Literatura

Aktuárské vědy, Vol. 3 (1932), No. 1, 33–42

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144564

es möglich ist, die angeführte Methode bei allen die Sozialversicherung betreffenden Aufgaben zu verwenden.

Die Frage und ihre Lösung wird sich ändern, wenn wir ausser neuen Eintritten auch Austritte (nicht nur Uebertritte) in Betracht ziehen, was aber einer anderen Arbeit vorbehalten bleiben soll. Die praktische Bedeutung ist jedoch mangels passender und verlässlicher statistischer Forschungen über die Austritte nicht so gross.

LITERATURA.

R. vom Mises: Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik. Bd. I. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik u. theoretischen Physik. F. Deuticke, Leipzig - Wien, 1931. (Stran X + 574.)

Klasický počet pravděpodobnosti vychází z Laplaceovy definice, podle níž pravděpodobnost jest zlomek, v jehož čitateli jest počet případů příznivých a ve jmenovateli úhrnný počet všech stejně možných případů. Filosofové i matematikové záhy poznali, že výraz „stejně možné případy" jest úplným synonymem se rčením „případy stejně pravděpodobné" a že tedy definice Laplaceova v jistém smyslu má v sobě logický circulus. Byly proto z různých hledisek učiněny pokusy podati vhodnou definici pojmu pravděpodobnosti, ale výsledek nebyl uspokojující. Ustálilo se pak mínění, že přesnou definici tohoto pojmu asi sotva bude možno podat (H. Poincaré), ale přes to že máme subjektivní vědomí o rozdílu mezi jistotou a pravděpodobností a že toto vědomí jest tak určité, že postačí ke kvantitativnímu rozboru hromadných zjevů a opakovaných pokusů.

Abychom si připomenuli k jakým důsledkům vede klasický p. pr. stačí poznamenat, že v něm, na př. otázka „Jaká jest pravděpodobnost úmrtí 30letého muže?" má zcela určitý smysl. Ale zkušenost poučila pojistné matematiky, že předložená otázka má tehdy a jen tehdy smysl, udáme-li současně souhrn osob, do kterého onen muž náleží. Můžeme proto také říci, že výroky v klasickém p. pr. mají absolutní smysl. To však odporovalo zkušenosti, podle níž veškeré výroky o pravděpodobnosti hromadných zjevů mají smysl toliko relativní.

Za takového stavu začala se vedle klasického p. pr. vyvíjeti disciplina nazvaná „teorií kolektivních předmětů" (Fechner: Kollektivmasslehre, 1897), která rovněž analysovala hromadné zjevy, ale činila tak především z hlediska zkušenostního. Že tento stav nebyl trvale udržitelný, ukazoval již, na př. H. Bruns (Wahrsheinlichkeitsrechnung u. Kollektivmasslehre, 1906), když vyzdvihl souvislost počtu pr. s teorií kolektivních předmětů. Ironicky poznamenává, že p. pr. operuje s mnohými pojmy, které jsou způsobilé, aby byly uloženy do musea zajímavých starožitností. Má-li p. pr. míti význam pro zkušenost, pak musí vyjíti od pojmů teorie kolektivních předmětů. Především nesmíme vyjíti od pojmu pravděpodobnosti a priori stanoveného, nýbrž hodnotu pro pravděpodobnost určitého zjevu jest třeba vždy odvozovati ze zkušenosti, kterou máme o hromadných zjevech.

Důsledné spojení p. pr. s teorií kolektivních předmětů provedl pak R. von Mises v několika pojednáních, z nichž základní jsou následující: 1. Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Mathem. Zeitschrift, Bd IV, Heft 1—2, 1919); 2. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Mathem. Zeitschrift, Bd V, Heft 1—2, 1919); 3. Wahrscheinlichkeit, Statistik u. Wahrheit (Wien, 1928).*) K těmto třem pojednáním řadí se kniha, o níž právě referuji. Abych předem vytkl v čem se liší od dřívějších prací, poznamenávám, že úvahy v ní nejsou provedeny zcela obecně jako v (*M2*), za to však jsou uvedeny (a zpravidla podrobně diskutovány) velmi četné příklady. Po vnější stránce jest kniha rozdělena ve čtyři kapitoly, z nichž v prvé jsou podány základní pojmy, ve druhé zákony velkých čísel a základní analytické věty, ve třetí aplikován jest p. pr. na statistiku a teorii chyb, ve čtvrté vyloženy jsou pak základy fysikální statistiky.

Cílem, ke kterému Mises směřuje, jest vybudovati počet pr. jako exaktně přírodovědeckou teorii hromadných zjevů a opakovaných pokusů. Vzorem při tom jest mu geometrie a mechanika. Každá taková teorie vychází z několika výroků, které se opírají o zkušenost a definují základní pojmy. Z těchto výroků deduktivní metodou odvozují se pak různé matematické věty. V závěru béře teorie opět zřetel ke zkušenosti a stanoví do jaké míry se podařilo pomocí odvozených matematických vět hromadné zjevy vystihnouti (popsati).

Základní pojem, ze kterého Misesův racionální počet pr. vychází, jest pojem kolektivu. Každý hromadný zjev (anebo serie opakovaných pokusů) se skládá z elementů (t. j. z pozorování), při čemž ke každému elementu jest přiřazen jeden anebo více znaků (t. j. výsledek pozorování). Trvale předpokládáme, že jest možno znázorniti si znak číslem resp. k čísly, takže potom souhrn všech znaků daného hromadného zjevu lze geometricky interpretovati jako určitě definovanou bodovou množinu v k-rozměrném prostoru. Tuto množinu nazveme „znakovou množinou“ a číslo k dimensí (rozměrem) kolektivu. Kolektivem budeme pak vždy rozuměti nekonečnou posloupnost elementů hromadného zjevu, která splňuje následující dva požadavky (Forderungen):

(I.) požadavek: Budiž A libovolná část dané znakové množiny a nechť mezi n počátečními elementy kolektivu jest n_A elementů, jejichž znaky patří do A. Pak existuje limitní hodnota

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n} = W_A.$$

Zlomek n_A/n jest relativní četnost (frekvence) výskytu znaku z A, W_A nazveme pravděpodobností pro výskyt znakové množiny A v daném kolektivu. Pokud jde o limitu, jest míněna zcela přesně ve smyslu analytickém.

Dříve než uvedeme druhý požadavek, jest třeba zavésti nový pojem „posiční (místní) volby (výběru)“ (Stellenauswahl, Positionsauswahl). Kolektiv jest nekonečná posloupnost (tedy vždy spočetné množství) elementů

$$e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots \tag{1a}$$

V řadě (1*a*) každý element jest určen 1. indexem k udávajícím jeho místo (posici) v (1*a*), a 2. určitým znakem (resp. více znaky). Každý výběr nekonečně mnoha elementů z řady (1*a*), který bude proveden jen s ohledem na indexy (a při němž tedy na znaky elementů vůbec zřetele nebéřeme) nazveme posičním výběrem (volbou). Označme pro stručnost tuto definici jako výběr (*A*). Posičním výběrem z (1*a*) vznikne nová nekon. posloupnost elementů

*) O této knize výstižné referáty podali p. prof. E. Schoenbaum (Aktuárské vědy, roč. I, č. 1, 1929) a p. Dr. V. Tardy (Česká mysl, roč. XXVI, č. 2, 1931). — Jednotlivá pojednání označím po řadě (*M1*), (*M2*), (*M3*).

$$e'_1, e'_2, \ldots, e'_k \ldots, \qquad (1b)$$

kterou nazveme „**částečným kolektivem**". Protože o znacích nebyl činěn žádný předpoklad, můžeme v ($1b$) přiřazení znaků k indexům elementů nazvati „**nepravidelným**" anebo „**náhodným**". Za typickou posiční volbu lze považovati výběr, při kterém udáme nějaký **aritmetický** předpis pro podržené elementy, na př. „z původních indexů $1, 2, \ldots, k, \ldots$ podržíme jen ta čísla, která jsou prvočísly".

Pojem posičního výběru Mises rozšiřuje v tom smyslu, že připouští také následující výběrové předpisy: **Z řady (1a) vybereme ty elementy, které následují (předcházejí) po (resp. před) elementem, jenž má pevně zvolený znak.** Tento výběr označme jako (B). Na př. v serii her „rouge et noir" připustíme jen tu hru, která následuje po hře, v níž vyšla barva červená. Vyšla-li tedy barva červená (a), po ní opět červená (b), na to černá (c), podržíme hry (b) a (c). Patrno, že přiřazení mezi znakem a indexem v odvozeném částečném kolektivu má opět „**náhodný**" charakter. V obecném případě možno kombinovati výběry (A) a (B). V ($M2$) nazýval Mises posiční výběry „přípustnými" (zulässig).

(II.) **požadavek potom zní: Budiž dána znaková množina M kolektivu K; zvolme v M dvě částečné vzájemně různé množiny A, B takové, že pro ně W_A, W_B nejsou současně rovny nule a uvažujme kolektiv, který vznikne z K, vynecháme-li v něm ty elementy, jejichž znaky nepatří ani do A ani do B. Provedeme-li v tomto odvozeném kolektivu posiční výběr, vznikne částečný kolektiv K', pro který musí platit**

$$\lim_{n'\to\infty} \frac{n'_A}{n'} = W'_A, \quad \lim_{n'\to\infty} \frac{n'_B}{n'} = W'_B$$

a

$$W'_A : W'_B = W_A : W_B.$$

K porozumění matematické formulaci (II.) požadavku lze uvésti dvě poznámky: 1. Podle předpokladu pro částečný kolektiv K' jest $n' = n'_A + n'_B$, tedy $W'_A + W'_B = 1$. Avšak obecně $W_A + W_B \neq 1$, neboť $n_A + n_B \neq n$. Rovnost platí tehdy a jen tehdy, jestliže $A + B = M$, anebo jestliže sice platí rozklad $A + B + C = M$, při čemž však $W_C = 0$. Proto také obecně $W'_A \neq W_A$.

2. K úměře mezi pravděpodobnostmi v K a K' dospějeme následující úvahou: Značí-li n_{A+B} počet těch elementů mezi všemi počátečními n elementy v K, které mají znak z množiny A nebo B, pak relativní četnost $\frac{n_A}{n_{A+B}}$ musí míti limitu, neboť existují limity četností $\frac{n_A}{n}$, $\frac{n_{A+B}}{n}$ a platí $\frac{n_A}{n_{A+B}} = \frac{n_A}{n} : \frac{n_{A+B}}{n}$. Tedy v limitě $W'_A = \frac{W_A}{W_{A+B}}$ za předpokladu $W_{A+B} \neq 0$. Podobně $W'_B = \frac{W_B}{W_{A+B}}$. Srovnáním $W'_A : W'_B = W_A : W_B$, jak postulujeme.

Dalším základním (avšak již odvozeným) pojmem jest „**rozdělení**" (Verteilung), čímž rozumíme **souhrn všech pravděpodobností, které se v daném kolektivu vyskytnou.** Z důvodů analytických jest výhodné rozeznávati **aritmetické** (diskrétní) a **geometrické** rozdělení. V prvém případě pravděpodobnosti tvoří bodové diskrétní množství definované na dané znakové množině, kdežto v druhém případě rozdělení jest na znakové množině spojité. Při geometrickém rozdělení nelze dosti dobře mluviti o „hodnotě pravděpodobnosti v určitém bodě znakové množiny", za to však jest velmi účelné zavésti pojem „**hustoty pravděpodobnosti**".

Hlavní obsah počtu pr. pak záleží v řešení úlohy, jak lze z daného rozdělení uvnitř známého kolektivu K vypočísti rozdělení v kolektivech odvozených z K. Přirozené jest, že obecně místo z jednoho kolektivu možno vyjíti z libovolného počtu známých kolektivů.

Jest velmi pozoruhodné a svědčí o dobré podstatě Misesovy teorie, že se podařilo veškeré dosud známé problémy počtu pr. redukovati na čtyři základní operace s kolektivy. Jsou to: 1. volba resp. výběr (Auswahl), 2. míchání (Mischung), 3. dělení (Teilung), 4. spojení (Verbindung).

Ad 1. Z daného kolektivu K o rozdělení W lze „volbou" odvoditi nekonečně mnoho nových kolektivů K'. Kolektiv K' vznikne z K, provedeme-li v K určitou posiční volbu. Elementy z K' tvoří tedy částečnou posloupnost z K. Znaková množina pro K i K' jest stejná. Pak rozdělení W' v K' jest totéž jako v K : $W = W'$.

Ad 2. Z daného kolektivu K, který má více než dva znaky, vznikne „mícháním" nový kolektiv K', jestliže 1. elementy v K' jsou tytéž jako v K, 2. znaky pro K' vznikly ze znaků pro K tím, že jsme několik znaků pro K spojili v jediný. Rozdělení v novém kolektivu odvodí se z rozdělení daného kolektivu, jesrliže pravděpodobnosti všech starých znaků, které jsme spojili v jediný nový znak, sečteme. Uvažujeme-li hustotu pravděpodobnosti, místo součtů máme obecně vícerozměrné integrály. Jest velmi zajímavé, že v případě kolektivu K' o dvou znacích (alternativa) se stejnoměrným aritmetickým rozdělením obdržíme větu, která jest shodna s Laplaceovou definicí pravděpodobnosti.

Ad 3. Tato operace jest zcela obecnou formulací J. Bayesova pravidla o výpočtu „pravděpodobnosti příčin (resp. hypothes o výsledku pokusů)", zvaného někdy také „pravidlem dělícím". Předpokládáme, že daný kolektiv K má více než dva znaky a že pro odvozený kolektiv K' platí: 1. elementy z K' jsou ony elementy z K, jejichž znaky patří do určitě zvolené části z původní znakové množiny, 2. znak elementů se nezmění. Nové rozdělení vypočteme, jestliže jednotlivé pravděpodobnosti dělíme součtem pravděpodobností všech podržených znaků.

Ad 4. V předcházejících případech vycházeli jsme vždy z jediného základního kolektivu, kdežto nyní chceme ze dvou (a více) základních kolektivů odvodit jediný nový kolektiv. Nechť jsou tedy dány dva kolektivy K' a K'' o elementech (e'_k) a (e''_k); rozdělení jsou W' a W''; k'-rozměrné znaky x' a k''-rozměrné znaky x''. Nový kolektiv K utvoříme tím, že elementy e'_k a e''_k (o stejných indexech) shrneme v jediný, což označíme jako $e_k = e'_k e''_k$. Potom znak x elementu e_k jest $(k' + k'')$-rozměrný. Operace „spojení" jest složitější a třeba dbát dvou okolností.

Především platí věta: Spojíme-li dva kolektivy, výsledná posloupnost elementů e_k nemusí býti obecně kolektivem. Proto pravíme, že dva kolektivy jsou schopny spojení (verbindbar), jestliže výsledná posloupnost tvoří opět kolektiv a omezujeme se jen na kolektivy tohoto typu.

Dále třeba rozeznávat kolektivy vzájemně závislé a nezávislé. Přesné rozlišení mezi oběma druhy provádí Mises pomocí pojmu vylosování (Auswürfelung). Nechť jsou dány dvě posloupnosti (kolektivy) K' a K'' o elementech (e') a (e'') a nechť elementy e'' jsou určitým způsobem přiřazeny k elementům e'. Pak pravíme, že jsme z (e'') vylosovali částečnou posloupnost (e''') pomocí znaku x' patřícího kolektivu (e'), jestliže podržíme jen ty elementy e'', ke kterým jsou přiřazeny elementy e' mající určitě zvolený znak x'.

Nyní definujeme: *a*) Dva kolektivy schopné spojení nazveme navzájem nezávislé, jestliže limita relativních četností ve vylosovaných posloupnostech jest nezávislá na znacích, pomocí kterých vylosování bylo provedeno.

β) Jestliže naopak dva kolektivy schopné spojení dávají vylosované posloupnosti, pro které rozdělení závisí (známým způsobem) na znaku, kterým jest vylosování určeno, pak nazveme tyto kolektivy závislé.

V méně přesné stylisaci platí o spojení známá věta o násobení pravděpodobností: Pravděpodobnost současného výskytu dvou nezávislých zjevů jest rovna součinu pravděpodobností každého zjevu zvláště; je-li druhý zjev závislý na prvém, pak v součinu prvním faktorem jest pravděpodobnost výskytu prvého zjevu jako samostatného a druhým faktorem jest pravděpodobnost, že se vyskytl zjev druhý za předpokladu, že zjev první již se uskutečnil.

Ze základních operací lze odvozovati operace stále složitější. Na str. 98—127 podány jsou četné příklady těchto složitějších operací. Jest však litovati, že není zde podána formulace operací zvaných „křížení (Kreuzung)" a „spjetí resp. skládání (Faltung)", o kterých v (*M2*) bylo dokázáno, že vedou přímo k zákonům velkých čísel.

Po stránce analytické jest nejzajímavější kapitola II. jednající o limitních větách a zákonech počtu pr. Výklady jsou velmi jasné a považuji tuto stať za nejlepší. V § 5 podán jest problém Bernoulliho (spojení více alternativ téhož druhu), v § 6 jest vyložen problém Bayesův (z opakovaných pozorování se soudí na základní pravděpodobnost jistého zjevu); oba problémy řešeny úplně a zcela systematicky, takže ihned jsou patrny obsahové rozdíly i obdobná jejich analytická zpracování.

Z obou těchto problémů odvozuje Mises dva zákony velkých čísel. Název „zákon v. č." zavedl Poisson a užívá se ve dvojím významu. Jednou rozumí se tím zkušenostní fakt, že ve statistických řadách při dosti velkém počtu pokusů relativní četnosti pro výskyt určitého znaku jsou přibližně konstantní (v tomto smyslu používá název, na př. Bruns), za druhé nazývá se tak určitá analytická věta, kterou třeba dokázat. Zmíněný zkušenostní fakt formuluje Mises jako požadavek I. a z problému Bernoulliho odvozuje známý zákon velkých čísel, který označuje jako první zákon. Dokazuje však, že zcela obdobně z problému Bayesova plyne další analytická věta, která jest druhým zákonem v. č.

Souvislost těchto zákonů a jejich (méně přesná) formulace vynikne z následující charakteristiky (viz (*M2*)). Proveďme z urny, v níž jsou černé a bílé koule n tahů, při čemž vytáhneme s-krát kouli černou; zjistíme relativní četnost $= s/n$. Pak tvrdí:

1. požadavek (I.), že pro $n \to \infty$ podíl s/n blíží se k jisté hranici, kterou nazveme pravděpodobností (za předpokladu, že jest splněn také požadavek (II.));

2. první zákon v. č.: provedeme-li s touž urnou pokusy nekonečně mnohokrát, pak při dosti velkém n „skoro vždy" vyjde táž hodnota s/n anebo hodnota k ní velmi blízká;

3. druhý zákon v. č.: uvažujeme-li nekonečně mnoho serií pokusů s libovolnými urnami, při kterých dostáváme stejnou (pozorovanou) hodnotu s/n, pak při dosti velkém n skoro vždy limita hodnoty s/n pro uvažovanou urnu jest rovna hodnotě pozorované anebo hodnotě k pozorované velmi blízké.

Ke každému zákonu v. č. patří určitá analytická „základní věta", která obsahuje výrok o asymptotickém průběhu pravděpodobnosti, o níž se v příslušném zákoně jedná. (Viz také (*M1*).)

Proti Misesově teorii se uvádějí různé námitky, které jsou v podstatě dvojího druhu:

1. Tradiční počet pr. nezná (II.) požadavku a svádí proto k domněnce, že nelze použíti analytické definice limity. Namítá se pak, že v p. pr. se

jedná o nový pojem „stochastické limity", který třeba odvodit z (prvého) zákona v. č. Poznamenejme stručně, že tyto námitky vycházejí z neporozumění Misesově teorii. Analytický pojem limity má oprávněné místo v p. pr. a „stochastická limita" jest zcela zbytečná.**)

Cantelli zavádí pojem konvergence „ve smyslu počtu pravděpodobnosti" (convergenza „nel senso del calcolo delle probabilità"), a to následovně: Buďtež X_n, X dvě proměnné náhodně definované v téže kategorii pokusů. Pak výraz $(X_n - X)$ konverguje „ve smyslu počtu pravděpodobnosti" k nule, jestliže pro každé číslo kladné η pravděpodobnost $P\,[|X_n - X| < \eta]$ má za limitu číslo 1 pro $n \to \infty$. S touto definicí jest ekvivalentní následující definice Fréchetova: Náhodně proměnná X_n konverguje (směřuje) „ve smyslu počtu pravděpodobnosti" — Fréchet stručně užívá termínu convergence „en probabilité" — k náhodné proměnné X, jestliže pro každou dvojici kladných čísel ε a η pravděpodobnost, že $|X_n - X| \geqq \eta$ jest menší než ε od jistého N počínaje.

Pro srovnání uvádím obvyklou analytickou (Bolzano-Cauchyho) definici konvergence: Posloupnost náhodných proměnných X_n konverguje „v obvyklém smyslu" (au sens ordinaire) k náhodně proměnné X, jestliže pro každý pokus z uvažované kategorie a pro každé číslo $\eta > 0$ jest $|X_n - X| < \eta$ od jistého N počínaje. Číslo N obecně závisí na výsledku uvažovaného pokusu a na η. Závisí-li N jen na η, konvergence jest stejnoměrná.

Viz o tom více v pojednání:

Cantelli: La tendenza ad un limite nel senso del Calcolo delle Probabilità. (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, sv. 41 (1916), pag. 191—201.)

M. Fréchet: Sur la convergence „en probabilité" (Metron, sv. 8 (1929), No 4., pag. 3—50.)

2. Závažnější jsou námitky, které se opírají o rozbor logické struktury této teorie.

Ad 2. Pro celkové posouzení, hlavně pro určení podstaty a dosahu M-ovy teorie jest rozhodující otázka: Jest možno považovati požadavky I. a II. za axiomatický systém? Otázka odvozená: Není-li to možné, jaký význam pak mají tyto požadavky?

Předem se shodněme o tom, co rozumíme axiomatickým systémem. Jednáme-li o takovém systému, potom máme vždy na mysli systém výroků, jehož logická struktura je obdobná Hilbertovu axiomatickému systému z geometrie anebo Zermelo-Fraenkelovým axiomům teoreticko-množinovým. To jest zcela ve shodě s myšlenkou Misesovou, který za svůj vzor si zvolil (kromě jiné) geometrii. Sledujeme-li však M-ovy výklady, nemůže nám býti lhostejné jeho další (druhé) stanovisko. Misesovi jde o vybudování exaktně přírodovědecké teorie hromadných zjevů. K tomu cíli postupuje podle vzorů fysikálních teorií, hlavně mechaniky, analysuje naši zkušenost a z této zkušenosti odvozuje dva principy. (Požadavek II. nazývá přímo principem nemožnosti herního systému.)

**) Jako příklad definic tohoto druhu uvádím definici Cantelliho a Fréchetovu. Jak známo, náhodná proměnlivá veličina (variable aléatoire) jest číslo X_E, jehož hodnota jest určena náhodným výsledkem E pokusu patřícího do jisté kategorie (množiny) C. Na př. kategorii C skládají tahy koulí z urny, E jest udáno vytažením určité skupiny koulí, X_E jest pak počet bílých koulí z této skupiny. X_E obecně jest funkcionálem, jehož proměnnou E jest výsledek pokusu a jehož definičním oborem jest kategorie C.

Při vybudování teorie uplatnily se tedy dva směry: jednou se požadavky považují za principy, po druhé za axiomy. Logicky vzato, rozdíl mezi axiomem a principem jest jen relativní a záleží na vývojovém stupni určité discipliny, abychom její základní výroky prohlásili za axiomy. Učiníme-li však tak, potom musíme žádati, aby logická struktura zvolených základních výroků měla všechny znaky axiomatického systému. Tak především jest nutné, aby v systému byly výroky o existenci objektů, o nichž se v teorii jedná, anebo výroky, ze kterých tato existence by se dala dokázat. Dále musí býti v systému věty o tom, jak jednotlivé objekty (v našem případě kolektivy) spolu souvisejí.

Předpokládáme-li, že Misesovy požadavky tvoří axiomatický systém, dospějeme k závěru: 1. V axiomech není ničeho řečeno o existenci kolektivu. Pokusíme-li se matematicky konstruovati kolektiv (t. j. určité číselné posloupnosti), nepodaří se to, poněvadž platí věta: Není možno matematicky sestrojiti kolektiv, aniž by to neodporovalo axiomu II.

2. O souvislosti dvou (a více) kolektivů rovněž není v axiomech ničeho řečeno. Především bylo by třeba, abychom z axiomů nikdy nedospěli ke kolektivu, který by nebyl schopný spojení. Snadno však lze udati případ, ve kterém kolektivy nejsou schopny spojení. Dále z axiomů má vyplývati rozdíl kolektivů závislých a nezávislých. Toto rozlišení však z axiomů I. a II. neplyne, a proto nutno onen rozdíl postulovat (viz (*M3*), str. 52).

Obou těchto obtíží jest si Mises vědom, když na str. 22 praví, že při otázce po úplném axiomatickém systému počtu pr. dospějeme zajisté ještě k dalším výsledkům.

Pozoruhodný pokus o úplný axiomatický systém uveřejnil *K. Dörge* v pojednání „Zu der von R. von Mises gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erste Mitteilung: Theorie des Glückspiels“ (Mathem. Zeitschrift, Bd 32, 1930, str. 232—258). Srovnáme-li Dörgeho teorii s požadavky I. a II., velmi jasně vyplývá celkový názor na podstatu Misesovy teorie:

Kolektiv není číselná posloupnost, která by byla určena matematickými zákony, nýbrž jest to posloupnost idealisovaných zkušeností (na př. vrhů), které máme o hmotné skutečnosti (na př. pokusy kostkou). Ve zvláštních případech jest možno kolektiv interpretovati aritmeticky jako číselnou posloupnost. Ze zkušenosti můžeme odvoditi dva principy. Principem při tom rozumíme větu, která ovládá větší obor naší zkušenosti a která podává nám předpisy, jak lze tuto zkušenost matematicky popsati. Na rozdíl od stanoviska čistě axiomatického, není třeba, aby existence kolektivu byla dokazována matematickou konstrukcí a rovněž netřeba, aby v principech byly obsaženy všechny vlastnosti kolektivů. Hlavní význam principů jest v tom, že umožňují co nejjednodušeji a co nejlépe matematicky popsati hromadné zjevy a opakované pokusy.

Toto stanovisko jest zcela ve smyslu Misesovy teorie a odpadají při něm veškeré zbytečné potíže. Domnívám se proto, že není oprávněné požadavky I. a II. pokládati za axiomy, nýbrž, že svojí podstatou jsou to principy a že skutečné axiomatické vybudování počtu pr. musí býti provedeno jinou metodou. A právě zavedení principů do počtu pr. jest jedinečná zásluha Misesova.

Otomar Pankraz.

Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari. Ročník II., č. 3.

Vito Volterra: **Matematické zkoumání biologických asociací.** V tomto článku se vyšetřuje vzrůst počtu individuí dvou a více spolužijících druhů během doby a odvozují se matematickými metodami z určitých předpokladů tři všeobecné zákony.

Mosè Jacob: **O rozvoji frekvenční funkce v řadu Hermiteových polynomů.** Autor dokazuje rozvoj funkce v řadu Hermiteových polynomů za obecnějších předpokladů, než za jakých byly provedeny dosavadní důkazy.

Bruno de Finetti: **O pojmu střední hodnoty.**

Tullio Bagni: **O roční premii a životním pojištění.**

Anna Mezzanotte: **O jistém problému počtu pravděpodobnosti.**

Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari. Ročník II., č. 4.

Francesco Tricomi: **O určité náhodné proměnné, jež je v souvislosti s význačným typem rozdělení celých čísel.** Autor se zabývá proměnnou, jež je dána součtem nezávislých proměnných, jejichž hodnoty jsou dány čísly přirozené řady číselné.

Ugo Broggi: **Interpolační problém v pojistné matematice.**

R. Frucht a A. Vellat: **Jednoduchý způsob extrapolace životních důchodů podle úrokové míry.** Jsou-li dány hodnoty životních důchodů pro 3 úrokové míry, lze stanoviti hodnotu pro čtvrtou úrokovou míru parabolickou extrapolací. V článku se odvozuje nová metoda pro extrapolaci, která sice vede k přesnějším výsledkům, avšak pro numerický výpočet není daleko tak jednoduchá jako extrapolace parabolická.

Enrico Lenzi: **Problémy o životních důchodech a jejich řešení.** Autor odvozuje hodnotu životního důchodu pro úrokovou míru obsaženou mezi dvěma danými mírami, známe-li pro ně hodnoty důchodů životních a jistých. Úvahy tyto dají se obrátiti a slouží pak k výpočtu doby trvání životního důchodu nebo úrokové míry.

V. Romanovsky: **O pravděpodobnosti „a posteriori“.** Dosavadní úvahy o pravděpodobnosti příčin a o pravděpodobnosti budoucích zjevů prováděly se za předpokladu, že možné hodnoty těchto pravděpodobností jsou a priori stejně pravděpodobné. První krok k odstranění této omezující hypotesy učinil R. von Mises. Romanovsky podává ve svém článku nový, přesný důkaz výsledků Misesových a rozšiřuje je i na teorem Markovův. Stejným způsobem řeší na základě obecnějších předpokladů Poincaréův problém počtu malých planet.

Giornale di matematica finanziaria. Anno XIII, serie II, vol. I.

F. Insolera: **Sull' adeguamento dei costi delle assicurazioni sociali alla potenzialità economica della Nazione.** (O vyrovnání nákladů sociálního pojištění s ohledem na hospodářskou možnost národa.)

E. Lenzi: **Premi per assicurazioni sulla vita a saggio d'interesse variabile.** (Premie životního pojištění při proměnné úrokové míře.)

F. M. Weida: **The valuation of a continuous survivorship annuity with refund of an arbitrarily assigned part of the purchase price.** Autor spojitou metodou počítá roční důchod dvou osob na přežití za předpokladu, že se respektuje přesně okamžik, ve kterém jedna z osob zemřela.

F. Insolera: **On the oldest age.** (O nejstarším věku.) Nejstarší věk zpravidla se definuje jako hodnota ω, ke které všechny možné věky (nikoliv jen věky určité populační skupiny v určitém období) směřují, tedy jako horní hranice všech možných věků. Jest to první věk, který se nedosáhne v žádném čase v žádné populaci. Tato definice však vede k bludnému kruhu, neboť zatím co teoreticky ω jest číslo nekon. veliké, prakticky musí míti konečnou hodnotu.

Jiná snaha jest definovat nejstarší věk jako nejvyšší možný věk. Pak sice pro každou populaci a každé historické období jest ω konečné, ale není patrné, jak jest možno, aby ke každé populaci a ke každému období patřilo totéž číslo ω.

Insolera proto navrhuje definici, která jest zcela ve shodě se zkušeností. Předpokládejme, že populační zjevy (na př. věk x a řád úmrtnosti $l(x)$ v tomto věku) mění se spojitě. Pak ω jest ona věková hodnota, v jejímž *okolí z leva* $d(x) = l(x) - l(x+1)$ blíží se k $l(x)$, jestliže délka tohoto okolí se stává libovolně malou. Z toho plyne: 1. V libovolném okolí bodu ω *z prava* jest počet žijících = počtu zemřelých = 0. 2. Zvolme věk $x_0 < \omega$; pak v každém okolí bodu x_0 počet žijících jest větší než počet zemřelých. Analyticky vyjádřeno:

$$\lim_{x \to \omega - 0} l(x) = l(\omega) = 0, \quad \lim_{x \to \omega + 0} l(x) = 0;$$

z čehož se odvodí: 1. pravděpodobnost, že osoba stará x let dožije se věku ω jest $\frac{\lim_{x \to \omega - 0} l(x)}{l(x)} = \frac{l(x)}{l(x)} = 0$, 2. pravděpodobnost, že tato osoba přežije věk ω jest $\frac{\lim_{x \to \omega + 0} l(x)}{l(x)} = \frac{0}{l(x)} = 0$. V dalším autor odvozuje ještě jiné důsledky definice. *O. P.*

Skandinavisk Aktuarietidskrift 1931, č. 3. Nuptuality, Fertility and Reproductivity; S. D. Wicksell. Studie o vývoji švédské populace, v níž poprvé je blíže studován vliv sňatečnosti na pohyb obyvatelstva s ohledem na různou plodnost vdaných a neprovdaných žen. Práce je lehce přístupná a vede k zajímavým výsledkům.

Korrelation zwischen drei Veränderlichen. F. A. Willers. Obdobně jako Hagstroem v č. 1—2. S. A. pro korelaci mezi dvěma proměnnými navrhuje autor pro míru korelace mezi třemi proměnnými veličinu $C = \cos M \cdot 2\pi$, kde M je součet četností v nejmenším trojstranu tvořeném regresními plochami a odvozuje některé její vlastnosti a způsob numerického výpočtu.

On Discontinuous Frequency-Functions a Statistical Series; A. Guldberg. Z diferenčních rovnic čtyř frekvenčních funkcí (binomické, Poissonovy, Pascalovy a hypergeometrické) odvozuje autor jednak kriteria, zda daný kolektiv je možno určitou funkcí dostatečně přesně vyjádřiti, jednak snadný výpočet momentů.

Critical Thoughts on Actuarial Science je výtah z přednášky K. Englunda ve spolku švédských aktuárů; na něj navazuje a s ním silně polemisuje H. Cramér v dalším článku **Remarks on the Foundations of Actuarial Science.** Jak z nadpisu je zřejmo, jde o rozpravu o úkolech a metodách aktuárské vědy a o použitelnost výsledků jejich v praksi. *A. Z.*

Journal of the Institute of Actuaries; vol. LXII, part 1., no 303.

The Analysis of a Sickness Experience; A. W. Watson. Referát a rozbor ve „Zprávách".

Valuation in Modern Conditions; N. P. Elderton. Otázka bilančních reserv je jednou ze životních otázek pojišťoven, hlavně u pojišťoven s velkou novou produkcí a v poválečné době znova stala se aktuelní nejen ve střední Evropě — zde hlavně v důsledku úplně nového tvoření portefeuille pojišťoven, neboť starý byl inflací buď úplně nebo značně znehodnocen — ale i v klasické zemi pojišťování, v Anglii. Autor dospívá k výsledku, že bilancování nettoreservou při početních podkladech prvého řádu má své oprávnění jen odpovídá-li tarifní premie těmto početním podkladům a jde-li o pojistku bez dividendy. Při pojištění s účastí na zisku je používání nettopremií možné jen tvoří-li se dividendové reservy. Doporučuje se používati raději za určitých předpokladů bruttopremie — ovšem bez přirážek na správní náklady. Autor blíže ukazuje, jaké výhody tato metoda skýtá a vřele se za ni přimlouvá. — Velmi živá rozprava — připomínám jen výhody A. H. Shrewburyho, která svědčí o tom, že otázka Eldertonem znovu rozvinutá je sice vděčným, ale těžko uspokojivě řešitelným problémem i nejlepším aktuárům.

Notes on the Life Table and the Limit of Life; Dr. J. F. Steffenson. Je to pokračování v diskusi s G. J. Lidstonem o významu ω, po které $l_\omega = 0$. Steffenson obhajuje svůj názor o neexistenci ω pro l_x jako spojitou funkci udávající pravděpodobnost dožití věku x, a upozorňuje na rozdíl této funkce a funkce L_x udávající rozpad pozorovaného kolektivu.

Mortality Tables giving the same Policy Values; Dr. S. Dumas. Doplňuje teorem, který uvádí Textbook, tak, aby měl skutečný praktický význam, a ukazuje, že pro konečný věk v tabulkách musí býti učiněna výjimka.

The Geometrical Mean; Dr. J. F. Steffenson. Nový, velmi elegantní důkaz vědy, že geometrický průměr n čísel je vždy menší než průměr aritmetický.

Formulae for Approximate Valuation. A. Comparison. A. W. Joseph. Při aproximačních metodách jde pravidelně o rychlý výpočet $\Sigma\omega_x f(x)$; různé formule zde používané — Henryho, Ketchingtnovu, Trachtenbergovu, Kingovu, lze snadno odvoditi specialisací z obecné formule odvozené za předpokladu, že je možno klásti $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$.

On the Substitution of a Term Certain for an Age — Status with particular refence to an Approximate Method of calculating Last-Survivor Annuities on three or four Lives. A. W. Evans. Autor odvozuje novou metodu, jak urychliti výpočet hodnot a_{xyz} a pod. pomocí aproximačních formulí a hodnot důchodů jistých.

A. Z.

ZPRÁVY.

Poznámka k teorii korelace. Kapitola o korelaci bývá, ač jest velmi důležitá, ve statistických příručkách jednou z nejtemnějších. Ve svých přednáškách podávám ji asi takto:

Budiž pravděpodobnost zjevu x naznačena symbolem $\dot{(}x\dot{)}$ a hodnota minimálního risika symbolem $\dot{\{}x\dot{\}}$. Pak platí rovnice:

$$\dot{\{}x\dot{\}} = x\dot{(}x\dot{)}.^{*)}$$

Znamenejme dále symbolem $\dot{(}y/x\dot{)}$ pravděpodobnost zjevu y podmíněnou zjevem x a podobně $\dot{\{}y/x\dot{\}}$ hodnotu minimálního risika zjevu y podmíněnou hodnotou x. Položíme-li

$$\dot{(}y/x\dot{)} = f(x),$$

pak mluvíme o stochastické souvislosti. Je-li však

$$\dot{\{}y/x\dot{\}} = F(x),$$

pak mluvíme o korelační závislosti, čímž oba pojmy jsou dostatečně definovány. Vezmeme nyní v úvahu dva nejjednodušší případy

$$\dot{\{}y/x\dot{\}} = Ax + B,$$

$$\dot{\{}x/y\dot{\}} = ay + b.$$

---

*) Viz V. Láska: Počet pravděpodobnosti.