(a+\frac{1}{\mu}\right)+\mathrm{f}\left(a+\frac{2}{\mu}\right)+\ldots+\mathrm{f}\left(a+\frac{\mu-1}{\mu}\right)$ gebildet wird.

Der einleitende Abschnitt I entwickelt, um Hinweise auf die Kompendien der Analysis zu vermeiden, einige Sätze über die Eigenschaften der Bernoulli'schen Polynome.

I. Am einfachsten gestaltet sich die Untersuchung der oben durch (2), (2a) definierten Funktion $\varphi_m(x)$, wenn man diese vorerst durch

[2]) Durch Unterstreichen der letzter Mantissenziffer, falls diese nach oben abgerundet wurde.

die Konstante A_m kompletiert und

$$\bar{\varphi}_m(x) = A_0 \frac{x^m}{m!} + A_1 \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + A_{m-1} \frac{x}{1!} + A_m, \quad m \geqq 0 \quad (5)$$

einführt, so dass bei $\varphi_0(x) = 0$ die Gleichung besteht

$$\bar{\varphi}_m(x) = \varphi_m(x) + A_m \text{ für alle } m = 0, 1, 2, \ldots \quad (5a)$$

Dann bilden die Funktionen $\bar{\varphi}_m(x)$ eine sogenannte Halphen'sche Folge, indem die Ableitung $\bar{\varphi}'_m(x)$ offenbar gleich der vorhergehenden Funktion $\bar{\varphi}_{m-1}(x)$ und allgemein $\bar{\varphi}_m^{(\lambda)}(x) = \bar{\varphi}_{m-\lambda}(x)$ ist, woraus für die λ-te Ableitung von $\varphi_m(x)$

$$\varphi_m^{(\lambda)}(x) = \bar{\varphi}_m^{(\lambda)}(x) = \bar{\varphi}_{m-\lambda}(x) - \varphi_{m-\lambda}(x) + A_{m-\lambda}, \quad \lambda \geqq 1 \quad (5b)$$

folgt. Ziffermässig berechnet man die auftretenden Konstanten $A_0, A_1, \ldots$ sukzessive aus ihrer Definitionsgleichung

$$u = (e^u - 1)\,(A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots),$$

da links und rechts die Koeffizienten von $u, u^2, u^3, \ldots, u^m$ übereinstimmen müssen,

$$1 = A_0, \quad 0 = \frac{A_0}{2!} + \frac{A_1}{1!}, \quad 0 = \frac{A_0}{3!} + \frac{A_1}{2!} + \frac{A_2}{1!}, \quad (6)$$

$$0 = \frac{A_0}{m!} + \frac{A_1}{(m-1)!} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{1!} \text{ für } m \geqq 2, \quad (6a)$$

und zwar ergeben sich $A_3, A_5, \ldots$ gleich Null, weil in der Potenzreihe für

$$\frac{u}{e^u - 1} - A_0 - A_1 u = \frac{u}{e^u - 1} - 1 + \tfrac{1}{2} u = \frac{u}{2}\,\frac{e^u + 1}{e^u - 1} - 1$$

als einer geraden Funktion von u, keine ungeraden Potenzen von u vorkommen dürfen.

Wegen (6a) nimmt das Polynom $\bar{\varphi}_m(x)$ für $x = 1$ den Wert A_m an, besitzt somit die Eigenschaft

$$\bar{\varphi}_m(1) = \bar{\varphi}_m(0) = A_m \text{ für } m \geqq 2, \quad (7)$$

welche auch das Verschwinden aller Integrale

$$\int_0^1 \bar{\varphi}_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}_{m+1}(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \bar{\varphi}_{m+1}(1) - \bar{\varphi}_{m+1}(0) = 0, \; m \geqq 1 \quad (7a)$$

aufzeigt. Ferner ergibt sich bei Multiplikation der zwei Potenzreihen von u

$$\frac{u}{e^u - 1} = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots \text{ und } e^{xu} = 1 + \frac{x}{1!} u + \frac{x^2}{2!} u^2 + \ldots$$

in dem Produkt als Koeffizient von u^m

$$A_0 \frac{x^m}{m!} + A_1 \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + A_m, \quad m \geqq 0$$

d. h. die Funktion $\overline{\varphi}_m(x)$, und dies bedeutet den Satz:

$$\frac{ue^{xu}}{e^u - 1} = \overline{\varphi}_0(x) + \overline{\varphi}_1(x)\, u + \overline{\varphi}_2(x)\, u^2 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\varphi}_m(x)\, u^m. \tag{8}$$

Hieraus erhellt sofort die Eigenschaft

$$\overline{\varphi}_m(1-x) = (-1)^m\, \overline{\varphi}_m(x), \quad m \geqq 0, \tag{8a}$$

weil aus (8), durch Substitution von $(-u)$ statt u

$$\sum_{m=0}^{\infty} \overline{\varphi}_m(x)\,(-u)^m = \frac{(-u)e^{x(-u)}}{e^{-u}-1} = \frac{ue^{(1-x)u}}{e^u - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\varphi}_m(1-x)\, u^m$$

resultiert. Bildet man nun die Gleichung (8) für $x = 0, \frac{1}{\mu}, \frac{2}{\mu}, \ldots, \frac{\mu-1}{\mu}$ und summiert, so entsteht links

$$\frac{u}{e^u-1}\left[1 + e^{\frac{u}{\mu}} + e^{\frac{2u}{\mu}} + \ldots + e^{\frac{\mu-1}{\mu}u}\right] = \frac{u}{e^u-1} \cdot \frac{e^u - 1}{e^{\frac{u}{\mu}} - 1} = \mu \frac{\frac{u}{\mu}}{e^{\frac{u}{\mu}} - 1}$$

welch letzterer Ausdruck gemäss (2) als Potenzreihe $\mu \sum_0^{\infty} A_m (u/\mu)^m$ entwickelbar ist, so dass der Satz gilt

$$\overline{\varphi}_m(0) + \overline{\varphi}_m\left(\frac{1}{\mu}\right) + \ldots + \overline{\varphi}_m\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) = \frac{A_m}{\mu^{m-1}} \text{ für } m \geqq 0. \tag{9}$$

Diese Sätze betreffs der kompletierten Funktionen $\overline{\varphi}_m(x)$ übertragen sich auf die Bernoulli'schen Funktionen $\varphi_m(x) = \overline{\varphi}_m(x) - A_m$, es folgt aus (7)

$$\varphi_m(1) = \varphi_m(0) = 0 \text{ für } m \geqq 2 \tag{10}$$

und nach (5b) für die Ableitungen von $\varphi_m(x)$

$$\varphi_m^{(\lambda)}(1) = \varphi_m^{(\lambda)}(0) = A_{m-\lambda}, \; m - \lambda \geqq 2, \; \lambda \geqq 1. \tag{10a}$$

Der Satz (7a) ergibt

$$\int_0^1 \varphi_m(x)\, dx = -A_m, \; m \geqq 1, \tag{10b}$$

und (8a) zunächst $\varphi_m(1-x) + A_m = (-1)^m [\varphi_m(x) + A_m]$ für alle m, was für $m \geqq 2$, da $A_3, A_5, \ldots$ verschwinden, ersetzbar ist durch

$$\varphi_m(1-x) = (-1)^m \varphi_m(x), \quad m \geqq 2. \tag{11}$$

Der Zusammenhang $\overline{\varphi}_m(x) = \varphi_m(x) + A_m$ lässt auch aus (8) und (9) die Summen finden

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x)\, u^m = \sum_{m=0}^{\infty} [\overline{\varphi}_m(x) - A_m]\, u^m = \frac{u e^{xu}}{e^u - 1} - \frac{u}{e^u - 1} \tag{12}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\mu-1} \varphi_m\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \sum_{\lambda=0}^{\mu-1} \overline{\varphi}_m\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) - \mu A_m = A_m\left(\frac{1}{\mu^{m-1}} - \mu\right). \tag{12a}$$

Durch u dividiert erhält Formel (12), mit Rücksicht auf $\varphi_0 = 0$, die übersichtlichere Gestalt

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\, u + \varphi_3(x)\, u^2 + \ldots = \frac{e^{xu} - 1}{e^u - 1}. \tag{12b}$$

Erwähnt sei noch, dass die explizite Darstellung der Bernoulli'schen Funktion $\varphi_m(x)$ für $m \geqq 2$ eine Vereinfachung durch Einführung von $\xi = x - x^2$ erfährt:

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= -\frac{\xi}{2!} & \varphi_3(x) &= (\tfrac{1}{2} - x)\frac{\xi}{3!} \\
\varphi_4(x) &= \frac{\xi^2}{4!} & \varphi_5(x) &= -(\tfrac{1}{2} - x)\frac{\tfrac{1}{3}\xi + \xi^2}{5!} \qquad (13) \\
\varphi_6(x) &= -\frac{\tfrac{1}{2}\xi^2 + \xi^3}{6!} & \varphi_7(x) &= (\tfrac{1}{2} - x)\frac{\tfrac{1}{3}\xi + \xi^2 + \xi^3}{7!} \ldots
\end{aligned}$$

II. Um die Entwicklung einer Funktion der Variabeln x nach den Bernoulli'schen Polynomen zu untersuchen, braucht man nur mit dem Spezialfall einer positiv-ganzzahligen Potenz x^m zu beginnen, für welche die Gleichung

$$\frac{x^m}{m!} = \frac{\varphi_m(x)}{1!} + \frac{\varphi_{m-1}(x)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi_1(x)}{m!} \tag{14}$$

sich direkt durch Addition von

$$\begin{aligned}
\varphi_m(x) &= A_0\frac{x^m}{m!} + A_1\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + A_2\frac{x^{m-2}}{(m-2)!} + \ldots + A_{m-1}\frac{x}{1!} \\
\frac{1}{2!}\varphi_{m-1}(x) &= \frac{1}{2!}\left[A_0\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + A_1\frac{x^{m-2}}{(m-2)!} + \ldots + A_{m-2}\frac{x}{1!}\right] \\
\frac{1}{3!}\varphi_{m-2}(x) &= \frac{1}{3!}\left[A_0\frac{x^{m-2}}{(m-2)!} + \ldots + A_{m-3}\frac{x}{1!}\right] \\
&\vdots \\
\frac{1}{m!}\varphi_1(x) &= \frac{1}{m!}\frac{x}{1!}
\end{aligned}$$

ergibt, weil sich dabei gemäss (6), (6a) der Koeffizient einer jeden Potenz von x mit Ausnahme desjenigen von x^m aufhebt. In ähnlicher Weise wird die Potenz x^m durch die kompletierten Polynome $\overline{\varphi}_m(x)$ dargestellt

$$\frac{x^m}{m!} = \frac{\overline{\varphi}_m(x)}{1!} + \frac{\overline{\varphi}_{m-1}(x)}{2!} + \ldots + \frac{\overline{\varphi}_1(x)}{m!} + \frac{\overline{\varphi}_0(x)}{(m+1)!}. \tag{14a}$$

Liegt nun irgend ein Polynom von x vor

$$G(x) = c_0 + c_1 \frac{x}{1!} + c_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + c_n \frac{x^n}{n!} \tag{15}$$

und entwickelt man jede einzelne Potenz nach (14), so wird in

$$\begin{aligned} G(x) = c_0 &+ c_1 \frac{\varphi_1(x)}{1!} + c_2 \left[\frac{\varphi_2(x)}{1!} + \frac{\varphi_1(x)}{2!}\right] + \ldots + \\ &+ c_\nu \left[\frac{\varphi_\nu(x)}{1!} + \frac{\varphi_{\nu-1}(x)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi_1(x)}{\nu!}\right] + \\ &+ c_{\nu+1} \left[\frac{\varphi_{\nu+1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_\nu(x)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi_1(x)}{(\nu+1)!}\right] + \ldots + \\ &+ c_n \left[\frac{\varphi_n(x)}{1!} + \ldots + \frac{\varphi_\nu(x)}{(n+1-\nu)!} + \ldots + \frac{\varphi_1(x)}{n!}\right] \end{aligned}$$

der Faktor von $\varphi_1(x)$ gleich der Konstanten

$$\frac{c_1}{1!} + \frac{c_2}{2!} + \ldots + \frac{c_\nu}{\nu!} + \ldots + \frac{c_n}{n!} = G(1) - G(0) \tag{16}$$

und allgemein der Faktor von $\varphi_\nu(x)$

$$\frac{c_\nu}{1!} + \frac{c_{\nu+1}}{2!} + \ldots + \frac{c_n}{(n+1-\nu)!}. \tag{16a}$$

Anderseits erhält man aus (15), durch ν-malige Differentiation nach x

$$\frac{d^\nu G(x)}{dx^\nu} = G^{(\nu)}(x) = c_\nu + c_{\nu+1} \frac{x}{1!} + \ldots + c_n \frac{x^{n-\nu}}{(n-\nu)!},$$

daher als Differenz von $G^{(\nu)}(x)$ an den beiden Stellen $x = 1$ und $x = 0$

$$G^{(\nu)}(1) - G^{(\nu)}(0) = \frac{c_{\nu+1}}{1!} + \frac{c_{\nu+2}}{2!} + \ldots + \frac{c_n}{(n-\nu)!} \tag{17}$$

und demgemäss $G^{(\nu-1)}(1) - G^{(\nu-1)}(0)$ als Wert der Konstanten (16a). Somit lautet die Entwicklung des Polynoms $G(x)$, wenn noch $G(0)$ statt c_0 geschrieben wird

$$\begin{aligned} G(x) = G(0) + \varphi_1(x)\,[G(1) - G(0)] + \varphi_2(x)\,[G'(1) - G'(0)] + \ldots + \\ + \varphi_n(x)\,[G^{(n-1)}(1) - G^{(n-1)}(0)] \end{aligned} \tag{18}$$

und jetzt werde überhaupt für irgendwelche Funktionen $F(x)$ der Variabeln x mit stetigen Ableitungen $F'(x), \ldots, F^{(n)}(x)$ eine solche Entwicklung, mit Angabe der Restfunktion $R_n(x)$, vorgenommen

$$F(x) = F(0) + \varphi_1(x)[F(1) - F(0)] + \varphi_2(x)[F'(1) - F'(0)] + \ldots + \\ + \varphi_n(x)[F^{(n-1)}(1) - F^{(n-1)}(0)] + R_n(x), \tag{19}$$

welche bei $F(x) = f(a + xh)$ die eingangs angeführte Gestalt (3) erlangt. Wegen der Eigenschaft (11) der Bernoulli'schen Funktion folgen aus (19) noch die beiden Formeln

$$\left.\begin{aligned} F(x) + F(1-x) &= F(1) + F(0) + 2\varphi_2(x)[F'(1) - F'(0)] + \\ &+ 2\varphi_4(x)[F'''(1) - F'''(0)] + \ldots, \\ F(x) - F(1-x) &= (2x-1)[F(1) - F(0)] + \\ + 2\varphi_3(x)[F''(1) - F''(0)] &+ 2\varphi_5(x)[F^{(4)}(1) - F^{(4)}(0)] + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

in deren letzterer rechts $(2x-1)$ herausgehoben werden kann, weil $\varphi_3(x), \varphi_5(x), \ldots$ den Faktor $(x - \frac{1}{2})$ enthalten, vgl. (13).

Zum Euler-Maclaurin'schen Satz gelangt man durch Integration der Gleichung (19) zwischen den Grenzen $x = 0$ und 1

$$\int_0^1 F(x)\,dx = F(0)\int_0^1 dx + [F(1) - F(0)]\int_0^1 \varphi_1(x)\,dx + [F'(1) - F'(0)] \times \\ \times \int_0^1 \varphi_2(x)\,dx + \ldots + [F^{(n-1)}(1) - F^{(n-1)}(0)]\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx + \int_0^1 R_n(x)\,dx,$$

d. h. mit Rücksicht auf (10b) und weil $A_3, A_5, \ldots$ verschwinden, für ein gerades n

$$\int_0^1 F(x)\,dx = F(0) - A_1[F(1) - F(0)] - A_2[F'(1) - F'(0)] - \\ - A_4[F'''(1) - F'''(0)] - \ldots - A_n[F^{(n-1)}(1) - F^{(n-1)}(0)] + \int_0^1 R_n(x)\,dx.$$

Ebenfalls aus (19), durch Addition der für $x = 0, \frac{1}{\mu}, \frac{2}{\mu}, \ldots, \frac{\mu-1}{\mu}$ gebildeten Gleichungen, erhält man wegen (12a) die nach Woolhouse benannte Summationsformel

$$\sum_{\lambda=0}^{\mu-1} F\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \mu F(0) - \sum_{m=0}^{n-1}\left(\mu - \frac{1}{\mu^m}\right) A_{m+1}[F^{(m)}(1) - F^{m}(0)] + \sum_{\lambda=0}^{\mu-1} R_n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

III. Die Restfunktion in der Entwicklung (19) von $F(x)$

$$R_n(x) = F(x) - F(0) - x[F(1) - F(0)] - \varphi_2(x)[F'(1) - F'(0)] - \\ \ldots - \varphi_n(x)[F^{(n-1)}(1) - F^{(n-1)}(0)] \tag{21}$$

verschwindet an den beiden Stellen $x = 0$ und $x = 1$, weil nach

(10) für $m \geqq 2$ sowohl $\varphi_m(0)$ als $\varphi_m(1)$ Null ist, ausserdem besitzt jede ihrer Ableitungen bis inkl. zur $(n-1)$-ten, wie nun gezeigt werden soll, an der Stelle $x=0$ denselben Wert wie an der Stelle $x=1$.

Zum Beweise bildet man die λ-te Ableitung von (21) nach x, wobei zu berücksichtigen ist, dass $\varphi_m^{(\lambda)}(x)$ für $m<\lambda$ identisch verschwindet, und ersieht aus der Gestalt von $R_n^{(\lambda)}(x)$

$$R_n^{(\lambda)}(x)=F^{(\lambda)}(x)-\varphi_\lambda^{(\lambda)}(x)[F^{(\lambda-1)}(1)-F^{(\lambda-1)}(0)]-\varphi_{\lambda+1}^{(\lambda)}(x)[F^{(\lambda)}(1)-F^{(\lambda)}(0)]-$$
$$-\varphi_{\lambda+2}^{(\lambda)}(x)[F^{(\lambda+1)}(1)-F^{(\lambda+1)}(0)]-\ldots-\varphi_n^{(\lambda)}(x)[F^{(n-1)}(1)-F^{(n-1)}(0)],$$

weil die Werte $\varphi_{\lambda+2}^{(\lambda)}(1),\ldots,\varphi_n^{(\lambda)}(1)$ gemäss (5b) mit $\varphi_{\lambda+2}^{(\lambda)}(0),\ldots,\varphi_n^{(\lambda)}(0)$ übereinstimmen, dass die zweite Zeile rechts für $x=1$ denselben Wert annimmt wie für $x=0$. Anderseits lässt sich wegen

$$\varphi_\lambda^{(\lambda)}(x)=1,\quad \varphi_{\lambda+1}^{(\lambda)}(x)=x+A_1=x-\tfrac{1}{2}$$

die erste Zeile rechts umformen in

$$F^{(\lambda)}(x)-[F^{(\lambda-1)}(1)-F^{(\lambda-1)}(0)]-(x-\tfrac{1}{2})[F^{(\lambda)}(1)-F^{(\lambda)}(0)],$$

ihr Wert ist somit wieder für $x=1$ derselbe wie für $x=0$. Diese charakteristische Eigenschaft der Restfunktion $R_n(x)$

$$R_n(0)=0 \text{ und } R_n^{(\lambda)}(1)=R_n^{(\lambda)}(0) \text{ für } \lambda=0 \text{ bis } n-1 \tag{22}$$

dient im Vereine mit der Darstellung

$$\begin{aligned}R_n^{(n-1)}(x)=F^{(n-1)}(x)-[F^{(n-2)}(1)-F^{(n-2)}(0)]-\\-(x-\tfrac{1}{2})[F^{(n-1)}(1)-F^{(n-1)}(0)]\end{aligned} \tag{22a}$$

zur Abschätzung des Restes $R_n(x)$ für irgend ein n (vgl. Abschnitt VI.).

Beim Vergleich der Restfunktion $R_n(x)$ mit derjenigen der Newton'schen Interpolationsformel[3])

$$F(x)=F(0)+\binom{x}{1}\Delta F(0)+\binom{x}{2}\Delta^2F(0)+\ldots+\binom{x}{n}\Delta^nF(0)+S_n(x) \tag{23}$$

zeigt sich eine Verschiedenheit erst für $n \geqq 2$. Hingegen besteht Identität zwischen den Resten $R_1(x)$ und $S_1(x)$, ihr gemeinsamer Wert ist darstellbar durch

$$F(x)-F(0)-x[F(1)-F(0)]=\binom{x}{2}F''(x'), \tag{24}$$

[3]) Die allgemeinere Aufgabe, $R_n(x)$ mit dem Reste von

$$F(-m)+\binom{m+x}{1}\Delta F(-m)+\binom{m+x}{2}\Delta^2F(-m)+\ldots,\ m\leqq n-1$$

zu vergleichen, lässt sich durch Betrachtung der Funktion $\mathfrak{F}(x)=F(m-x)$ auf den oben behandelten Fall zurückführen.

wo x' eine zwischen den Extremen der drei Grössen 0, 1, x liegende Stelle bezeichnet, denn die Funktion[4])

$$\mathfrak{R}(z, x) = x(x-1)\,R_1(z) - z(z-1)\,R_1(x)$$

in ihrer Abhängigkeit von z betrachtet, hat drei Nullpunkte $z = 0$, $z = 1$, $z = x$, also muss nach dem Rolle'schen Satze die erste Ableitung $\partial R(z, x)/\partial z$ zweimal (mindestens) zwischen den Extremen von 0, 1, x verschwinden und die zweite Ableitung $\partial^2\mathfrak{R}(z, x)/\partial z^2$ einmal, etwa an der Stelle $z = x'$, also wird

$$\frac{\partial^2\mathfrak{R}(z, x)}{\partial z^2} = x(x-1)\,R''_1(z) - 2R_1(x) = x(x-1)\,F''(z) - 2R_1(x),$$

wie zu zeigen war, für $z = x'$ Null.

Aber bei $n \geqq 2$ gestaltet sich die Abschätzung von $R_n(x)$ nicht mehr so einfach, wie für den Rest der Newton'schen Interpolationsformel

$$S_n(x) = \binom{x}{n+1} F^{(n+1)}(\bar{x}),$$

wo $\bar{x}$ eine nicht näher bekannte Stelle zwischen den Extremen von 0, n, x bedeutet. (Diese Formel wird übrigens im Folgenden nicht benützt.)

IV. Speziell im Falle $n = 2$ lässt sich der Vergleich zwischen den Resten

$$\begin{aligned} R_2(x) &= F(x) - F(0) - x\,[F(1) - F(0)] - \frac{x(x-1)}{2}\,[F'(1) - F'(0)] \\ S_2(x) &= F(x) - F(0) - x\,[F(1) - F(0)] - \\ &\quad - \frac{x(x-1)}{2}\,[F(2) - 2F(1) + F(0)] \end{aligned} \tag{25}$$

leicht durchführen, wenn man sich auf die eigentliche Interpolation, d. h. auf das Intervall 0 bis 1 für x beschränkt und $F'''(x)$ keinen Zeichenwechsel erfährt. Hiebei gelangt der Hilfssatz zur Anwendung, dass eine Funktion $\varrho(x)$, welche im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ die Eigenschaften besitzt

$$\varrho(0) = \varrho(1) = 0, \ \varrho'(0) > 0, \ \varrho'(1) < 0, \ \varrho'''(x) > 0, \tag{26}$$

innerhalb des Intervalls positiv bleibt. Dann wächst nämlich $\varrho''(x)$ mit x, kann also höchstens einmal im Intervall verschwinden, es variiert daher $\varrho'(x)$ von dem positiven Wert $\varrho'(0)$ zu dem negativen $\varrho'(1)$ entweder durchaus abnehmend, oder mit einem negativen Minimum, ist aber in beiden Fällen zuerst positiv nachher negativ, und dies besagt, dass $\varrho(x)$ von $\varrho(0) = 0$ angefangen bis zu einem Maximum zunimmt, um wieder bis $\varrho(1) = 0$ abzunehmen.

---

[4]) Vgl. z. B. Markoff, Differenzenrechnung, S. 11.

Trotz der Beschränkung der Variabeln x auf das Intervall 0 bis 1, soweit es die Formeln (25) betrifft, muss aber, um $S_2(x)$ berechnen zu können, auch F(2) bekannt sein, daher soll nunmehr $F(x)$ als eine im Intervall $x = 0$ bis 2 bekannte Funktion angesehen werden, und zwar soll ihre dritte Ableitung $F'''(x)$ dort durchgängig entweder nur positive oder nur negative Werte aufweisen, z. B. positiv bleiben, andernfalls brauchte man bloss $[-F(x)]$ statt $F(x)$ zu betrachten. Unter dieser Voraussetzung $F'''(x) > 0$ zeigt man zunächst, dass die Ungleichung

$$F(1) - F(0) < \frac{F'(1) + F'(0)}{2} \tag{27}$$

gilt, indem man den Satz (24) auf die Funktion $F'(x)$ überträgt

$$F'(x) - F'(0) - x\,[F'(1) - F'(0)] = \binom{x}{2} F'''(x')$$

und diese Gleichung zwischen 0 und 1 integriert

$$[F(1) - F(0)] - F'(0) - \tfrac{1}{2}\,[F'(1) - F'(0)] = \int_0^1 \binom{x}{2} F'''(x')\, dx.$$

Das Integral rechst ist negativ (wegen $x < 1$ und $F''' > 0$), daher auch die linke Seite, wie es die Ungleichung (27) behauptet. Hieraus folgt aber, wenn man die Ableitungen von $R_2(x)$, $S_2(x)$ nach x bildet

$$\begin{aligned} R'_2(x) &= F'(x) - [F(1) - F(0)] + \frac{1-2x}{2}[F'(1) - F'(0)], \\ S'_2(x) &= F'(x) - [F(1) - F(0)] + \frac{1-2x}{2}[F(2) - 2F(1) + F(0)], \end{aligned} \tag{28}$$

dass sowohl $R'_2(0) + R'_2(1)$ als $S'_2(0) + S'_2(1)$ eine positive Grösse ist, denn

$$R'_2(0) + R'_2(1) = S'_2(0) + S'_2(1) = F'(1) + F'(0) - 2\,[F(1) - F(0)] \tag{29}$$

hat nach (27) das positive Vorzeichen. Es bedarf nur noch des Nachweises, dass

$$S'_2(1) = F'(1) - \tfrac{1}{2}\,[F(2) + F(0)] \text{ negativ,} \tag{29a}$$

also $S'_2(0)$ positiv ist, um aus den Eigenschaften

$$S_2(0) = S_2(1) = 0,\ S'_2(0) > 0,\ S'_2(1) < 0,\ S'''_2(x) = F'''(x) > 0$$

auf $S_2(x) > 0$ zu schliessen. Nun wächst der Voraussetzung nach $F''(x)$ mit x, daher gilt dasselbe von der Funktion

$$F'(1+x) + F'(1-x) - 2F'(1)$$

wegen des positiven Vorzeichens ihrer Ableitung $F''(1+x) - F''(1-x)$, und es muss

$$\int_0^1 [F'(1+x) + F'(1-x) - 2F'(1)]\,dx > 0 \text{ oder } F(2) + F(0) > 2F'(1)$$

konform der Ungleichung (29a) sein.

Bezüglich der Restfunktion $R_2(x)$ wäre hervorzuheben, dass sie, im Gegensatz zu $S_2(x)$, eine (und nur eine) Nullstelle[5]) innerhalb des Intervalles $x = 0$ bis 1 besitzt, weil die Gleichheit von $R'_2(0)$ und $R'_2(1)$ bedingt, dass $R''_2(x)$ irgendwo zwischen 0 und 1 verschwindet und dort, als wachsende Funktion, vom Negativen zum Positiven übergeht. Es nimmt somit $R'_2(x)$, von dem positiven Wert $R'_2(0) = \frac{1}{2}[R'_2(0) + R'_2(1)]$ angefangen, erst ab, dann zu, kann aber dabei nicht stets positiv bleiben, weil sonst $R_2(x)$ immer zunehmen würde, während $R_2(0) = R_2(1)$ ist. Daher wächst $R_2(x)$ von $R_2(0) = 0$ an bis zu einem positiven Maximum, nimmt dann bis zu einem negativen Minimum ab und wächst schliesslich wieder bis $R_2(1) =$ Null.

Nach Konstatierung des positiven Vorzeichens von $S_2(x)$ hat also, damit die Interpolation durch Bernoulli'sche Funktionen ein genaueres Resultat liefert als die Newton'sche, die Restfunktion $R_2(x)$ die beiden Bedingungen

$$S_2(x) - R_2(x) > 0, \quad S_2(x) + R_2(x) > 0 \text{ für } x = 0 \text{ bis } 1 \qquad (30)$$

zu erfüllen. Die erstere trifft bei $F'''(x) > 0$ immer zu, wie man aus der Umformung

$$S_2(x) - R_2(x) = \frac{x - x^2}{2}\left\{\int_0^1 [F'(1+x) - F'(x)]\,dx - [F'(1) - F'(0)]\right\}$$

erkennt, indem $F'(1+x) - F'(x)$ ebenso wie $F''(x)$ mit x wächst und für $x = 0$ das Minimum $F'(1) - F'(0)$ hat. Für die zweite Ungleichung (30) genügt es nach (26), da $R_2(x) + S_2(x)$ bereits den Voraussetzungen

$$R_2(0) + S_2(0) = R_2(1) + S_2(1) = 0, \quad R'_2(0) + S'_2(0) > 0,$$
$$R'''_2(x) + S'''_2(x) > 0$$

entspricht, zu fordern, dass $R'_2(1) + S'_2(1)$ negativ, d. h. die Bedingung erfüllt sei

$$F'(0) + 3F'(1) < F(2) + 2F(1) - 3F(0). \qquad (31)$$

Für den Fall, dass $F'''(x)$ zwar sein Vorzeichen zwischen $x = 0$ und 2 nicht ändert, aber nur negative Werte annimmt, erhält man durch Betrachtung von $[-F(x)]$ statt $F(x)$ die analoge Bedingung

$$3F(0) - 2F(1) - F(2) + F'(0) + 3F'(1) > 0. \qquad (31a)$$

V. Beispiele für die Funktion $F(x)$.

1. Als eine Funktion, welche der Bedingung (31) entspricht, ist

[5]) Eine Stelle der „Zufallsexaktheit" für die Interpolation.

zunächst der Logarithmus anzuführen

$$F(x) = \log(a + xh), \quad F'(x) = \frac{kh}{a + xh}, \quad F'''(x) > 0, \tag{32}$$

wo a ebenso wie $h < a$ eine positive Grösse und k entweder die Zahl 1 oder $1/\log_e 10 = 0{,}43429448\ldots$ bedeutet, jenachdem es sich um die Basis e oder 10 handelt. Hier ist die Bedingung (31), durch k dividiert,

$$\frac{h}{a} + \frac{3h}{a + h} < \log_e(a + 2h) + 2\log_e(a + h) - 3\log_e a$$

und in eine solche für den Quotienten $\vartheta = h/a$ umgeformt

$$\vartheta + \frac{3\vartheta}{1 + \vartheta} < \log_e(1 + 2\vartheta) + 2\log_e(1 + \vartheta) \tag{32a}$$

jedenfalls für $\vartheta < \frac{3}{5}$ erfüllt.[6]) Die Entwicklung von $\log(a + xh)$ nach Bernoulli'schen Polynomen, vgl. (19)

$$\begin{aligned}\log a + x[\log b - \log a] - k\Bigg[h\varphi_2(x)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - \\ - h^2\varphi_3(x)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + \ldots\Bigg], \quad b = a + h\end{aligned} \tag{33}$$

vereinfacht sich für den Fall, dass $h = 1$ und a gleich einer ganzen Zahl m genommen wird, durch Einführung der Konstanten

$$\begin{aligned}\gamma_m = \frac{k}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m + 1}\right), \quad \gamma'_m = \frac{k}{2 \cdot 3}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{\overline{m + 1}^2}\right), \\ \gamma''_m = \frac{k}{3 \cdot 4}\left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{\overline{m + 1}^3}\right), \ldots\end{aligned} \tag{34}$$

und es entstehen die Interpolationsformeln der verschiedenen Grade

$$\begin{aligned}&\log(m + x) \backsim \log m + x[\log(m + 1) - \log m] + x(1 - x)\gamma_m, \\ &\log(m + x) \backsim \log m + x[\log(m + 1) - \log m] + \\ &\qquad + x(1 - x)[\gamma_m + (\tfrac{1}{2} - x)\gamma'_m], \\ &\log(m + x) \backsim \log m + x[\log(m + 1) - \log m] + \\ &\qquad + x(1 - x)[\gamma_m + (\tfrac{1}{2} - x)\gamma'_m - x(1 - x)\gamma''_m]\ldots\end{aligned} \tag{35}$$

Sie haben insofern praktische Bedeutung als schon eine Logarithmentabelle relativ geringen Umfanges, etwa von $m = 100$ bis 1000 ausreicht, um den Logarithmus irgend einer positiven Grösse mit nahezu derselben Genauigkeit wie die der Tabelle selbst und, vorausgesetzt

---

[6]) Desgleichen die Bedingung (31a) für $F(x) = \log(a + h - xh)$

$$3\log_e(a + h) - 2\log_e a - \log_e(a - h) - \frac{h}{a + h} - \frac{3h}{a} > 0$$

bei $0 < h < a$.

dass die *Konstanten* γ_m oder γ_m, γ'_m usf, sovieler man sich eben bedienen will, in einer *Nebenkolonne enthalten sind*, mit relativ geringer Rechenoperation anzugeben.

So erzielt man z. B. durch Anwendung der ersten sehr einfachen Formel (35), *obwohl sie nur die Rechenarbeit einer Newton'schen Interpolation 2. Grades verursacht*, bei 8-stelligen Logarithmen die Herabdrückung des Tabellenumfanges auf die Logarithmen der dreiziffrigen ganzen Zahlen. Die zweite Formel (35) leistet bei 10-stelligen Logarithmen dieselben Dienste.[7])

Eine Verstärkung der Konvergenz liesse sich bei Entwicklung der Logarithmen nach Bernoulli'schen Polynomen herbeiführen, wenn man von der zweiten Formel (20) Gebrauch machte

$$\log(m+x) - \log(m+1-x) = (2x-1)\Big[\log(m+1) - \log m - \frac{kx(1-x)}{6}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{\overline{m+1}^2}\right) + \ldots\Big],$$

welche sich durch die Substitution

$$x = \frac{m(1-u)}{2m+u}, \quad \frac{m+1-x}{m+x} = \frac{m+u}{m} \tag{36}$$

in eine *Interpolationsformel* für $\log(m+u)$ *verwandelt*

$$\begin{aligned} \log(m+u) &\backsim \log m + (1-2x)\,[\log(m+1) - \\ &\qquad - \log m - x(1-x)\,\gamma'_m], \\ \log(m+u) &\backsim \log m + (1-2x)\,[\log(m+1) - \\ &\qquad - \log m - x(1-x)\,(\gamma'_m - \tfrac{1}{3} + x - x^2\gamma'''_m)]. \end{aligned} \tag{37}$$

Bei der umgekehrten Aufgabe, aus einer *Logarithmentafel reduzierten Umfanges* den einem gegebenen Logarithmus korrespondierenden Numerus zu finden, kann die Anwendung der Newton'schen Interpolation überhaupt nicht in Frage kommen, solange die benachbarten Tafeldifferenzen der dort enthaltenen Logarithmen auch nicht annähernd konstant sind, während Formel (12b) sofort die Lösung mit einer sehr rasch konvergierenden Entwicklung leistet: Um zu einer gegebenen Grösse L, welche zwischen $\log(m+1)$ und $\log m$ liege, den der Gleichung $L = \log(m+x)$ entsprechenden Numerus $m+x$ zu

---

[7]) Auf die linearen *Kombinationen* Newton'scher Interpolationen, wie etwa die „Karup'sche Interpolation", vgl. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung II. S. 191 (9), d. h. die lineare Kombination zweier benachbarter Newton'scher Interpolationen 2. Grades, braucht hier nicht eingegangen zu werden, weil sie gegenüber den Newton'schen Interpolationen der verschiedenen Grade keine wesentliche Verringerung der Rechenoperation bei gleichbleibender Genauigkeit mit sich bringen, wie man an dem Prüfstein der Logarithmen erkennt.

finden, werde

$$\alpha = \frac{L - \log m}{\log (m+1) - \log m}, \quad \sigma_m = \frac{\log (m+1) - \log m}{k} \tag{38}$$

definiert, woraus die Entwicklung des gesuchten Wertes x

$$x = \frac{\epsilon^{\alpha \sigma_m} - 1}{\epsilon^{\sigma_m} - 1} = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha)\,\sigma_m + \varphi_3(\alpha)\,\sigma_m{}^2 + \dots$$

folgt und die Interpolationsformeln entstehen

$$\begin{aligned} x &\backsim \alpha - \tfrac{1}{2}\alpha\,(1-\alpha)\,\sigma_m, \\ x &\backsim \alpha - \tfrac{1}{2}\alpha\,(1-\alpha)\,\sigma_m\,[1 - \tfrac{1}{6}\,(1-2\alpha)\,\sigma_m], \\ x &\backsim \alpha - \tfrac{1}{2}\alpha\,(1-\alpha)\,\sigma_m\,[1 - \tfrac{1}{6}\,(1-2\alpha)\,\sigma_m - \tfrac{1}{12}\,(\alpha - \alpha^2)\,\sigma_m{}^2]. \end{aligned} \tag{39}$$

Eine Nebenkolonne hätte im Falle gewöhnlicher Logarithmen die Konstanten σ_m, eventuell auch deren Quadrate, zu vermerken.

2. Für den Integrallogarithmus, eine vom Logarithmus eigentlich wesensverschiedene Funktion, erscheint die Bedingung (31) bei $a > 1$, $h > 0$ erfüllt. Setzt man

$$\mathrm{F}(x) = \int\limits_{a_0}^{a+xh} \epsilon^t t^{-1}\,dt, \qquad \mathrm{F}'(x) = h\,\frac{\epsilon^{a+xh}}{a+xh}, \tag{40}$$

welche Funktion der obigen Annahme $\mathrm{F}'''(x) > 0$ genügt, weil

$$\mathrm{F}'''(x) = \frac{h^3 \epsilon^z}{z^3}\,(z^2 - 2z + 2), \quad z = a + xh,$$

ebenso wie $z^2 - 2z + 2$ ständig das positive Vorzeichen behält, so erfordert die zitierte Bedingung (31)

$$\epsilon^a \left(\frac{h}{a} + \frac{3h\epsilon^h}{a+h}\right) < \int\limits_{a+h}^{a+2h} \epsilon^t t^{-1}\,dt + 3\int\limits_{a}^{a+h} \epsilon^t t^{-1}\,dt.$$

Im ersten Integral $t = a + h + u$, im zweiten $t = a + h - u$ gesetzt, geht diese Ungleichung über in

$$\frac{h}{a} + \frac{3h\epsilon^h}{b} < \epsilon^h \int\limits_0^h \left(\frac{\epsilon^u}{b+u} + \frac{3\epsilon^{-u}}{b-u}\right) du, \quad b = a + h \tag{41}$$

und gilt jedenfalls für $a > 1$. (Ein Beweis wird im Anhang skizziert.)

3. Der Bedingung (31a) genügt die Funktion

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{f}(a + xh), \ \mathrm{f}(x) = \epsilon^x \int\limits_x^\infty e^{-t} t^{-1}\,dt, \quad \mathrm{F}'''(x) < 0 \tag{42}$$

bei positiven x, a, h, wie anhangsweise gezeigt wird, zumindest für

$a \geqq 2h$. Sie gehört als Spezialfall zu den, die Makeham'schen Leibrentenwerte darstellenden Prym'schen Funktionen. Man darf also erwarten, dass für die Werte $\bar{a}_x$ der kontinuierlich zahlbaren Leibrenten 1 die Interpolation durch Bernoulli'sche Polynome einen Vorteil gegenüber der Newton'schen bietet.

Der Zusammenhang zwischen $\bar{a}_x$ und der Ableitung $d\bar{a}_x/dx = \bar{a}'_x$

$$\bar{a}'_x = (\mu_x + \delta)\,\bar{a}_x - 1 \tag{43}$$

(es stellt μ_x die Sterbensintensität für das Alter x und δ den natürlichen Logarithmus des Aufzinsungsfaktors vor) gibt sofort mit dem Leibrentenwert auch dessen Ableitung bekannt, demnach kann für das Beispiel $F(x) = \bar{a}_{z+xh}$ die Interpolationsformel

$$\bar{a}_{z+xh} \backsim \bar{a}_z + x\,(\bar{a}_{z+h} - \bar{a}_z) + h\,\frac{x(x-1)}{2}\,(\bar{a}'_{z+h} - \bar{a}'_z) \tag{43a}$$

verwendet werden. Zum Vergleich derselben mit dem Resultat einer Newton'schen Interpolation 2. Grades

$$\bar{a}_z + x\,(\bar{a}_{z+h} - \bar{a}_z) + \frac{x\,(x-1)}{2}\,[\bar{a}_{z+2h} - 2\bar{a}_{z+h} + \bar{a}_z], \tag{43b}$$

$$\bar{a}_{z-h} + (x+1)\,(\bar{a}_z - \bar{a}_{z-h}) + \frac{x\,(x+1)}{2}\,(\bar{a}_{z+h} - 2\bar{a}_z + \bar{a}_{z-h}) \tag{43c}$$

wurden, nach einer in Czuber's Werk[8]) abgedruckten Grundtafel, aus den Werten der kontinuierlich zahlbaren Leibrenten für die Alter $z = 30$, 40, 50, ... diejenigen für die Alter 35, 45, 55, ... nach, (43a, b, c), dort $h = 10$, $x = \frac{1}{2}$, resp. $x = \frac{3}{2}$ in (43c) gesetzt, interpoliert und den genau berechneten gegenübergestellt.

z	$\bar{a}_z$	$\bar{a}'_z$	$\bar{a}_{z+5}$ (43a)	$\bar{a}_{z+5}$ (43b)	$\bar{a}_{z+5}$ (43c)	$\bar{a}_{z+5}$ genau
30	18,9375	—0,20311	17,8456	17,8431	—	17,8459
40	16,5999	—0,26462	15,2018	15,1858	15,2080	15,2020
50	13,6675	—0,31909	12,0236	11,9935	12,0448	12,0242
60	10,3179	—0,34378	8,6075	8,5756	8,6406	8,6077
70	6,9617	—0,31796	5,4481	5,4331	5,4761	5,4471
80	4,1189	—0,24422	3,0130	3,0210	3,0191	3,0120
90	2,1337	—0,15357	1,4708	—	1,4570	1,4713
100	0,9909	—0,08039	—	—	—	—

[8]) Wahrscheinlichkeitsrechnung II. S. 456. Bei den Rechnungen wurde von der bekannten Beziehung $\bar{a}_x = a_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \delta)$ zwischen $\bar{a}_x$ und dem Werte a_x der ganzjährig voraus zahlbaren Leibrente 1 Gebrauch gemacht, mit Ausnahme der Renten für die höchsten Alter, wo die direkte Bestimmung der $\bar{a}$ vorzuziehen ist.

Ersichtlich ist die Newton'sche Interpolation 2. Grades schon darum die schlechtere, weil sie fast nirgends der Forderung entspricht, die Rentenwerte bis auf wenige Einheiten der dritten Dezimalstelle zu liefern, während die Interpolation (43a) dies leistet, mit einem Maximalfehler von etwa zwei Einheiten der 3. Dezimalstelle, der aber in obiger Tabelle nicht aufscheint,[9]) sondern z. B. beim Vergleich von $\bar{a}_{z+8}$ für $z = 30, 40, \ldots$, nach (43a) und genau auf 3 Dezimalstellen berechnet

$\bar{a}_{z+8}$ nach (43a)	18,300,	15,777,	12,690,	9,288,	6,031,	3,428,	1,714
$\bar{a}_{z+8}$ genau	18,300,	15,778,	12,692,	9,288,	6,033,	3,427,	1,712

Ähnliche Resultate, wie für lebenslängliche Leibrenten, findet man für die Werte A_x der Versicherung auf ein sofort nach dem Tode zahlbares Kapital 1, der temporären Leibrente ${}_{|n}\bar{a}_x$, der Verbindungsrente $\bar{a}_{xy}$ usf. mithilfe der Gleichungen

$$A'_x = (\mu_x + \delta)\,\bar{A}_x - \mu_x, \quad {}_{|n}\bar{a}'_x = (\mu_x + \delta)_n\bar{a}_x - (1 - {}_np_x v^n),$$

$$\bar{a}'_{xy} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\bar{a}_{x+\varepsilon,\, y+\varepsilon} - \bar{a}_{xy}}{\varepsilon} = (\mu_x + \mu_y + \delta)\bar{a}_{xy} - 1 \ldots$$

(unter v den Abzinsungsfaktor verstanden).

VI. Zur Abschätzung des Restes $R_n(x)$ ist, gemäss dem auf die Funktion $F^{(n-1)}(x)$ übertragenen Satze (24)

$$F^{(n-1)}(x) = F^{(n-1)}(0) + x\,[F^{(n-1)}(1) - F^{(n-1)}(0)] + \binom{x}{2} F^{(n+1)}(x') \qquad (44)$$

in Formel (22a) zu substituieren, wodurch die $(n-1)$-te Ableitung von $R_n(x)$ vorerst die Form

$$R_n^{(n-1)}(x) = \binom{x}{2} F^{(n+1)}(x') +$$

$$+ \frac{F^{(n-1)}(1) - F^{(n-1)}(0)}{2} - [F^{(n-2)}(1) - F^{(n-2)}(0)]$$

erlangt. Daher kann, nach den Regeln der Integralrechnung, die Differenz zwischen der Funktion $R_n(x)$ und dem Integral

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} \binom{t}{2} F^{(n+1)}(t')\, dt, \qquad (45)$$

wo t' der zu (44) analogen Gleichung

$$F^{(n-1)}(t) = F^{(n-1)}(0) + t\,[F^{(n-1)}(1) - F^{(n-1)}(0)] + \binom{t}{2} F^{(n+1)}(t') \qquad (45a)$$

---

[9]) Ein Zeichen, dass die Stellen der Zufallsexaktheit der einzelnen Intervalle nahe der Mitte liegen.

entspricht, nur ein Polynom vom Grade $n-1$ in x sein, und dieses ist nunmehr aus den Eigenschaften der Restfunktion, vgl. (22), zu bestimmen. Der Ansatz

$$\begin{aligned} R_n(x) = \beta_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \beta_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \beta_{n-1} \frac{x}{1!} + \\ + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} \binom{t}{2} F^{(n+1)}(t')\, dt \end{aligned} \tag{46}$$

erteilt bereits $R_n(x)$ die Eigenschaft $R_n(0) = 0$ und liefert, λ-mal nach x differentiiert

$$\begin{aligned} R_n^{(\lambda)}(x) = \beta_1 \frac{x^{n-\lambda-1}}{(n-\lambda-1)!} + \ldots + \beta_{n-\lambda-1} \frac{x}{1!} + \beta_{n-\lambda} + \\ + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-\lambda-2}}{(n-\lambda-2)!} \binom{t}{2} F^{(n+1)}(t')\, dt \end{aligned}$$

woraus, weil $R_n^{(\lambda)}(1) = R_n^{(\lambda)}(0) = \beta_{n-\lambda}$ sein soll, als Bedingung für die Konstanten β

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1}{(n-\lambda-1)!} + \frac{\beta_2}{(n-\lambda-2)!} + \ldots + \frac{\beta_{n-\lambda-1}}{1!} = \\ = -\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-\lambda-2}}{(n-\lambda-2)!} \binom{t}{2} F^{(n+1)}(t')\, dt \end{aligned} \tag{47}$$

folgt, insbesondere für $\lambda = n-2$

$$\beta_1 = -\int_0^1 \binom{t}{2} F^{(n+1)}(t')\, dt. \tag{47a}$$

Nun besteht nach (14a), dort x durch $1-t$ und m durch $n-\lambda-2$ ersetzt, die Identität

$$\frac{(1-t)^{n-\lambda-2}}{(n-\lambda-2)!} = \frac{\bar{\varphi}_0(1-t)}{(n-\lambda-1)!} + \frac{\bar{\varphi}_1(1-t)}{(n-\lambda-2)!} + \ldots + \frac{\bar{\varphi}_{n-\lambda-2}(1-t)}{1!},$$

daher werden durch die für $\lambda = n-2,\ n-3, \ldots$ gebildeten Gleichungen (47) die Konstanten

$$\beta_m = -\int_0^1 \bar{\varphi}_{m-1}(1-t) \binom{t}{2} F^{(n+1)}(t')\, dt$$

definiert, d. h. nach (8a) die Konstanten

$$\beta_m = (-1)^m \int_0^1 \bar{\varphi}_{m-1}(t) \binom{t}{2} \mathrm{F}^{(n+1)}(t')\, dt. \tag{47b}$$

Schliesslich ergibt die Substitution der gefundenen Werte β in den Ansatz (46) von $\mathrm{R}_n(x)$

$$\mathrm{R}_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} \binom{t}{2} \mathrm{F}^{(n+1)}(t')\, dt +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^m x^{n-m}}{(n-m)!} \int_0^1 \varphi_{m-1}(t) \binom{t}{2} \mathrm{F}^{(n+1)}(t')\, dt.$$

Speziell für den in Abschnitt IV. behandelten Fall $n = 2$ reduziert sich diese Formel auf

$$\mathrm{R}_2(x) = \int_0^x \binom{t}{2} \mathrm{F}'''(t')\, dt - x \int_0^1 \binom{t}{2} \mathrm{F}'''(t')\, dt$$

oder durch Zerlegung des zweiten Integrales in $\int_0^x + \int_x^1$ auf

$$\mathrm{R}_2(x) = (1-x) \int_0^x \binom{t}{2} \mathrm{F}'''(t')\, dt - x \int_x^1 \binom{t}{2} \mathrm{F}'''(t')\, dt. \tag{49}$$

Daher muss unter den früheren Annahmen $0 < x < 1$ und durchgängig positiver Werte $\mathrm{F}'''(x)$, deren Maximum und Minimum im Intervall 0 bis 1 mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ bezeichnet sei, der Rest $\mathrm{R}_2(x)$, jenachdem er positiv oder negativ ist, unterhalb

$$x\mathfrak{A} \int_x^1 \frac{t(1-t)}{2}\, dt - (1-x)\, \mathfrak{a} \int_0^x \frac{t(1-t)}{2}\, dt =$$

$$= \frac{x(1-x)}{12} [\mathfrak{A}(1 + x - 2x^2) - \mathfrak{a}x(3-2x)]$$

$$\text{resp. } (1-x)\, \mathfrak{A} \int_0^x \frac{t(1-t)}{2}\, dt - x\mathfrak{a} \int_x^1 \frac{t(1-t)}{2}\, dt =$$

$$= \frac{x(1-x)}{12} [\mathfrak{A}x(3-2x) - \mathfrak{a}(1 + x - 2x^2)]$$

liegen. Diese Obergrenzen für den Absolutbetrag von $R_2(x)$ lassen sich schreiben

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{A} - \mathfrak{a})\,\frac{x(1-x)^2(1+2x)}{12} + \mathfrak{a}\varphi_3(x) \\
\text{und}\quad &(\mathfrak{A} - \mathfrak{a})\,\frac{x^2(1-x)(3-2x)}{12} - \mathfrak{a}\varphi_3(x),
\end{aligned}
\tag{49a}
$$

und sollte eine derselben negativ ausfallen, so gilt bloss die andere. Die Substitution von $1 - x$ statt x permutiert die Beträge (49a).

Beispielsweise wären für die im vorigen Abschnitte betrachtete logarithmische Funktion

$F(x) = \log(m + x)$ die Extreme $\mathfrak{A} = k/m^3$ und $\mathfrak{a} = k/(m+1)^3$

einzusetzen.

Anhang.

1. Beweis, dass die Bedingung (41) für $a > 1$ erfüllt ist. Entwickelt man die Nenner rechts in (41) nach Potenzen von u, beschränkt sich aber auf die vier ersten Glieder, so besitzt das Integral in (41), weil die Ungleichungen

$$
\frac{1}{b+u} > \frac{1}{b} - \frac{u}{b^2} + \frac{u^2}{b^3} - \frac{u^3}{b^4}
$$

$$
\frac{1}{b-u} > \frac{1}{b} + \frac{u}{b^2} + \frac{u^2}{b^3} + \frac{u^3}{b^4}
$$

bestehen, einen grösseren Wert als dass in geschlossener Form darstellbare Integral

$$
\int_0^h \left[\frac{e^u}{b}\left(1 - \frac{u}{b} + \frac{u^2}{b^2} - \frac{u^3}{b^3}\right) + \frac{3e^{-u}}{b}\left(1 + \frac{u}{b} + \frac{u^2}{b^2} + \frac{u^3}{b^3}\right)\right] du \tag{51}
$$

Demnach wird jedenfalls der Bedingung (41) genügt, wofern deren linke Seite $h/a + 3e^h/b$ kleiner ist als das mit e^h multiplizierte Integral (51), das heisst, wofern

$$
\begin{aligned}
\frac{h}{a} + \frac{3e^h}{a+h} < e^h &\left[\frac{e^h - 1}{a+h} + \frac{(1-h)\,e^h - 1}{(a+h)^2} + \frac{(2 - 2h + h^2)\,e^h - 2}{(a+h)^3} + \right.\\
&\left. + \frac{(6 - 6h + 3h^2 - h^3)\,e^h - 6}{(a+h)^4}\right] + 3e^h\left[\frac{1 - e^{-h}}{a+h} + \frac{1 - (1+h)\,e^{-h}}{(a+h)^2} + \right.\\
&\left. + \frac{2 - (2 + 2h + h^2)\,e^{-h}}{(a+h)^3} + \frac{6 - (6 + 6h + 3h^2 + h)^3\,e^{-h}}{(a+h)^4}\right]
\end{aligned}
$$

statthat, welche Ungleichung, mit $(a+h)^4$ multipliziert und nach e^{2h}, e^h geordnet, besagt, dass der Ausdruck

$$e^{2h}[a^3+a^2+2a+6+2h(a^2-2)+2h^2(a+1)]+$$
$$+e^h[2(a^3+a^2+2a+6)-h(3a^3-6a^2-4a-4)-$$
$$-h^2(9a^2-6a-2)-h^3(9a-2)-3h^4]-3(a^3+a^2+2a+6)-$$
$$-h(a^3+12a^2+12a+24)-2h^2(2a^2+9a+9)-6h^3(a+2)-4h^4-\frac{h^5}{a}$$

das positive Vorzeichen besitzen soll. Man braucht aber denselben nur nach Potenzen von h zu entwickeln, dann zeigt man unschwer, dass für $a > 1$ sowohl der Anfang der resultierenden Potenzreihe

$$\begin{aligned}(a^3-2a^2+2a)\frac{h^3}{6}+(3a^3-a^2+2a-2)\frac{h^4}{12}+\\+\left(19a^3+44a^2-12a+24-\frac{120}{a}\right)\frac{h^5}{120}+\\+(2a^3+9a^2+9a-7)\frac{h^6}{30}\end{aligned} \tag{52}$$

positiv ist als auch der Koeffizient jeder höheren Potenz h^ν als der sechsten

$$\begin{aligned}(a^3+a^2+2a+6)\frac{2^\nu+2}{\nu!}+(a^2-2)\frac{2^\nu}{(\nu-1)!}+(a+1)\frac{2^{\nu-1}}{(\nu-2)!}-\\-\frac{3a^3-6a^2-4a-4}{(\nu-1)!}-\frac{9a^2-6a-2}{(\nu-2)!}-\frac{9a-2}{(\nu-3)!}-\frac{3}{(\nu-4)!}.\end{aligned} \tag{52a}$$

Somit eignet sich beim Integrallogarithmus die Interpolation (2. Grades) durch Bernoulli'sche Polynome besser als die nach Newton.

2. Für die sub (42) angeführte Funktion

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{f}(a+xh),\ \mathrm{f}(x)=e^x\int_x^\infty e^{-t}\,t^{-1}\,dt$$

muss, wegen $\mathrm{F}'''(x) < 0$, die Bedingung (31a) an die Stelle von (31) treten, sie lautet

$$3\,\mathrm{f}(a)-2\,\mathrm{f}(a+h)-\mathrm{f}(a+2h)+h\,\mathrm{f}'(a)+3h\,\mathrm{f}'(a+h)>0 \tag{53}$$

und kann mit Rücksicht auf den bekannten Zusammenhang

$$\mathrm{f}'(x)-\mathrm{f}(x)+\frac{1}{x}=0 \tag{54}$$

der zwischen $\mathrm{f}'(x)$ und $\mathrm{f}(x)$ besteht, ersetzt werden durch

$$(h+3)\,\mathrm{f}(a)+(3h-2)\,\mathrm{f}(a+h)-\mathrm{f}(a+2h)-\frac{h}{a}-\frac{3h}{a+h}>0. \tag{55}$$

Die linke Seite dieser Ungleichung werde kurz mit $\psi(a,h)$ bezeichnet, dann verifiziert man für die partielle Ableitung von $\psi(a,h)$

nach a die Beziehung

$$\frac{\partial \psi(a, h)}{\partial a} = \psi(a, h) - h^3 \frac{a - 2h}{a^2 (a + h)^2 (a + 2h)}, \tag{56}$$

aus welcher durch Integration, da $\psi(a, h)$ für einen fixen Wert von h sich mit beliebig wachsen dem a der Null nähert, die Darstellung

$$\psi(a, h) = h^3 e^a \int_a^\infty e^{-a} \frac{a - 2h}{a^2 (a + h)^2 (a + 2h)} da$$

und daher auch bei $a > 2h$, wie behauptet, das positive Vorzeichen von ψ folgt.

(Der Redaktion am 27 Mai 1932 zugegangen.)

Über die mittlere Abweichung.

Von *L. Cvetnič*, Prag.

Im Folgenden wird der Versuch unternommen, unter möglichster Ausschaltung von Hypothesen den Begriff der mittleren Abweichung klarzustellen, und zwar hinsichtlich solcher statistischen Beobachtungen, die das Eintreffen oder Nichteintreffen eines Ereignisses zum Gegenstande haben, welchem Ereignisse eine Wahrscheinlichkeit zugrundeliegt oder zugrundeliegen kann.

Ein derartiger Versuch mag zunächst recht überflüssig erscheinen. Erwägt man aber, dass massgebende Autoren in der Frage der zahlenmässigen Ermittlung der mittleren Abweichung verschiedene Lösungen zulassen,[1]) so erscheint es nicht überflüssig, die Frage aufzuwerfen, welcher Weg eigentlich den Vorzug der Korrektheit hat.

Liegen die Ergebnisse der als gleich präzise angenommenen Einzelbeobachtungen vor, so unterliegt es keinem Zweifel, dass der Quotient aus der Summe der Quadrate der Einzelabweichungen und der Anzahl der Einzelbeobachtungen den einwandfreien Mittelwert des auf die Einzelbeobachtung bezüglichen Fehlerquadrates vorstellt, und somit dessen Quadratwurzel die mittlere Abweichung liefert. Dabei kommt es nicht einmal darauf an, ob die Einzelresultate Ergebnisse von Wahrscheinlichkeitsbeobachtungen betreffen oder nicht.

Ganz ähnlich liegt der Fall, wenn nicht die Einzelbeobachtungen registriert sind, vielmehr nur die Resultate von Gruppen derselben, jedoch die einzelnen Gruppen untereinander gleiche Gewichte auf-

[1]) C. V. L. Charlier, Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik, Kap. VIII.
Dr. R. v. Mises, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik, § 9, 1; § 10, 4.