M. Jacob

Der Stieltjes'sche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik

Aktuárské vědy, Vol. 3 (1932), No. 3, 97–102

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144573

Der Stieltjes'sche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik.

Dr. *M. Jacob,* (Trieste).

1. In der zweiten der unten zitierten Mitteilungen hat Prof. Loewy[1]) drei Integralgleichungen für das Deckungskapital der allgemeinen Versicherungsform angegeben, und zwar unter der bloßen Voraussetzung der Stetigkeit der in Betracht kommenden Funktionen. Für zwei dieser Integralgleichungen hat Prof. Loewy selbst eine versicherungstechnische Erklärung gegeben, während zur dritten Prof. Breuer,[2]) mit Hilfe einer Umformung in einer vor Kurzem erschienenen Note einen interessanten Beitrag geliefert hat. Der innere Zusammenhang dieser Integralgleichungen ist jedoch begrifflich nicht ohne weiteres erfaßbar und zwar aus dem Grunde nicht, weil im Rahmen der Verallgemeinerungen von Loewy noch nicht unternommen wurde, äquivalente Ausdrücke für jene zu definieren, die sich unter der Annahme der Differenzierbarkeit der Funktionen der Ausscheideordnung in der versicherungstechnischen Terminologie als sehr brauchbar und schwer entbehrlich erwiesen haben.

Der Zweck der folgenden Zeilen ist zu zeigen, wie der in Rede stehende Zusammenhang durch Einführung äquivalenter Begriffe leicht und übersichtlich erwiesen werden kann. Hiedurch eröffnet sich überdies die Möglichkeit, weitere Untersuchungen zur Analyse der Versicherungsprämie, vom Standpunkt der erwähnten Arbeiten aus, anzustellen.

2. Zweckmäßigkeitshalber wollen wir nun in geeigneter Weise die Resultate der genannten Autoren zusammenstellen und durch einige Definitionen ergänzen, um dann an Hand derselben zu dem in dieser Note erstrebten Ziele zu gelangen.

---

[1]) A. Loewy, Der Stieltjes'sche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmath., Blätter für Versicherungsmath. u. verwandte Gebiete, erste Mitteilung Bd 2, Heft 1 (Jänner 1931) S. 3—18, zweite Mitteilung. Heft 2 (April 1931). S. 74—82.

[2]) S. Breuer, derselbe Titel, Das Versicherungsarchiv, Jahrgang 2, Heft 5 (November 1931), S. 13—19.

Unter den im Folgenden angegebenen hinreichenden Bedingungen erhält man für das Deckungskapital der allgemeinen Versicherungsform die folgende Thielesche Differentialgleichung:[3])

$$\frac{d_t V_{[y]}}{dt} = {}_t V_{[y]} \left(- \frac{\frac{d l_{[y]+t}}{dt}}{l_{[y]+t}} + \delta \right) + P_{[y]+t} - \sum_{i=1}^{n} U^{(i)}_{[y]+t} \frac{\frac{d f^{(i)}_{[y]+t}}{dt}}{l_{[y]+t}} - S_{[y]+t}. \tag{1}$$

Hiebei bedeutet $f^{(i)}_{[y]+t}$ die Anzahl der Personen, die wegen der Ursache i aus der Gruppe der Versicherten $l_{[y]}$ im Laufe der ersten t Jahre ausgeschieden sind, $U^{(i)}_{[y]+t}$ den Betrag, der beim Austritt eines Versicherten im Alter $\overline{y+t}$ wegen der Ursache i zur Auszahlung gelangt, $P_{[y]+t}$ bezw. $S_{[y]+t}$ die Intensitäten der zu zahlenden Prämie, bezw. der zu beanspruchenden Rente seitens eines der im Alter $\overline{y+t}$ vorhandenen Versicherten. Von allen genannten Funktionen wird einfachheitshalber Stetigkeit, und von den Funktionen der Ausscheideordnung überdies noch Differenzierbarkeit im abgeschlossenen Zeitintervall der Versicherungsdauer vorausgesetzt.

Aus der Gleichung (1) ergibt sich leicht eine Spaltung der Intensität $P_{[y]+t}$ in ihren Risiko- und Sparteil auf Grund der nachstehenden Formeln:[4])

$$P^s_{[y]} = {}_0 V_{[y]}, \quad P^s_{[y]+t} = \frac{\delta\, {}_t V_{[y]}}{dt} - \delta\, {}_t V_{[y]} + S_{[y]+t} \text{ für } t > 0 \text{ (Sparintensität).}$$

3. Läßt man nun die Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Funktionen der Ausscheideordnung fort und beschränkt sich auf die bloße Voraussetzung der Stetigkeit, so erhält man nach Loewy die folgende Darstellung des Deckungskapitals, welche auch als Ausgangs-

[3]) N. R. Jörgensen, Einige Bemerkungen über die Thiele'sche Differentialgleichung, Jahrbuch f. Versicherungsmathem. S. 230—261; A. Loewy, Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmath., Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissensch., math.-nat. Klasse 1917, 6. Abhandlung.

[4]) Für ${}_t V_{[y]}$ ergibt sich hieraus die folgende Darstellung:

$${}_t V_{[y]} = {}_0 V_{[y]}\, e^{\delta t} + \int_0^t P^s_{[y]+\tau}\, e^{\delta(t-\tau)}\, d\tau - \int_0^t S_{[y]+\tau}\, e^{\delta(t-\tau)}\, d\tau;$$

für die analoge Darstellung im Diskreten vrgl. P. E. Boehmer, Sparprämie und Risikoprämien, Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft Bd. X (1910), S. 71—78.

$$P^r_{[y]+t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{d f^{(i)}_{[y]+t}}{dt}}{l_{[y]+t}} \left(U^{(i)}_{[y]+t} - {}_t V_{[y]} \right), \quad \text{(Risikointensität)} \tag{2}$$

punkt für die Herleitung der erwähnten Integralgleichungen diente:

$$l_{[y]+t}\, e^{-\delta t}\, {}_tV_{[y]} = l_{[y]}\, {}_0V_{[y]} + \int_0^t P_{[y]+\tau}\, l_{[y]+\tau}\, e^{-\delta\tau}\, d\tau - $$

$$- \sum_{i=1}^{n} \int_0^t U^{(i)}_{[y]+\tau} e^{-\delta\tau}\, d\mathfrak{f}^{(i)}_{[y]+\tau} - \int_0^t S_{[y]+\tau}\, l_{[y]+\tau}\, e^{-\delta\tau}\, d\tau. \tag{3}$$

Aus der obigen Gleichung ersieht man unmittelbar, daß es nicht auf die Intensitäten $Z(t)$ selbst ankommt, die im allgemeinen, unter der bloßen Voraussetzung der Stetigkeit der Ausscheideordnungen, gar nicht existieren müssen, sondern auf die Summenfunktionen (Integrale) derselben, $\mathfrak{z}(t)$, für welche im Falle der Differenzierbarkeit $\mathfrak{z}'(t) = Z(t)$ gilt. An Stelle eines Integrales von der Form

$$\int_a^b f(t)\, Z(t)\, dt$$

wird somit ein Stieltjes'sches Integral von der Form

$$\int_a^b f(t)\, d\mathfrak{z}(t)$$

zu treten haben.

Im Sinne der obigen Bemerkung werden im folgenden an Stelle der Intensitäten $P_{[y]+t}$, $S_{[y]+t}$ etc. die Summenfunktionen derselben, $\mathfrak{P}_{[y]+t}$, $\mathfrak{S}_{[y]+t}$ etc. verwendet werden. Auf diese Weise wird es nun möglich sein, auch bei Zugrundelegung einer nur stetigen Ausscheideordnung von einem Spar- und Risikoteil der Prämienleistungen zu sprechen, u. zw. durch das Postulat, daß die Prämiensummenfunktion durch Addition einer Sparprämien- und einer Risikoprämiensummenfunktion entsteht:

$$\mathfrak{P}_{[y]+t} = \mathfrak{P}^s_{[y]+t} + \mathfrak{P}^r_{[y]+t}.$$

Aus der Formel (2) ergibt sich $\mathfrak{P}^s_{[y]+t}$ bezw. $\mathfrak{P}^r_{[y]+t}$ durch die folgende Definition:

$$\mathfrak{P}^r_{[y]+t} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \left(U^{(i)}_{[y]+\tau} - {}_\tau V_{[y]}\right) \frac{d\mathfrak{f}^{(i)}_{[y]+\tau}}{l_{[y]+\tau}}$$

(Risikoprämiensummenfunktion), (4)

$$\mathfrak{P}^s_{[y]+t} = {}_tV_{[y]} - \delta \int_0^t {}_\tau V_{[y]}\, d\tau + \mathfrak{S}_{[y]+t}$$

(Sparprämiensummenfunktion).

4. Auf Grund der obigen Begriffsbildungen sind wir nun in der Lage, die aus der Formel (3) von Loewy hergeleiteten Integralgleichungen in eine Form zu fassen, die gestatten wird, den Zusammenhang und die anschauliche Bedeutung dieser Gleichungen unmittelbar abzulesen.

Die fraglichen Gleichungen lauten bei Verwendung der eben eingeführten Summenfunktionen wie folgt:

$$l_{[y]+t} \cdot {}_tV_{[y]} = l_{[y]}\, {}_0V_{[y]} + \delta \int_0^t l_{[y]+\tau} \cdot {}_\tau V_{[y]}\, d\tau + \int_0^t l_{[y]+\tau}\, d\mathfrak{P}_{[y]+\tau} - \\ - \sum_{i=1}^n \int_0^t U^{(i)}_{[y]+\tau}\, df^{(i)}_{[y]+\tau} - \int_0^t l_{[y]+\tau}\, d\mathfrak{S}_{[y]+\tau}; \tag{α}$$

$$e^{-\delta t}\, {}_tV_{[y]} = {}_0V_{[y]} + \int_0^t e^{-\delta\tau}\, d\mathfrak{P}_{[y]+\tau} - \\ - \sum_{i=1}^n \int_0^t e^{-\delta\tau} (U^{(i)}_{[y]+\tau} - {}_\tau V_{[y]}) \frac{df^{(i)}_{[y]+\tau}}{l_{[y]+\tau}} - \int_0^t e^{-\delta\tau}\, d\mathfrak{S}_{[y]+\tau}; \tag{β}$$

$${}_tV_{[y]} = {}_0V_{[y]} - \int_0^t \frac{{}_\tau V_{[y]}}{l_{[y]+\tau}}\, e^{-\delta\tau}\, d(l_{[y]+\tau}\, e^{-\delta\tau}) + \int_0^t d\mathfrak{P}_{[y]+\tau} - \\ - \sum_{i=1}^n \int_0^t U^{(i)}_{[y]+\tau} \frac{df^{(i)}_{[y]+\tau}}{l_{[y]+\tau}} - \int_0^t d\mathfrak{S}_{[y]+\tau}, \tag{γ}$$

bezw. in der Breuer'schen Umformung:

$${}_tV_{[y]} = {}_0V_{[y]} + \delta \int_0^t {}_\tau V_{[y]}\, d\tau + \int_0^t d\mathfrak{P}_{[y]+\tau} - \\ - \sum_{i=1}^n \int_0^t (U^{(i)}_{[y]+\tau} - {}_\tau V_{[y]}) \frac{df^{(i)}_{[y]+\tau}}{l_{[y]+\tau}} - \int_0^t d\mathfrak{S}_{[y]+\tau}. \tag{γ'}$$

Beachtet man nun, daß

$$l_{[y]+t} \cdot {}_tV_{[y]} - l_{[y]}\, {}_0V_{[y]} = \int_0^t l_{[y]+\tau}\, d\, {}_\tau V_{[y]} + \int_0^t {}_\tau V_{[y]}\, dl_{[y]+\tau} = \\ = \int_0^t l_{[y]+\tau}\, d\, {}_\tau V_{[y]} - \sum_{i=1}^n \int_0^t {}_\tau V_{[y]}\, df^{(i)}_{[y]+\tau},$$

so erhält man aus (α)

$$\int_0^t l_{[y]+\tau}\, d_\tau\, {}_\tau V_{[y]} - \sum_{i=1}^n \int_0^t {}_\tau V_{[y]}\, df^{(i)}_{[y]+\tau} = \delta \int_0^t l_{[y]+\tau}\, {}_\tau V_{[y]}\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t l_{[y]+\tau}\, d\mathfrak{P}_{[y]+\tau} - \sum_{i=1}^n \int_0^t U^{(i)}_{[y]+\tau}\, df^{(i)}_{[y]+\tau} - \int_0^t l_{[y]+\tau}\, d\mathfrak{S}_{[y]+\tau}$$

oder

$$\int_0^t l_{[y]+\tau}\, d\left({}_\tau V_{[y]} - \delta \int_0^\tau {}_\tau V_{[y]}\, d\tau + \mathfrak{S}_{[y]+\tau}\right) = \int_0^t l_{[y]+\tau}\, d\mathfrak{P}_{[y]+\tau} -$$

$$- \sum_{i=1}^n \int_0^t l_{[y]+\tau}\, (U^{(i)}_{[y]+\tau} - {}_\tau V_{[y]}) \frac{df^{(i)}_{[y]+\tau}}{l_{[y]+\tau}}$$

d. h. mit Rücksicht auf die Definitionen (4):

$$\int_0^t l_{[y]+\tau}\, d\mathfrak{P}^s_{[y]+\tau} = \int_0^t l_{[y]+\tau}\, d\mathfrak{P}_{[y]+\tau} - \int_0^t l_{[y]+\tau}\, d\mathfrak{P}^r_{[y]+\tau}. \qquad (\overline{\alpha})$$

Analog ergibt sich für (β) und (γ).

$$\int_0^t e^{-\delta\tau}\, d\mathfrak{P}^s_{[y]+\tau} = \int_0^t e^{-\delta\tau}\, d\mathfrak{P}_{[y]+\tau} - \int_0^t e^{-\delta\tau}\, d\mathfrak{P}^r_{[y]+\tau}, \qquad (\overline{\beta})$$

$$\int_0^t d\mathfrak{P}^s_{[y]+\tau} = \int_0^t d\mathfrak{P}_{[y]+\tau} - \int_0^t d\mathfrak{P}^r_{[y]+\tau}. \qquad (\overline{\gamma})$$

während die Darstellung (3) die Gestalt bekommt:

$$\int_0^t l_{[y]+\tau}\, e^{-\delta\tau}\, d\mathfrak{P}^s_{[y]+\tau} = \int_0^t l_{[y]+\tau}\, e^{-\delta\tau}\, d\mathfrak{P}_{[y]+\tau} - \int_0^t l_{[y]+\tau}\, e^{-\delta\tau}\, d\mathfrak{P}^r_{[y]+\tau}. \quad (\overline{\delta})$$

5. Aus den obigen Darstellungen ersieht man mit Leichtigkeit den technischen Unterschied der obigen Gleichungen, u. zw. handelt es sich um eine doppelte Alternative zwischen dem individuellen ($\overline{\beta}, \overline{\gamma}$) und dem gesamten ($\overline{\alpha}, \overline{\delta}$) Deckungskapital, je nachdem das eine oder das andere auf den Beginn der Versicherung ($\overline{\beta}, \overline{\delta}$) oder auf den Zeitpunkt t ($\overline{\alpha}, \overline{\gamma}$) bezogen wird. Ferner kann gezeigt werden, daß jede

dieser Gleichungen aus jeder anderen folgt, u. zw. auf Grund eines Satzes von Loewy,[5]) wonach unter geeigneten Voraussetzungen folgende Relation gilt:

$$\int_a^b \varrho(t)\, d\left(\int_0^t \varphi(\tau)\, ds(\tau)\right) = \int_a^b \varrho(t)\, \varphi(t)\, ds(t).$$

6. Bei den vorhergehenden Untersuchungen handelte es sich um Integralgleichungen für das Deckungskapital;[6]) beachtet man aber, daß das Deckungskapital selbst in der Form

$${}_tV_{[y]} = {}_0V_{[y]}\, e^{\delta t} + \int_0^t e^{\delta(t-\tau)}\, d\mathfrak{P}^s_{[y]+\tau} - \int_0^t e^{\delta(t-\tau)}\, d\mathfrak{S}_{[y]+\tau}$$

dargestellt werden kann, so können im Falle der bloßen Stetigkeit, wie auch im Falle der Differenzierbarkeit für die Sparprämiensummenfunktion und für die Sparprämienintensität analoge Integralgleichungen aufgestellt werden, die eine gründlichere Analyse der Versicherungsprämie gestatten. Hieraus soll demnächst noch zurückgegriffen werden.

Trieste, 8. Dezember 1931.

Sur quelques inégalités entre les moments absolus d'ordre positif d'une suite de variables aléatoires indépendantes et le second théorème — limite du calcul des probabilités au domaine de la loi de Laplace — Gauss dans la formulation de Liapounoff.

Par *Fr. Kudela.*

Dans un petit article publié dans ce Journal[1]), nous avons démontré, entre autres, deux inégalités concernant les moments absolus d'une variable aléatoire dont la répartition (c'est-à-dire l'ensemble de valeurs

---

[5]) Zweite Mitteilung, Satz 4. S. 77. Vgl. auch die indessen erschienene Arbeit des Verf: Sugli integrali di Stieltjes e sulla loro applicazione nella matematica attuariale, Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari III/2 (April 1932), p. 160—181.

[6]) Vgl. auch A. Berger, Über das Aequivalenzprinzip, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1929 Heft 4, S. 197—217.

[1]) Note sur quelques inégalités entre les valeurs probables d'une grandeur aléatoire qui ne prend que des valeurs positives, deuxième année, Prague 1931, p. 157 et s.