Antonín Zelenka

Durchschnittliche Prämienreserve in der Sozialversicherung. I

Aktuárské vědy, Vol. 3 (1932), No. 1, 28–33

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144563

$$\bar{S}_r = \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{s} e^{-h_i}\left(1 + h_i + \ldots + \frac{h_i^r}{r!}\right) = \{\Phi(h)\}_a,$$

$$S_r = \frac{1}{r!}\, e^{-(h)_a} \,.\, \{(h)_a\}^r = \Phi\{(h)_a\}.$$

D'après (2°):

$\bar{S}_r < S_r$, si Φ est convexe, c'est à dire pour min $h_i > r$,

$\bar{S}_r > S_r$, si Φ est concave, c'est à dire pour Max $h_i < r$.

(A suivre.)

Durchschnittliche Prämienreserve in der Sozialversicherung.

Dr. *A. Zelenka.*

Eine von den wichtigsten, aber auch schwierigsten Aufgaben des Versicherungsmathematikers in der Sozialversicherung ist die Lösung der Frage des Anspruches der Übertretenden Versicherten. Verlässt ein Versicherter seinen bisherigen Versicherungsträger infolge Berufs- oder Gebietswechsel, entsteht begreiflich die Notwendigkeit das Verhältnis zwischen der alten und der neuen Versicherung im Interesse des Versicherten zu regeln. Eine Lösung ergibt sich dadurch, dass der ursprüngliche Versicherungsträger dem folgenden Versicherungsträger einen sog. Ueberweisungsbetrag ausfolgt, den der neue Vorsicherungsträger zur Erhöhung der Anwartschaften des Versicherten benützt. Die Feststellung dieses Ueberweisungsbetrages gehört nun zu den bisher eigentlich noch nicht befriedigend gelösten Problemen.

Der Ueberweisungsbetrag muss von zweierlei Standpunkten beurteilt werden. Für den Versicherten soll er ein Ekvivalent der Anwartschaften, welche ihm durch die Versicherung gewahrt werden, darstellen. Der Versicherungsträger hingegen steht vor der Frage, die Höhe des durch den Austritt des Versicherten freigewordenen Geldes zu bestimmen, in Erwägung, dass einerseits durch den Uebertritt des Versicherten seine Ansprüche gegenüber dem Versicherungsträger erlöschen sollen, andererseits die zukünftigen Prämieneinnahmen entfallen. Für den Versicherungsträger ist auch der Wunsch ausschlaggebend, dass das Kollektiv der sog. „treuen Versicherten" durch die Herausgabe des Ueberweisungsbetrages für die übertretenden Versicherten nicht geschädigt werden darf.

Wäre die Versicherung auf dem Systeme der vollen Deckung durch individuelle Prämien aufgebaut, so würde die Feststellung des Ueberweisungsbetrages keinerlei Schwierigkeiten bereiten, denn die Nettoreserve entspricht dann den beiden Postulaten. Die Sozialversicherung kennt aber nur das Durchschnittsdeckungssystem, bei welchem die Beiträge unabhängig oder bloss geringermassen von den individuellen Verhältnissen des Versicherten abhängig sind. Auch im Falle, dass die Versicherung von dem gleichzeitigen Kollektivum der Versicherten durch die durchschnittliche vom Alter des Versicherten unabhängige Prämie voll gedeckt wird, kann die Nettoreserve als Uebersweisungsbetrag nicht benützt werden, sodass ein Kompromiss zwischen den beiden früher erwähnten Bedingungen zu suchen ist.

Ein solches Kompromiss enthält auch das čechoslovakische Sozialversicherungsgesetz in der folgenden Bestimmung: „Der Ueberweisungsbetrag entspricht den erworbenen Anwartschaften des Versicherten inwieweit sie durch bezahlte Versicherungsbeiträge gedeckt sind.“ Selbstverständlich genügt diese Definition für die Berechnung des Ueberweisungsbetrages selbst nicht, denn die wesentliche Schwierigkeit besteht in der Berücksichtigung der Tatsache, dass der Versicherte die Durchschnittsprämie gezahlt hat, die niedriger oder vielleicht auch höher als die individuelle, vom Alter, Familienverhältnissen des Versicherten abhängige Prämie ist. Es wurden auf diesem Gebiete mehrere Methoden vorgeschlagen (Küttner, Schärtlin), die aber entweder auf willkürlichen Voraussetzungen beruhen, oder auch zu einigen praktisch unbrauchbaren Resultaten führen (negative Ueberweisungsbeträge).

In diesem Artikel möchte ich eine Methode darstellen, mittels der eine durchschnittliche Prämienreserve festgestellt werden kann, wobei die durchschnittliche Prämienreserve bloss die direkte Folge des Dekkungssystems mit der durchschnittlichenn Prämie ist. Diese durchschnittliche Prämienreserve ist als Ueberweisungsbetrag, unter der Voraussetzung, dass die Uebertritte gleichmässig in dem Kollektivum der Versicherten verteilt sind, verwendbar.

Nehmen wir eine Versicherung an, welche bei Beginn ihrer Wirksamkeit die Anzahl $M(x)$ x-jährige Versicherte erfasst, wobei sich x in den Grenzen x_0 bis ω bewegt, und welche ihren Versicherten eine Invalidenrente in der Höhe „1“ jährlich zusichert; die Prämien werden während der ganzen Aktivitätszeit gezahlt. Die Durchschnittsprämie p dieser Versicherung ist durch die Relation gegeben

$$p \cdot \sum_{x-x_0}^{\omega} M(x)\, a_x^{aa} = \sum_{x=x_0}^{\omega} M(x) \cdot a_x^{ai} \tag{1}$$

Die durchschnittliche Prämienreserve nach der Beitragszeit n bezeichnen wir mit V_n. Aus der ursprünglichen Anzahl $M(x)$ x-jähriger Versicherter sind nach n Jahren noch $M(x, n)$ aktiv. Nach der prospektiven Methode bestimmt man leicht die Prämienreserve $\sum_{x=x_0}^{\omega} V_n \cdot M(x, n)$ des ganzen Kollektivums als Differenz der zukünftigen Verpflichtungen der Versicherungsanstalt $\sum_{x=x_0}^{\omega} M(x, n)\, a^{ai}_{x+n}$ und der zukünftigen Einnahmen $p \,.\, \sum_{x=x_0}^{\omega} M(x, n)\, a^{aa}_{x+n}$

$$V_n \,.\, \Sigma M(x, n) = \Sigma\, M(x, n) \,.\, a^{ai}_{x+n} - p \,.\, \Sigma\, M(x, n)\, a^{aa}_{x+n}. \qquad (2)$$

Hiemit ist die gesuchte Prämienreserve V_n bestimmt. Auf die gleiche Weise kann man sie retrospektiv berechnen, u. z. als Differenz zwischen den rechnungsmässigen bisherigen Einnahmen und Ausgaben der Versicherungsanstalt

$$V_n \,.\, \Sigma\, M(x, n) = r^n \,.\, \Sigma\, M(x, n)_{|n}\, a^{aa}_x \,.\, p - r^n\, \Sigma\, M(x, n)_{|n}\, a^{ai}_x. \qquad (3)$$

Naturgemäss müssen die aus den Beziehungen (2) und (3) bestimmten Werte V_n gleich sein, was übringens leicht aus der Relation (1) festgestellt werden kann; setzen wir

$$a^{aa}_x = {}_{|n}a^{aa}_x + v^n\, p^{aa}_{x,n} \,.\, a^{aa}_{x+n}. \quad a^{ai}_x = {}_{|n}a^{ai}_x + v^n\, p^{aa}_{x,n}\, a^{xi}_{x+n} \qquad (a)$$

wo $v^n = \frac{1}{r^n}$ der Diskontierungsfaktor ist und dann $p^{aa}_{x,n}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass die x-jährige aktive Person nach n Jahren noch aktiv ist. Dann gilt

$$p \,.\, \Sigma\, M(x)\, ({}_{|n}a^{aa}_x + p^{aa}_{x,n} \,.\, v^n\, a^{aa}_{x+n}) = \Sigma\, M(x)\, ({}_{|n}a^{ai}_x + p^{aa}_{x,n} \,.\, v^n \,.\, a^{ai}_{x,n})$$

sodass

$$p \,.\, \Sigma\, (M(x)\, {}_{|n}a^{aa}_x - \Sigma\, M(x)\ {}_{n}a^{ai}_x =$$
$$= v^n \,.\, [\Sigma\, M(x)\, p^{aa}_{x,n} \,.\, a^{ai}_{x+n} - p\, \Sigma\, M(x) \,.\, p^{aa}_{x,n}\, a^{aa}_{x+n}].$$

Aber $M(x) \,.\, p^{aa}_{x,n} = M(x, n)$. Wir multiplizieren weiter diese Gleichung mit dem Ausdruck r^n:

$$r^n \,.\, p \,.\, \Sigma\, M(x) \,.\, {}_{|n}a^{aa}_x - r^n \,.\, \Sigma\, M(x) \,.\ {}_{n}a^{ai}_x =$$
$$= \Sigma\, M(x, n) \,.\, a^{ai}_{x+n} - p\, \Sigma\, M(x, n)\, a^{aa}_{x+n}.$$

Dies aber ist die rechte Seite der Gleichung (2) resp. (3), womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Es erübrigt sich noch bei Berecnnung der durchschnittlichen Prämienreserve den Umstand in Betracht zu ziehen, dass das Kollektiv der Versicherten nicht geschlossen ist, sondern, dass ständig neuer Zugang von Versicherten stattfindet. Nehmen wir an, dass nach t Jahren $N(x, t)$ x-jährige Personen in die Versicherung eintreten. Diese Versicherten werden unter den Begriff „zukünftige Generation" zusammengefasst, im Gegensatz zur „gegenwärtigen Generation", welche durch das früher angeführte Kollektiv $\Sigma M(x)$ gegeben ist. Für die mit dieser zukünftigen Generation auszuführenden Rechenoperationen ist es notwendig bestimmte Voraussetzungen über dieselbe zu machen. Setzen wir voraus, dass die Eintritte sich gleichmässig über das ganze Jahr verteilen, dann lassen sich diese fortlaufenden Zugänge durch die Fiktion eines Masseneintrittes auf die Mitte des Jahres zusammenziehen. Setzen wir ferner voraus, dass die Anzahl dieser Zugänge eine geometrische Progression mit dem Quotienten c bildet, dann ist $N(x, t) = c^t N(x)$. Diese Voraussetzung ist aber nicht wesentlich und alle unsere Formeln, die weiter angeführt werden, bleiben auch dann aufrecht, wenn wir nur $N(x, t) = N(x) \, . \, \varphi(t)$ setzen, was immer der Fall ist.

Die Durchschnittsprämie ist durch die Relation

$$p \, . \left[\sum_{x=x_0}^{\omega} M(x) \, a_x^{aa} + k \, . \sum_{x=x_0}^{\omega} N(x) \, . \, a_x^{aa}\right] =$$

$$= \sum_{x=x_0}^{\omega} M(x) \, . \, a_x^{ai} + k \, . \sum_{x=x_0}^{\omega} N(x) \, a_x^{ai}. \tag{4}$$

gegeben, wo

$$k = \sum_{a=0}^{\infty} v^{a+\frac{1}{2}} c^{a+\frac{1}{2}}.$$

Die durchschnittliche Prämienreserve nach Ablauf der Beitragszeit n, die durch die ganze Zeit der Wirksamkeit des Gesetzes d. i. für alle Generationen, die jemals in die Versicherung eintreten, gleichbleibt und die also nur von der Beitragszeit abhängig ist, und speziel vom Zeitpunkte des ersten Eintrittes des Versicherten in die Versicherung unabhängig ist, bezeichnen wir mit V_n. Sie wird folgendermassen bestimmt: aus der ursprünglichen Anzahl der Versicherten $M(x)$ sind nach n Jahren noch $M(x, n)$ aktiv, von $N(x, t)$ Personen sind nach weiteren n Jahren noch $N(x, t, n)$ aktiv. Wir berechnen den Barwert aller dieser Reserven V_n zum Zeitpunkt des Ablaufes von n Jahren nach Wirksamkeitsbeginn des Gesetzes. Die Prämienreserven der gegenwärtigen Generation haben einen Gesamtwert von $\sum_{x_0}^{\omega} M(x, n) \, V_n$, während dieselben bei jener Generation, die in der Zeit t seit Wirksamkeitsbeginn des Gesetzes eintritt, den Wert $\sum_{x_0}^{\omega} N(x, t, n) \, V_n \, . \, v^{t+\frac{1}{2}}$ haben. Der Gesamtwert ist also

$$V_n \, . \left[\sum_{x_0}^{\omega} M(x, n) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+\frac{1}{2}} \, . \sum_{x_0}^{\omega} N(x, t, n)\right] =$$

$$= V_n \, . \left[\sum M(x, n) + k \, . \sum_{x_0}^{\omega} N(x, n)\right].$$

Dieser Wert kann leicht bestimmt werden und zwar entweder prospektiv

$$V_n \, . \, [\Sigma M(x, n) + k \, . \, \Sigma N(x, n)] = \Sigma M \, (x,n) \, a^{ai}_{x+n} + $$
$$+ k \, . \, \Sigma N(x, n) - a^{ai}_{x+n} \, p \, . \, [M \, (x, n) \, a^{aa}_{x+n} + k \, \Sigma N(x, n) \, a^{aa}_{x+n}]$$

oder retrospektiv

$$V_n \, . \, [\Sigma(x, n) + k \, . \, \Sigma N(x, n)] = r^n \, . \, \{[M(x)_{|n} \, a^{aa}_x + $$
$$+ k \, . \, \Sigma N(x, n)_{|n} \, a^{aa}_x] \, . \, p - [\Sigma M(x) \, ._{|n} \, a^{ai}_x + k \, . \, \Sigma N(x)_{|n} \, a^{ai}_x]\}.$$

Es kann abermals leicht bewiesen werden, dass beide Werte gleich sind, wenn man bedenkt, dass

$$M(x, n) = M(x) \, . \, p^{aa}_{x,n}, \; N \, (x, n) = N_x \, . \, p^{aa}_{x,n}$$

und wenn man in die Relation (4) für a^{aa}_x und a^{ai}_x die Werte aus den Gleichungen (a) einsetzt.

Was die tatsächliche Berechnung anbelangt, so bietet diese Methode keine Schwierigkeiten und ist sehr einfach und übersichtlich. Auch in dieser Hinsicht zeigen sich ihre Vorzüge gegenüber den individuellen Prämienreserven.

Alle diese Beschlüsse und Formeln gelten nicht nur für Invalidenrente von festem Betrag „1", sondern ganz allgemein in allen Fällen; setzen wir eine solche Versicherung voraus, dass dem nach k Jahren Beitragszeit invalid gewordenen Versicherten die Rente c_k zugesichert wird. Der Barwert dieser Rente ist

$$a^{ai}_x(c) = \frac{1}{D^{aa}_x} \, . \sum c_k \, . \, D^{ai}_{x+k}$$

und die durchschnittliche Prämienreserve ist durch die Formel

$$V_n \, . \, [\Sigma M(x, n) + k \, . \, \Sigma N(x, n)[= \Sigma M(x, n) \, . \, a^{ai}_{x+n} \, (c_n, c_{n-1} \ldots) + $$
$$+ k \, \Sigma N(x, n) \, a^{ai}_{x+n}(c_n, c_{n-1} \ldots) - p[M(x,n) a^{aa}_{x+n} + k \, \Sigma N(x, n) \, a^{aa}_{x+n}]$$

bestimmt; auch durch eine analoge retrospektive Formel kann sie festgesetzt werden. Dass beide Berechnungsweisen — die retrospektive sowie die prospektive — zu denselben Resultaten führen, ist gerade so wie vorher leicht zu beweisen, wenn wir die evidente Gleichung

$$a^{ai}_x \, (c, c_1 \ldots) = a^{ai}_x \, (c_0, c_1 \ldots, c_{n-1}) + p^{aa}_{x,n} \, . \, v^n \, . \, a^{ai}_{x+n} \, (c_n \, c_{n+1} \ldots)$$

in Betracht ziehen.

Ebenso leicht ist zu beweisen, dass alle Formeln auch dann aufrecht bleiben, wenn keine konstante Prämie zu zahlen ist, sondern wenn die Prämie von der Beitragszeit abhängig ist.

Die abgeleiteten Ergebnisse können selbstverständlich auch fü die Alters-, Witwen-, Waisen- u. a. Renten verwendet werden, sodas es möglich ist, die angeführte Methode bei allen die Sozialversicherung betreffenden Aufgaben zu verwenden.

Die Frage und ihre Lösung wird sich ändern, wenn wir ausser neuen Eintritten auch Austritte (nicht nur Uebertritte) in Betracht ziehen, was aber einer anderen Arbeit vorbehalten bleiben soll. Die praktische Bedeutung ist jedoch mangels passender und verlässlicher statistischer Forschungen über die Austritte nicht so gross.

LITERATURA.

R. vom Mises: Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik. Bd. I. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik u. theoretischen Physik. F. Deuticke, Leipzig - Wien, 1931. (Stran X + 574.)

Klasický počet pravděpodobnosti vychází z Laplaceovy definice, podle níž pravděpodobnost jest zlomek, v jehož čitateli jest počet případů příznivých a ve jmenovateli úhrnný počet všech stejně možných případů. Filosofové i matematikové záhy poznali, že výraz „stejně možné případy" jest úplným synonymem se rčením „případy stejně pravděpodobné" a že tedy definice Laplaceova v jistém smyslu má v sobě logický circulus. Byly proto z různých hledisek učiněny pokusy podati vhodnou definici pojmu pravděpodobnosti, ale výsledek nebyl uspokojující. Ustálilo se pak mínění, že přesnou definici tohoto pojmu asi sotva bude možno podat (H. Poincaré), ale přes to že máme subjektivní vědomí o rozdílu mezi jistotou a pravděpodobností a že toto vědomí jest tak určité, že postačí ke kvantitativnímu rozboru hromadných zjevů a opakovaných pokusů.

Abychom si připomenuli k jakým důsledkům vede klasický p. pr. stačí poznamenat, že v něm, na př. otázka „Jaká jest pravděpodobnost úmrtí 30letého muže?" má zcela určitý smysl. Ale zkušenost poučila pojistné matematiky, že předložená otázka má tehdy a jen tehdy smysl, udáme-li současně souhrn osob, do kterého onen muž náleží. Můžeme proto také říci, že výroky v klasickém p. pr. mají absolutní smysl. To však odporovalo zkušenosti, podle níž veškeré výroky o pravděpodobnosti hromadných zjevů mají smysl toliko relativní.

Za takového stavu začala se vedle klasického p. pr. vyvíjeti disciplina nazvaná „teorií kolektivních předmětů" (Fechner: Kollektivmasslehre, 1897), která rovněž analysovala hromadné zjevy, ale činila tak především z hlediska zkušenostního. Že tento stav nebyl trvale udržitelný, ukazoval již, na př. H. Bruns (Wahrsheinlichkeitsrechnung u. Kollektivmasslehre, 1906), když vyzdvihl souvislost počtu pr. s teorií kolektivních předmětů. Ironicky poznamenává, že p. pr. operuje s mnohými pojmy, které jsou způsobilé, aby byly uloženy do musea zajímavých starožitností. Má-li p. pr. míti význam pro zkušenost, pak musí vyjíti od pojmů teorie kolektivních předmětů. Především nesmíme vyjíti od pojmu pravděpodobnosti a priori stanoveného, nýbrž hodnotu pro pravděpodobnost určitého zjevu jest třeba vždy odvozovati ze zkušenosti, kterou máme o hromadných zjevech.

Důsledné spojení p. pr. s teorií kolektivních předmětů provedl pak R. von Mises v několika pojednáních, z nichž základní jsou následující: 1. Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ma-