J. F. Steffensen

Über die pseudo-analytische Ausgleichung von Sterblichkeitstafeln

Aktuárské vědy, Vol. 3 (1932), No. 1, 1–17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144561

Über die pseudo-analytische Ausgleichung von Sterblichkeitstafeln.[1]

Von *J. F. Steffensen* (Kopenhagen).

1. Man unterscheidet bekanntlich zwischen analytischen und nicht-analytischen Ausgleichungsmethoden. „Analytisch“ heisst eine Ausgleichungsmethode, wenn das *Resultat* der Ausgleichung eine analytische Funktion ist. Es bleibt dabei gleichgültig, ob, um zu diesem Resultat zu gelangen, auch graphische oder andere nicht-analytische Methoden herangezogen worden sind. Unter den nicht-analytischen Ausgleichungsmethoden haben bisher nur die graphische und die sogenannten mechanischen Ausgleichungsmethoden allgemeine Verbreitung gewonnen. In beiden diesen Fällen ist das Resultat der Ausgleichung keine analytische Funktion. Im Falle einer mechanischen Ausgleichung wird die ausgeglichene Funktion sogar nur für die ursprünglich gegebenen Argumente definiert. Wünscht man den Wert der Funktion für irgend ein anderes Argument zu erhalten, wird auf die gewöhnlichen Interpolationsformeln verwiesen; es muss aber beachtet werden, dass diese unter den genannten Umständen keine Approximation liefern — es giebt ja nichts, wozu man approximieren könnte! — sondern gewissermassen zur *Definition* der Funktion an den nicht definierten Stellen dienen. Daran klebt aber der Mangel, dass diese Definition verschieden ausfallen kann, je nachdem man die eine oder die andere Interpolationsformel benutzt. In dem Falle der graphischen Ausgleichung liegt die Sache anscheinend anders, aber eben nur anscheinend. Hier wird die Funktion freilich durch die Zeichnung nicht nur für die gegebenen Argumente, sondern auch für alle Zwischenargumente mit der graphisch erhaltbaren Genauigkeit definiert; sobald man aber die ausgeglichene Funktion für rechnerische Zwecke verwenden will, muss man sie tabellieren, und man rechnet dann mit den Zahlen genau wie im Falle einer mechanischen Ausgleichung, ohne die Zeichnung weiter zu berücksichtigen. Auch wenn man die Zeichnung stets vor Augen

[1]) Vortrag gehalten im Verein Čechoslovakischer Aktuare am 23. Oktober 1931.

halten würde, könnte man sehr wenig damit anfangen, da eine empirisch gegebene Kurve sogar nicht eine erste Ableitung im analytischen Sinne besitzt.

Felix Klein hat erst darauf aufmerksam gemacht,[2]) wie man aus einer empirisch gegebenen Kurve eine, wie Jacobi sagt, „vernünftige" Funktion erhalten kann, dass heisst, eine Funktion mit einer gegebenen Anzahl von Ableitungen und einer endlichen Anzahl von Maxima und Minima. Er fasst seine Betrachtungen in folgender Weise zusammen:

„Um eine zweimal differenzierbare vernünftige Funktion so zu bestimmen, dass sie nicht bloss die Ordinate einer vorgelegten empirischen Kurve, sondern auch die Richtung der Kurve und die Krümmung innerhalb der jeweils gegebenen Genauigkeitsgrenzen darstellt, konstruiert man zu der gegebenen Kurve die erste und zweite abgeleitete Kurve, so genau dies in empirischen Gebiet möglich ist, ersetzt die zweite abgeleitete Kurve durch ein geradliniges Polygon und definiert dadurch eine Funktion $f_2(x)$, welche zweimal integriert die gesuchte Approximationsfunktion $f(x)$ ergibt."

Dieser geometrisch eingekleidete Gedanke lässt sich natürlich ohne weiteres auf den Fall überführen, wo die empirische Funktion nicht durch eine Zeichnung sondern in tabellarischer Form gegeben ist. Eine Anwendung auf bevölkerungsstatistische Probleme ist von dem dänischen Statistiker H. C. Nybölle[3]) gemacht worden, der auch das für die numerische Behandlungsweise nötige Formelapparat bespricht. Herr Nybölle hat jedoch nicht ausschliesslich die versicherungstechnischen Anwendungen vor Augen, und es scheint mir nützlich, die Theorie speziell nach dieser Seite hin weiter auszubauen, indem ich eine Anwendung auf die letzte grosse Sterblichkeitsuntersuchung deutscher Lebensversicherungsgesellschaften mache. Dabei ziehe ich vor, die Theorie *ab ovo* darzustellen, indem ich alles auslasse, was nicht für meinen Zweck nötig ist, und mir auch in anderen Rücksichten freie Hände vorbehalte. Der Unterschied, Herrn Nybölle gegenüber, ist jedoch nicht von prinzipiellem Belang. Den von ihm vorgeschlagenen Ausdruck „pseudo-analytische Ausgleichung" behalte ich bei.

2. Wir denken uns die empirische oder „beobachtete" Funktion in tabellarischer Form gegeben und stellen uns die Aufgabe, die Beobachtungen mit genügender Genauigkeit durch eine Funktion darzustellen, welche zwar nicht analytisch ist, sondern mit den analytischen Funktionen gemeinsam hat, dass sie nicht nur an den gegebenen Stellen sondern auch für alle Zwischenargumente definiert ist, und dass sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches eine kontinuirliche Ableitung einer

---

[2]) Felix Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, III. (3. Auflage), p. 52.

[3]) H. C. Nybölle: Interpolation in Statistics. Nordic Statistical Journal, vol. I, pp. 103—136.

gegebenen endlichen Ordnung besitzt. Eine solche Funktion soll *pseudo-analytisch* heissen. Diese Funktionsklasse ist deshalb wichtig, weil es eben diese Art von Funktionen ist, mit welcher sich die Theorie der Interpolation beschäftigt. Denn das Restglied der meisten Interpolationsformeln enthält eben die Ableitung einer gewissen Ordnung, und die Existenz weiterer Ableitungen wird nicht vorausgesetzt.

Das Prinzip der Methode der pseudo-analytischen Ausgleichung ist jetzt das folgende. Wird verlangt, das die ausgeglichene Funktion $f(x)$ eine kontinuirliche Ableitung der Ordnung n besitzt, muss man sich zunächst eine Reihe von Zahlen verschaffen, welche als beobachtete Werte von $f^{(n)}(x)$ gelten können. Solche Werte erhält man aus den gegebenen Werten von $f(x)$ durch eine der gewöhnlichen Formeln für numerische Differentiation. Natürlich gelangt man dabei am schnellsten zu einem brauchbaren Resultat, wenn die gegebenen Werte von $f(x)$ nicht ganz rohe Beobachtungen sind, sondern schon einer vorläufigen, z. B. graphischen oder mechanischen, Ausgleichung unterworfen worden sind.

Die somit erhaltenen „beobachteten" Werte von $f^{(n)}(x)$ werden selbst unter den günstigsten Verhältnissen selten ganz glatt verlaufen, und müssen daher ausgeglichen werden, wobei jedoch keine grosse Genauigkeit erforderlich ist. Bisweilen kann man sich sogar mit ganz schätzungsweise bemessenen Korrektionen begnügen, durch welche die Differenzen $\Delta f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x+1) - f^{(n)}(x)$ einen einigermassen regelmässigen Verlauf erhalten.

Man kennt jetzt $f^{(n)}(x)$ an den aufgegebenen Stellen, und als Wert von $f^{(n)}(x)$ an irgend einer anderen Stelle wird das Resultat der linearen Interpolation zwischen zwei Nachbarstellen angenommen. Hierdurch ist $f^{(n)}(x)$ vollständig festgelegt als *eine kontinuirliche Funktion, welche streckenweise linear verläuft.*

Durch Integration von $f^{(n)}(x)$, welche wegen des streckenweise linearen Verlaufes leicht zu bewerkstellen ist, erhält man jetzt $f^{(n-1)}(x)$, welche streckenweise ein Polynom zweiten Grades ist; aus dieser Funktion wiederum $f^{(n-2)}(x)$, welche streckenweise von dem dritten Grade ist, und so weiter, bis schliesslich $f(x)$, welche streckenweise von dem Grade $n+1$ ist.

Durch alle diese Integrationen hat man indessen ein willkürliches Polynom vom Grade $n-1$ eingeführt. Man kann die Konstanten dieses Polynoms z. B. durch die Methode der kleinsten Quadrate ermitteln; wird dabei von den Gewichten abgesehen, ist diese Methode, weil es sich um ein Polynom handelt, mit der Momentenmethode identisch. Unter gewissen Umständen kann man, wie unten gezeigt wird, sogar das Polynom gänzlich auslassen.

3. Wir werden jetzt das Formelapparat darstellen, welches zur Anwendung kommt, wenn verlangt wird, dass die ausgeglichene Funktion eine kontinuirliche Ableitung *der zweiten Ordnung* hat.

Wir bezeichnen die empirischen Funktionswerte durch u_x und die pseudo-analytisch ausgeglichenen durch y_x. Der Einfachheit halber werden wir noch annehmen, dass die Werte u_x schon einer vorläufigen, z. B. graphischen oder mechanischen, Behandlung unterworfen worden sind, so dass die zweite zentrale Differenz $\delta^2 u_x = u_{x+1} - 2u_x + u_{x-1}$ einen einigermassen regelmässigen Verlauf hat. Man darf an den meisten Stellen einer analytisch ausgeglichenen Sterblichkeitstafel die zweite zentrale Differenz als eine Annäherung an die zweite Ableitung betrachten, und wir werden demnach $\delta^2 u_x$ als *den beobachteten Wert von* y''_x auffassen. Irgendwelche Bedenken, welche aus der Vernachlässigung des Restgliedes entstehen könnten, müssen — wie immer bei Ausgleichungsfragen — am Schluss der Rechnung durch Vergleich der ausgeglichenen und beobachteten Werte beseitigt werden.

Wir setzen demnach für alle *ganze* x

$$y''_x = \delta^2 u_x \tag{1}$$

und für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$

$$y''_{x+\vartheta} = y''_x + \vartheta \Delta y''_x. \tag{2}$$

Hierdurch ist y'' für alle Argumente als keine kontinuirliche, streckenweise lineare, Funktion festgelegt.

Wir werden in der Folge immer voraussetzen, dass x ganz ist, und $0 \leqq \vartheta \leqq 1$.

Integriert man jetzt (2) mit Bezug auf ϑ, erhält man

$$y'_{x+\vartheta} = y'_x + \vartheta y''_x + \tfrac{1}{2} \vartheta^2 \Delta y''_x \tag{3}$$

und hieraus durch eine neue Integration

$$y_{x+\vartheta} = y_x + \vartheta y'_x + \tfrac{1}{2} \vartheta^2 y''_x + \tfrac{1}{6} \vartheta^3 \Delta y''_x. \tag{4}$$

Aus diesen zwei Gleichungen erhält man, wenn man $\vartheta = 1$ setzt

$$y'_{x+1} = y'_x + y''_x + \tfrac{1}{2} \Delta y''_x \tag{5}$$

$$y_{x+1} = y_x + y'_x + \tfrac{1}{2} y''_x + \tfrac{1}{6} \Delta y''_x. \tag{6}$$

Erinnert man sich, das $y''_x = \Delta^2 u_{x-1}$, so erhält man aus (5) durch Summation, indem A eine willkürliche Konstante bedeutet,

$$y'_x = \Delta u_{x-1} + \tfrac{1}{2} y''_x + A; \tag{7}$$

es ist auch ohne weiteres ersichtlich, das dieser Ausdruck (5) befriediget.

Führt man den Ausdruck (7) in (6) hinein, erhält man unter Berücksichtigung davon, dass $\Delta u_{x-1} + y''_x = \Delta u_{x-1} + \Delta^2 u_{x-1} = \Delta u_x$,

$$y_{x+1} = y_x + \Delta u_x + \tfrac{1}{6} \Delta y''_x + A$$

und hieraus durch Summation, indem B eine neue Integrationskonstante bedeutet,

$$y_x = u_x + \tfrac{1}{6} y''_x + Ax + B. \tag{8}$$

Wenn die Konstanten A und B bestimmt worden sind, ist das Problem erledigt; denn für ganze Werte des Argumentes erhält man y'', y' und y beziehungsweise aus (1), (7) und (8), und für alle Zwischenwerte aus (2), (3) und (4).

4. Um die Konstanten A und B durch die Momentenmethode zu bestimmen verlangt man, dass die erste und zweite Summe der Differenz $y_x - u_x$ verschwindet, indem über alle diejenigen Werte von x, für welche sowohl y_x als auch u_x vorhanden sind, summiert wird. Da y''_x oder $\Delta^2 u_{x-1}$ bei der Berechnung von y_x durch (8) benutzt wird, muss man daher bei der Berechnung von A und B den ersten und den letzten der gegebenen Werte von u_x auslassen.

Bezeichnet man jetzt die Operation $\sum\limits_{\alpha}^{x}$ durch S, so dass $S\Delta f(x) = f(x+1) - f(\alpha)$, und schreibt man (8) in der Form

$$y_x - u_x = \tfrac{1}{6}\Delta^2 u_{x-1} + Ax + B,$$

erhält man ohne Schwierigkeit die zwei Gleichungen

$$S(y_x - u_x) = \tfrac{1}{6}(\Delta u_x - \Delta u_{\alpha-1}) + A\left[\binom{x+1}{2} - \binom{\alpha}{2}\right] + B(x - \alpha + 1), \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} S^2(y_x - u_x) = \tfrac{1}{6}(u_{x+1} - u_\alpha) + A\left[\binom{x+2}{3} - \binom{\alpha+1}{3}\right] + \\ + B\binom{x-\alpha+2}{2} - \left[\tfrac{1}{6}\Delta u_{\alpha-1} + A\binom{\alpha}{2}\right](x-\alpha+1). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Es sei α das erste und β das letzte Argument, für welche sowohl y_x als u_x vorhanden sind; dann soll man in (9) und (10) $x = \beta$ setzen, wodurch die linken Seiten zum Verschwinden gebracht werden sollen. Man erhält sodann zur Bestimmung von A und B die zwei Gleichungen

$$\left[\binom{\beta+1}{2} - \binom{\alpha}{2}\right]A + (\beta + 1 - \alpha)B = \tfrac{1}{6}(\Delta u_{\alpha-1} - \Delta u_\beta), \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} \left[\binom{\beta+2}{3} - \binom{\alpha+1}{3} - (\beta+1-\alpha)\binom{\alpha}{2}\right]A + \binom{\beta+2-\alpha}{2}B = \\ = \tfrac{1}{6}[u_\alpha - u_{\beta+1} + (\beta+1-\alpha)\Delta u_{\alpha-1}]. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Durch Lösung dieser Gleichungen erhält man nach Reduktion

$$A = \frac{2(u_\beta - u_\alpha) - (\beta - \alpha)(\Delta u_\beta + \Delta u_{\alpha-1})}{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)(\beta-\alpha+2)}, \tag{13}$$

$$B = \frac{(\beta-\alpha)[(\beta+2\alpha-1)\Delta u_\beta + (2\beta+\alpha+1)\Delta u_{\alpha-1}] - 3(\beta+\alpha)(u_\beta - u_\alpha)}{3(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)(\beta-\alpha+2)} \tag{14}$$

Die Bestimmung von A und B durch diese Methode kann in solchen Fällen empfohlen werden, wo der Verlauf von y''_x einigermassen linear ist, z. B. wenn es sich darum handelt, eine kürzere Strecke einer Sterblichkeitstafel auszugleichen. Handelt es sich dagegen darum, die Funktion l_x von den frühen Jahren aus- bis ins Greisenalter auszugleichen, kann man sinnlose Resultate erhalten, wie z. B. negative Werte von l_x in den höchsten Altern. In solchen Fällen tut man besser, A und B so zu bestimmen, dass die ausgeglichenen Werte von l_α und l_β mit den beobachteten übereinstimmen, das heisst, durch die Gleichungen $y_\alpha = u_\alpha$ und $y_\beta = u_\beta$. In diesem Falle erhält man aus (8)

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{6}\, y''_\alpha + A\alpha + B = 0, \\ \tfrac{1}{6}\, y''_\beta + A\beta + B = 0, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

woraus

$$A = \frac{y''_\alpha - y''_\beta}{6\,(\beta - \alpha)}, \quad B = \frac{\alpha y''_\beta - \beta y''_\alpha}{6\,(\beta - \alpha)}. \tag{16}$$

Noch einfacher gestaltet sich die Sache, wenn man annehmen darf, dass y_x und y''_x für $x \to \infty$ verschwinden; in diesem Falle folgt aus (8) $A = 0$, $B = 0$, und man erhält statt (7) und (8)

$$y'_x = \Delta u_{x-1} + \tfrac{1}{2}\, y''_x, \tag{17}$$

$$y_x = u_x + \tfrac{1}{6}\, y''_x. \tag{18}$$

Es sei z. B. $y_x = l_x$; dann ist bekanntlich $l_\infty = 0$. Was l''_x betrifft, so riskiert man wenig bei der Annahme, dass auch $l''_\infty = 0$; denn dies ist der Fall bei allen analytischen Darstellungen von l_x, welche sich brauchbar erwiesen haben. Man wird daher, wenn es sich um eine Ausgleichung von l_x handelt, gewöhnlich (17) und (18) benutzen können; natürlich wird aber erst der Vergleich mit den Erfahrungen endgültig entscheiden können, ob die Benutzung berechtigt gewesen ist.

5. Wenn man eine Sterblichkeitstafel für Lebensversicherungszwecke pseudo-analytisch ausgleichen will, ist es von wesentlicher Bedeutung, welche Funktion ausgeglichen wird, insbesondere, wenn nur die Existenz der zweiten Ableitung gefordert wird. Unter diesen Umständen verlieren nämlich alle Approximationsformeln, deren Restglied eine dritte oder höhere Ableitung enthalten, ihre Begründung; auf der anderen Seite ist es aber möglich durch passende Wahl der auszugleichenden Funktion zu erreichen, dass die wichtigsten der in der Lebensversicherungsmatematik auftretenden Näherungsformeln durch *exacte*, und dennoch zur Berechnung geeignete, Ausdrücke ersetzt werden. Dies gilt im besonderen, wenn man die Tafel der Überlebenden l_x der Ausgleichung zu Grunde legt. Wir werden dies in Einzelheiten dartun.

Es sei daher $y_x = l_x$ pseudo-analytisch ausgeglichen in der oben geschilderten Weise; man besitzt dann in tabellarischer Form l_x, l'_x,

l''_x und $\Delta l''_x$ für ganze x; und für nicht-ganze Argumente hat man zufolge (4), (3) und (2)

$$l_{x+\vartheta} = l_x + \vartheta l'_x + \tfrac{1}{2}\vartheta^2 l''_x + \tfrac{1}{6}\vartheta^3 \Delta l''_x, \tag{19}$$

$$l'_{x+\vartheta} = l'_x + \vartheta l''_x + \tfrac{1}{2}\vartheta^2 \Delta l''_x, \tag{20}$$

$$l''_{x+\vartheta} = l''_x + \vartheta \Delta l''_x. \tag{21}$$

Für die Sterbeintensität kann man die exacten Formeln

$$\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x}, \quad \mu_{x+\vartheta} = -\frac{l'_{x+\vartheta}}{l_{x+\vartheta}} \tag{22}$$

unmittelbar benutzen.

Für die Funktion $L_x = \int\limits_0^1 l_{x+\vartheta}\, d\vartheta$ hat man durch (19)

$$L_x = l_x + \tfrac{1}{2} l'_x + \tfrac{1}{6} l''_x + \tfrac{1}{24} \Delta l''_x, \tag{23}$$

und man kann daher die Funktionen

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}, \qquad \overline{e}_{x\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \sum_x^{x+n-1} L_x \tag{24}$$

exact, dass heisst ohne andere Fehler als Abrundungsfehler, berechnen. Man kann sogar $\overline{e}_{x\overline{n}|}$ in dem Falle, wo n keine ganze Zahl ist, exact berechnen, indem nach (19)

$$\int\limits_0^\vartheta l_{x+\vartheta}\, d\vartheta = \vartheta l_x + \tfrac{1}{2}\vartheta^2 l'_x + \tfrac{1}{6}\vartheta^3 l''_x + \tfrac{1}{24}\vartheta^4 \Delta l''_x. \tag{25}$$

6. Wenden wir uns jetzt zu den Funktionen, welche von dem Zinsfusse abhängig sind, so setzt man bequem

$$\overset{(m)}{D}_x = \frac{1}{m}\sum_{\nu=0}^{m-1} D_{x+\frac{\nu}{m}}; \tag{26}$$

die Funktion $\overset{(m)}{D}_x$ darf natürlich nicht mit der m^{ten} Ableitung $D_x^{(m)}$ verwechselt werden.

Es folgt jetzt durch (19)

$$\overset{(m)}{D}_x = \frac{1}{m}\sum_{\nu=0}^{m-1} v^{x+\frac{\nu}{m}} \left[l_x + \frac{\nu}{m} l'_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{m}\right)^2 l''_x + \frac{1}{6}\left(\frac{\nu}{m}\right)^3 \Delta l''_x\right]$$

oder, wenn man die Bezeichnung

$$\overset{(m)}{c}_s = \frac{1}{s!\, m}\sum_{\nu=0}^{m-1} v^{\frac{\nu}{m}} \left(\frac{\nu}{m}\right)^s \tag{27}$$

einführt, wo $(\nu/m)^s$ für $s = 0$ den Wert 1 auch für $\nu = 0$ behält,

$$\overset{(m)}{D}_x = v^x\,(\overset{(m)}{c}_0 l_x + \overset{(m)}{c}_1 l'_x + \overset{(m)}{c}_2 l''_x + \overset{(m)}{c}_3\,\Delta l''_x). \tag{28}$$

Die Koeffizienten $\overset{(m)}{c}_s$ können als bekannt betrachtet werden; über ihre Berechnung wird unten gesprochen. Führt man endlich die neuen Bezeichnungen

$$\Lambda_x^{\mathrm{I}} = \sum_x^{\infty} v^x\, l'_x, \qquad \Lambda_x^{\mathrm{II}} = \sum_x^{\infty} v^x\, l''_x, \qquad \Lambda_x^{\mathrm{III}} = \sum_x^{\infty} v^x\, \Delta l''_x \tag{29}$$

ein, so erhält man aus (28) durch Summation von x bis ∞ (oder bis zum höchsten Alter, mit welchem man, in Betracht des erforderten Genauigkeitsgrades, es nötig erachtet, Rechnung zu halten)

$$\overset{(m)}{\mathrm{N}}_x = \overset{(m)}{c}_0\,\mathrm{N}_x + \overset{(m)}{c}_1\,\Lambda_x^{\mathrm{I}} + \overset{(m)}{c}_2\,\Lambda_x^{\mathrm{II}} + \overset{(m)}{c}_3\,\Lambda_x^{\mathrm{III}}. \tag{30}$$

Um bequem $\overset{(m)}{\mathrm{N}}_x$, und folglich $\overset{(m)}{\mathrm{a}}_x$, berechnen zu können, muss man daher ausser N_x die drei Summen (29) tabellieren, erhält aber dafür exacte Ausdrücke für $\overset{(m)}{\mathrm{N}}_x$ und $\overset{(m)}{\mathrm{a}}_x$.

7. Die Koeffizienten $\overset{(m)}{c}_s$ sind von dem Zinsfuss, sondern nicht von der Sterblichkeit, abhängig und können daher für gegebene Zinsfüsse eins für allemal berechnet werden. Man kann z. B. nach Potenzen der Zinsintensität δ entwickeln, welches zu schnell konvergierenden Reihen führt. Man hat zunächst

$$v^{\frac{\nu}{m}} = e^{-\frac{\nu\delta}{m}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!}\left(-\frac{\nu\delta}{m}\right)^{\mu}.$$

Bricht man mit einem beliebigen Glied ab, hat das Restglied alternierendes Vorzeichen, woraus folgt, dass das Fehlerkriterium[1]) anwendbar ist. Der Fehler ist demnach numerisch kleiner als das erste vernachlässigte Glied und hat dasselbe Vorzeichen. Dieselbe Eigenschaft hat offenbar die Reihe, welche man aus (27) erhält, wenn man die Entwickelung von $v^{\nu/m}$ einsetzt, nämlich

$$\overset{(m)}{c}_s = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu}\, \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} \nu^{\mu+s}}{\mu!\, s!\, m^{\mu+s+1}}\, \delta^{\mu}. \tag{31}$$

Für die Praxis kommen in Betracht nur

$$\overset{(2)}{c}_s,\quad \overset{(4)}{c}_s,\quad \overset{(12)}{c}_s,\quad \overset{(52)}{c}_s, \text{ und } \overset{(\infty)}{c}_s,$$

[1]) Steffensen: Interpolation (Baltimore 1927), Art. 5. Dieses Buch wird unten als „Interpolation“ zitiert.

welchen letzteren Koefficienten wir auch mit $\overline{c}_s$ bezeichnen werden. Die Entwickelung von $\overline{c}_s$ erhält man am einfachsten aus dem aus (27) für $m \to \infty$ erhaltenen Ausdruck.

$$\overline{c}_s = \frac{1}{s!} \int_0^1 e^{-x\delta}\, x^s \, dx, \tag{32}$$

aus welchem sich ergibt

$$\overline{c}_s = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{\delta^\mu}{\mu!\, s!\, (\mu + s + 1)}. \tag{33}$$

Was die Berechnung von $\overset{(m)}{c}_s$ durch (31) betrifft, so erhält man die Summen $\sum_{\nu=0}^{m-1} \nu^{\mu+s}$ durch Bernoulli's Polynome, insofern sie nicht tabelliert sind.[1] Die Koeffizienten $\overset{(2)}{c}_s$ werden jedoch einfacher für $s > 0$ durch die aus (27) direct erhaltenen Formeln

$$\overset{(2)}{c}_1 = \tfrac{1}{2} \overset{(2)}{c}_0 - \tfrac{1}{4}, \qquad \overset{(2)}{c}_s = \frac{1}{2s} \overset{(2)}{c}_{s-1} \qquad (s > 1) \tag{34}$$

berechnet. Wir geben unten die für unseren Zweck nötigen Entwickelungen bis δ^4.

Für $\overset{(2)}{c}_s$:

$$\overset{(2)}{c}_0 = 1 - \tfrac{1}{4}\delta + \tfrac{1}{16}\delta^2 - \tfrac{1}{96}\delta^3 + \tfrac{1}{768}\delta^4 - \ldots$$

$$\overset{(2)}{c}_1 = \tfrac{1}{2}\overset{(2)}{c}_0 - \tfrac{1}{4}, \quad \overset{(2)}{c}_2 = \tfrac{1}{4}\overset{(2)}{c}_1, \quad \overset{(2)}{c}_3 = \tfrac{1}{6}\overset{(2)}{c}_2.$$

Für $\overset{(4)}{c}_s$:

$$\overset{(4)}{c}_0 = 1 - \tfrac{3}{8}\delta + \tfrac{7}{64}\delta^2 - \tfrac{3}{128}\delta^3 + \tfrac{49}{12288}\delta^4 - \ldots$$

$$\overset{(4)}{c}_1 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{7}{32}\delta + \tfrac{9}{128}\delta^2 - \tfrac{49}{3072}\delta^3 + \tfrac{23}{8192}\delta^4 - \ldots$$

$$\overset{(4)}{c}_2 = \tfrac{7}{64} - \tfrac{9}{128}\delta + \tfrac{49}{2048}\delta^2 - \tfrac{23}{4096}\delta^3 + \tfrac{397}{393216}\delta^4 - \ldots$$

$$\overset{(4)}{c}_3 = \tfrac{3}{128} - \tfrac{49}{3072}\delta + \tfrac{23}{4096}\delta^2 - \tfrac{397}{294912}\delta^3 + \tfrac{193}{786432}\delta^4 - \ldots$$

Für $\overset{(12)}{c}_s$:

$$\overset{(12)}{c}_0 = 1 - \tfrac{11}{24}\delta + \tfrac{253}{1728}\delta^2 - \tfrac{121}{3456}\delta^3 + \tfrac{19987}{2985984}\delta^4 - \ldots$$

[1]) Karl Pearson: Tables for Statisticians and Biometricians, pp. 40—41. Die Potenzen von den natürlichen Zahlen sind auf pp. 38—39 tabelliert.

$$\overset{(12)}{c_1} = \tfrac{11}{24} - \tfrac{253}{864}\delta + \tfrac{121}{1152}\delta^2 - \tfrac{19987}{746496}\delta^3 + \tfrac{31823}{5971968}\delta^4 - \dots$$

$$\overset{(12)}{c_2} = \tfrac{253}{1728} - \tfrac{121}{1152}\delta + \tfrac{19987}{497664}\delta^2 - \tfrac{31823}{2985984}\delta^3 + \tfrac{1874983}{859963392}\delta^4 - \dots$$

$$\overset{(12)}{c_3} = \tfrac{121}{3456} - \tfrac{19987}{746496}\delta + \tfrac{31823}{2985984}\delta^2 - \tfrac{1874983}{644972544}\delta^3 + \\ + \tfrac{3130633}{5159780352}\delta^4 - \dots$$

Für $\overset{(52)}{c_s}$:

$$\overset{(52)}{c_0} = 1 - \tfrac{51}{104}\delta + \tfrac{1751}{10816}\delta^2 - \tfrac{867}{21632}\delta^3 + \tfrac{2785841}{350957568}\delta^4 - \dots$$

$$\overset{(52)}{c_1} = \tfrac{51}{104} - \tfrac{1751}{5408}\delta + \tfrac{2601}{21632}\delta^2 - \tfrac{2785841}{87739392}\delta^3 + \tfrac{1532567}{233971712}\delta^4 - \dots$$

$$\overset{(52)}{c_2} = \tfrac{1751}{10816} - \tfrac{2601}{21632}\delta + \tfrac{2785841}{58492928}\delta^2 - \tfrac{1532567}{116985856}\delta^3 + \\ + \tfrac{5275852301}{1897978527744}\delta^4 - \dots$$

$$\overset{(52)}{c_3} = \tfrac{867}{21632} - \tfrac{2785841}{87739392}\delta + \tfrac{1532567}{116985856}\delta^2 - \tfrac{5275852301}{1423483895808}\delta^3 + \\ + \tfrac{3047318017}{3795957055488}\delta^4 - \dots$$

Für $\bar{c}_s$:

$$\bar{c}_0 = 1 - \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{6}\delta^2 - \tfrac{1}{24}\delta^3 + \tfrac{1}{120}\delta^4 - \dots$$

$$\bar{c}_1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\delta + \tfrac{1}{8}\delta^2 - \tfrac{1}{30}\delta^3 + \tfrac{1}{144}\delta^4 - \dots$$

$$\bar{c}_2 = \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8}\delta + \tfrac{1}{20}\delta^2 - \tfrac{1}{72}\delta^3 + \tfrac{1}{336}\delta^4 - \dots$$

$$\bar{c}_3 = \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{30}\delta + \tfrac{1}{72}\delta^2 - \tfrac{1}{252}\delta^3 + \tfrac{1}{1152}\delta^4 - \dots$$

8. Man kann die Koeffizienten $\overset{(m)}{c_s}$ auch durch Rekursion berechnen. Man erhält aus (27) durch Teilsummation, indem wir $s > 0$ annehmen, und $\Delta f(\nu) = f(\nu + 1) - f(\nu)$ schreiben,

$$\overset{(m)}{c_s} = \frac{1}{s!\, m^{s+1}\,(v^{1/m} - 1)} \sum_{\nu=0}^{m-1} \nu^s \Delta v^{\frac{\nu}{m}}$$

$$= \frac{1}{s!\, m^{s+1}\,(v^{1/m} - 1)} \left\{ \left[\nu^s v^{\frac{\nu}{m}}\right]_0^m - \sum_{\nu=0}^{m-1} v^{\frac{\nu+1}{m}} \Delta \nu^s \right\}$$

$$= \frac{1}{s!\, m^{s+1}\,(v^{1/m} - 1)} \left\{ m^s v - \sum_{\nu=0}^{m-1} v^{\frac{\nu+1}{m}} \left[(\nu + 1)^s - \nu^s\right]. \right\}$$

Es ist aber

$$(\nu + 1)^s = \nu^s + \binom{s}{1}\nu^{s-1} + \binom{s}{2}\nu^{s-2} + \dots + 1$$

und nach (27)

$$\overset{(m)}{c_0} = \frac{1}{m}\sum_{\nu=0}^{m-1} v^{\frac{\nu}{m}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1 - v}{1 - v^{1/m}}. \tag{35}$$

Man erhält daher nach leichter Rechnung die gesuchte Formel

$$\overset{(m)}{c_s} = \frac{1}{i^{(m)}}\left(\overset{(m)}{c_{s-1}} + \frac{\overset{(m)}{c_{s-2}}}{2!\,m} + \frac{\overset{(m)}{c_{s-3}}}{3!\,m^2} + \ldots + \frac{\overset{(m)}{c_0}}{s!\,m^{s-1}}\right) - \frac{\overset{(m)}{c_0}}{s!\,i}, \tag{36}$$

wo wie gebräuchlich $i^{(m)} = m\,[(1+i)^{1/m} - 1]$ gesetzt worden ist. Für $m \to \infty$ erhält man hieraus

$$\bar{c}_s = \frac{1}{\delta}\,\bar{c}_{s-1} - \frac{\bar{c}_0}{s!\,i}, \tag{37}$$

welche Formel auch in der Form

$$\bar{c}_s = \frac{1}{\delta}\left(\bar{c}_{s-1} - \frac{1}{s!\,(1+i)}\right) \tag{38}$$

geschrieben werden kann.

Für die Berechnung von dem in (36) auftretenden Faktor hat man die sehr schnell konvergierende Reihe (Interpolation, Art 142)

$$\frac{1}{i^{(m)}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{e^{\delta/m}-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!\,m^\nu}\,\delta^{\nu-1} \tag{39}$$

oder

$$\frac{1}{i^{(m)}} = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2m} + \frac{\delta}{12\,m^2} - \frac{\delta^3}{720\,m^4} + \frac{\delta^5}{30240\,m^6} - \ldots \tag{40}$$

Bricht man mit einem beliebigen Glied ab, ist der Fehler numerisch kleiner als das erste vernachlässigte Glied und hat dasselbe Vorzeichen; denn es ist

$$\frac{1}{i^{(m)}} = \frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu\delta}{m}}, \tag{41}$$

und man erhält (39) durch Summation von der Funktion $f(x) = \frac{1}{m}e^{-\frac{x\delta}{m}}$ durch die Euler'sche Summationsformel, wobei das Restglied, wie man sich leicht überzeugt, alternierendes Vorzeichen hat.

Der Ausgangswert $\overset{(m)}{c_0}$ für die Rekursionsformel (36) wird daher am einfachsten berechnet, indem man (35) auf die Form

$$\overset{(m)}{c_0} = \frac{i}{1+i}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{i^{(m)}}\right) \tag{42}$$

bringt.

Die unten mitgeteilte Tabelle über die Werte von $\overset{(m)}{c_s}$ zu 4% ($\delta =$ $= \cdot 03922071315$) wurde durch die direkten Entwickelungen berechnet und nachher durch die Rekursionsformel kontrolliert. Ausserdem hat Herr N. P. Bertelsen sowohl die Koeffizienten der Entwickelungen wie auch die Zahlenwerte der $\overset{(m)}{c_s}$ neu berechnet, und sie dürften daher als sichergestellt gelten.

Werte von $\overset{(m)}{c_s}$ zu 4%.

m	$s = 0$	1	2	3
2	·9902903	·2451452	·0612863	·0102144
4	·9854591	·3665277	·1066538	·0228205
12	·9822470	·4470085	·1423536	·0339777
52	·9810134	·4778688	·1572464	·0388541
∞	·9806435	·4871167	·1618402	·0403804

9. Wir wollen jetzt eine Anwendung der oben dargestellten Theorie auf einen konkreten Fall machen, und wählen für diesen Zweck aus den letzten Sterbetafeln der deutschen Lebensversicherungsgesellschaften[1]) die Tafel $\mathfrak{B}\,\dfrac{\text{vor } 76/05}{76/06}$ heraus. In der Folge wird diese Tafel kurz die „Vereinstafel" genannt. Unten in Tafel I. enthält die Kolonne mit Ueberschrift u_x unsere „Beobachtungen"; diese sind die schon durch einen graphisch-rechnerischen Prozess ausgeglichenen l_x der Vereinstafel, jedoch auf fünf bis sechs Ziffern abgekürzt und danach mit kleinen schätzungsmässigen Korrektionen[2]) versehen, damit die zweite Differenz $\delta^2 u_x$ einen besseren Verlauf erhalten soll. Die Kolonne, welche diese Differenz enthält, konnte dann sofort als l''_x bezeichnet werden, und die folgende als $\Delta l''_x$. Diese Operationen haben nur wenig Arbeit in Anspruch genommen, da die Vereinstafel schon ausgeglichen war; hätte es sich dagegen um ganz rohe Beobachtungen gehandelt, wäre eben die Herstellung einer Tafel mit glatt verlaufender zweiten Differenz ein wesentlicher Teil der Arbeit gewesen.

Es wurden jetzt l'_x und l_x durch die aus (17) und (18) erhaltenen Formeln

$$l'_x = \Delta u_{x-1} + \tfrac{1}{2} l''_x, \tag{43}$$

$$l_x = u_x + \tfrac{1}{6} l''_x \tag{44}$$

berechnet, und schliesslich q_x und μ_x als

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}, \qquad \mu_x = -\frac{l'_x}{l_x}. \tag{45}$$

Als Abschliessung der Ausgleichungsrechnung sollte jetzt, streng genommen, ein Vergleich zwischen den berechneten und beobachteten

[1]) Die Sterbetafeln 1926 des Vereins Deutscher Lebensversicherungs-Gesellschaften.

[2]) Diese Korrektionen betragen in keinem Falle mehr als eine Einheit der letzten Stelle. Ein Druckfehler in der Vereinstafel, wo $l_{59} = 689413$ statt 679413 steht, ist berichtigt worden.

Todesfällen folgen. Da jedoch die q_x der Vereinstafel und die pseudo-analytisch ausgeglichenen q_x sich durchgehends nur wenig von einander unterscheiden, und es sich ausserdem nur von einer Illustration zu der Metode handelt, konnte von einem solchen Vergleich abgesehen werden.

Es wurde daher sofort zu der Berechnung der diskontierten Zahlen geschritten, welche zu einem Zinsfusse von 4% in der Tafel II. wiedergegeben sind. Die Funktionen D_x und N_x wurden in gewöhnlicher Weise, die Funktionen Λ_x^{I}, Λ_x^{II} und Λ_x^{III} durch (29) berechnet. Da diese Tafeln für theoretisch-experimentelle Zwecke nützlich sein können, sind sie mit mehr Stellen angeführt worden, wie für die Praxis nötig sind. Für die Praxis genügt es bekanntlich D_x mit fünf und N_x mit sechs bedeutenden[1]) Ziffern anzuführen. Was die Λ-Funktionen betrifft, so würde es (mit der Ausnahme von den höchsten Altern) genügen, Λ_x^{I} mit vier bis fünf, und Λ_x^{II} mit zwei bis drei bedeutenden Ziffern anzugeben, während Λ_x^{III} in den meisten Altern vernachlässigt werden kann.

10. Zum Schluss wollen wir noch zusammenfassend bemerken, dass die pseudo-analytische Ausgleichung, wie wir gesehen haben, nicht zu den schwerwiegenden Einwänden wie die mechanischen und graphischen Ausgleichungsmethoden Anlass giebt, indem sie zu einer eindeutig definierten Funktion mit ganz bestimmten Eigenschaften führt. Es kann also, wenigstens *im Prinzip*, von der Anwendung von *Approximationsformeln* die Rede sein. Freilich klebt daran der Uebelstand, dass man in der Praxis sich gewöhnlich mit der Herstellung einer Funktion, welche eine kontinuirliche Ableitung *zweiter* Ordnung besitzt, begnügen muss, da die Rechnungsarbeit sonst zu gross wird; und dies genügt zur Begründung der Mehrzahl der gewöhnlichen Approximationsmethoden nicht. Dafür hat aber die pseudo-analytische Ausgleichung ihre eigene Approximationsmethode, welche auf der Formel (4) füsst. Diese Formel liefert sogar nicht nur angenäherte, sondern genaue Werte, wenn man alle Glieder berücksichtigt. Zu beanstanden bleibt, dass es eine unnatürliche Annahme ist, dass die Ableitung zweiter Ordnung streckenweise linear verlaufen soll. Auch kann bemerkt werden, dass die pseudo-analytische Augleichung mit den mechanischen Ausgleichungsmethoden gemeinsam hat, dass sie systematische Abweichungen von den Beobachtungen einführt, indem y_x durch ständige Addition von $\frac{1}{6}\,y''_x$ zu u_x erhalten wird. Die Wirkung dieser Abweichungen wird jedoch erst gegen das Ende des Lebens, wo die Beobachtungen unsicher sind, fühlbar.

Wenn man demnach immer dem Ideal zustreben muss, eine analytische Funktion zu finden, welche die Beobachtungen mit genügender Genauigkeit zu wiedergeben im Stande ist, so muss es doch zugegeben werden, dass es Fälle giebt, wo man dieses nicht vermag, und in solchen Fällen bietet die pseudo-analytische Ausgleichung ein sehr brauchbares Surrogat dar.

---

[1]) Die „bedeutenden" Ziffern fangen mit der ersten von Null verschiedenen Ziffer an.

TAFEL I.

x	u_x	Δ	l''_x	$\Delta l''_x$	l_x	l'_x	q_x	μ_x
15	101668	— 339			—	—	—	—
16	101329	— 336	3	0	101329.50	— 337.5	.003316	.003331
17	100993	— 333	3	—1	100993.50	— 334.5	3299	3312
18	100660	— 331	2	0	100660.33	— 332.0	3288	3298
19	100329	— 329	2	0	100329.33	— 330.0	3279	3289
20	100000	— 327	2	—1	100000.33	— 328.0	3272	3280
21	99673	— 326	1	—1	99673.17	— 326.5	3272	3276
22	99347	— 326	0	0	99347.00	— 326.0	3281	3281
23	99021	— 326	0	—1	99021.00	— 326.0	3294	3292
24	98695	— 327	— 1	0	98694.83	— 326.5	3313	3308
25	98368	— 328	— 1	—1	98367.83	— 327.5	3336	3329
26	98040	— 330	— 2	—1	98039.67	— 329.0	3368	3356
27	97710	— 333	— 3	—2	97709.50	— 331.5	3411	3393
28	97377	— 338	— 5	—3	97376.17	— 335.5	3476	3445
29	97039	— 346	— 8	—3	97037.67	— 342.0	3571	3524
30	96693	— 357	— 11	—4	96691.17	— 351.5	3699	3635
31	96336	— 372	— 15	—6	96333.50	— 364.5	3872	3784
32	95964	— 393	— 21	—6	95960.50	— 382.5	4106	3986
33	95571	— 420	— 27	—5	95566.50	— 406.5	4404	4254
34	95151	— 452	— 32	—5	95145.67	— 436.0	4759	4582
35	94699	— 489	— 37	—4	94692.83	— 470.5	5171	4969
36	94210	— 530	— 41	0	94203.17	— 509.5	5626	5409
37	93680	— 571	— 41	—1	93673.17	— 550.5	6097	5877
38	93109	— 613	— 42	0	93102.00	— 592.0	6584	6359
39	92496	— 655	— 42	0	92489.00	— 634.0	7082	6855
40	91841	— 697	— 42	0	91834.00	— 676.0	7590	7361
41	91144	— 739	— 42	—1	91137.00	— 718.0	8111	7878
42	90405	— 782	— 43	—2	90397.83	— 760.5	8654	8413
43	89623	— 827	— 45	—4	89615.50	— 804.5	9236	8977
44	88796	— 876	— 49	—8	88787.83	— 851.5	9881	9590
45	87920	— 933	— 57	—5	87910.50	— 904.5	.010623	.010289
46	86987	— 995	— 62	—4	86976.67	— 964.0	11448	11083
47	85992	—1061	— 66	—5	85981.00	—1028.0	12350	11956
48	84931	—1132	— 71	—3	84919.17	—1096.5	13336	12912
49	83799	—1206	— 74	—2	83786.67	—1169.0	14398	13952
50	82593	—1282	— 76	—2	82580.33	—1244.0	15528	15064
51	81311	—1360	— 78	—4	81298.00	—1321.0	16737	16249
52	79951	—1442	— 82	—3	79937.33	—1401.0	18045	17526
53	78509	—1527	— 85	—4	78494.83	—1484.5	19462	18912
54	76982	—1616	— 89	—4	76967.17	—1571.5	21005	20418
55	75366	—1709	— 93	—3	75350.50	—1662.5	22687	22064
56	73657	—1805	— 96	—4	73641.00	—1757.0	24520	23859
57	71852	—1905	—100	—1	71835.33	—1855.0	26521	25823

TAFEL I. (Fortsetzung).

x	u_x	Δ	l''_x	$\Delta l''_x$	l_x	l'_x	q_x	μ_x
58	69947	—2006	—101	— 2	69930.17	—1955.5	.028691	.027964
59	67941	—2109	—103	— 2	67923.83	—2057.5	31054	30291
60	65832	—2214	—105	1	65814.50	—2161.5	33637	32842
61	63618	—2318	—104	4	63600.67	—2266.0	36436	35629
62	61300	—2418	—100	10	61283.33	—2368.0	39429	38640
63	58882	—2508	— 90	13	58867.00	—2463.0	42568	41840
64	56374	—2585	— 77	15	56361.17	—2546.5	45821	45182
65	53789	—2647	— 62	9	53778.67	—2616.0	49192	48644
66	51142	—2700	— 53	7	51133.17	—2673.5	52781	52285
67	48442	—2746	— 46	2	48434.33	—2723.0	56688	56220
68	45696	—2790	— 44	2	45688.67	—2768.0	61058	60584
69	42906	—2832	— 42	5	42899.00	—2811.0	65996	65526
70	40074	—2869	— 37	16	40067.83	—2850.5	71537	71142
71	37205	—2890	— 21	26	37201.50	—2879.5	77569	77403
72	34315	—2885	5	31.5	34315.83	—2887.5	83919	84145
73	31430	—2848.5	36.5	21.9	31436.08	—2866.75	90496	91193
74	28581.5	—2790.1	58.4	21.0	28591.23	—2819.30	97463	98607
75	25791.4	—2710.7	79.4	19.0	25804.63	—2750.40	.104924	.106586
76	23080.7	—2612.3	98.4	18.2	23097.10	—2661.50	112970	115231
77	20468.4	—2495.7	116.6	17.8	20487.83	—2554.00	121669	124660
78	17972.7	—2361.3	134.4	17.0	17995.10	—2428.50	131062	134953
79	15611.4	—2209.9	151.4	14.5	15636.63	—2285.60	141174	146170
80	13401.5	—2044.0	165.9	11.5	13429.15	—2126.95	152063	158383
81	11357.5	—1866.6	177.4	9.7	11387.07	—1955.30	163781	171712
82	9490.9	—1679.5	187.1	6.5	9522.08	—1773.05	176265	186204
83	7811.4	—1485.9	193.6	0.8	7843.67	—1582.70	189423	201781
84	6325.5	—1291.5	194.4	— 5.1	6357.90	—1388.70	203267	218421
85	5034.0	—1102.2	189.3	— 9.4	5065.55	—1196.85	217897	236272
86	3931.8	— 922.3	179.9	—13.02	3961.78	—1012.25	233347	255504
87	3009.5	— 755.42	166.88	—16.32	3037.31	— 838.860	249608	276185
88	2254.08	— 604.86	150.56	—18.22	2279.173	— 680.140	266718	298415
89	1649.22	— 472.52	132.34	—19.28	1671.277	— 538.690	284653	322322
90	1176.70	— 359.46	113.06	—19.41	1195.543	— 415.990	303373	347951
91	817.24	— 265.81	93.65	—20.30	832.848	— 312.635	323220	375381
92	551.43	— 192.46	73.35	—16.18	563.655	— 229.135	346235	406516
93	358.97	— 135.29	57.17	—13.401	368.498	— 163.875	373199	444711
94	223.68	— 91.521	43.769	—11.221	230.975	— 113.4055	404335	490986
95	132.159	— 58.973	32.548	— 9.509	137.5837	— 75.2470	440153	546918
96	73.186	— 35.934	23.039	— 7.622	77.0258	— 47.4535	483011	616073
97	37.252	— 20.517	15.417	— 5.380	39.8215	— 28.2255	537742	708801
98	16.735	— 10.480	10.037	— 4.211	18.4078	— 15.4985	607449	841953
99	6.255	— 4.654	5.826		7.2260	— 7.5670	—	1.047191
100	1.601				—	—		

TAFEL II.

x	D_x	N_x	Δ_x^{I}	Δ_x^{II}	Δ_x^{III}
16	54100.65	1138375.61	—10611.77	—231.87	—10.80
17	51847.36	1084274.96	—10431.58	—233.47	—10.80
18	49688.77	1032427.60	—10259.86	—235.01	—10.29
19	47620.56	982738.83	—10095.98	—236.00	—10.29
20	45638.85	935118.27	— 9939.35	—236.95	—10.29
21	43739.94	889479.42	— 9789.66	—237.86	— 9.83
22	41920.00	845739.48	— 9646.38	—238.29	— 9.40
23	40175.43	803819.48	— 9508.82	—238.29	— 9.40
24	38502.97	763644.05	— 9376.55	—238.29	— 8.99
25	36899.42	725141.08	— 9249.18	—237.90	— 8.99
26	35361.85	688241.66	— 9126.33	—237.52	— 8.61
27	33887.27	652879.81	— 9007.66	—236.80	— 8.25
28	32472.76	618992.54	— 8892.69	—235.76	— 7.56
29	31115.26	586519.78	— 8780.81	—234.09	— 6.56
30	29811.69	555404.52	— 8671.15	—231.52	— 5.60
31	28559.06	525592.83	— 8562.78	—228.13	— 4.37
32	27354.30	497033.77	— 8454.72	—223.68	— 2.59
33	26194.22	469679.47	— 8345.69	—217.69	— .88
34	25075.84	443485.25	— 8234.27	—210.29	.49
35	23996.63	418409.41	— 8119.36	—201.86	1.81
36	22954.36	394412.78	— 8000.13	—192.48	2.82
37	21947.33	371458.42	— 7875.98	—182.49	2.82
38	20974.52	349511.09	— 7747.00	—172.88	3.05
39	20035.02	328536.57	— 7613.63	—163.42	3.05
40	19128.02	308501.55	— 7476.29	—154.32	3.05
41	18252.73	289373.53	— 7335.49	—145.57	3.05
42	17408.36	271120.80	— 7191.69	—137.16	3.25
43	16593.94	253712.44	— 7045.24	—128.88	3.64
44	15808.35	237118.50	— 6896.27	—120.55	4.38
45	15050.14	221310.15	— 6744.66	—111.83	5.80
46	14317.57	206260.01	— 6589.81	—102.07	6.66
47	13609.29	191942.44	— 6431.12	— 91.86	7.32
48	12924.26	178333.15	— 6268.41	— 81.41	8.11
49	12261.44	165408.89	— 6101.53	— 70.60	8.57
50	11620.10	153147.45	— 5930.46	— 59.77	8.86
51	10999.67	141527.35	— 5755.41	— 49.08	9.14
52	10399.58	130527.68	— 5576.68	— 38.53	9.68
53	9819.15	120128.10	— 5394.41	— 27.86	10.07
54	9257.74	110308.95	— 5208.71	— 17.23	10.57
55	8714.70	101051.21	— 5019.69	— 6.52	11.05
56	8189.41	92336.51	— 4827.41	4.24	11.40
57	7681.36	84147.10	— 4632.02	14.92	11.84

TAFEL II. (Fortsetzung)

x	D_x	N_x	A_x^{I}	A_x^{II}	A_x^{III}
58	7190.03	76465.74	—4433.66	25.61	11.95
59	6715.14	69275.71	—4232.60	35.99	12.16
60	6256.36	62560.57	—4029.19	46.17	12.36
61	5813.37	56304.21	—3823.72	56.15	12.26
62	5386.11	50490.84	—3616.60	65.66	11.89
63	4974.75	45104.73	—3408.48	74.45	11.01
64	4579.79	40129.98	—3200.34	82.06	9.91
65	4201.87	35550.19	—2993.42	88.32	8.69
66	3841.51	31348.32	—2789.02	93.16	7.99
67	3498.81	27506.81	—2588.17	97.14	7.46
68	3173.52	24008.00	—2391.47	100.46	7.32
69	2865.15	20834.48	—2199.21	103.52	7.18
70	2573.13	17969.33	—2011.47	106.33	6.85
71	2297.17	15396.20	—1828.41	108.71	5.82
72	2037.48	13099.03	—1650.60	110.01	4.21
73	1794.71	11061.55	—1479.16	109.71	2.34
74	1569.51	9266.84	—1315.49	107.63	1.09
75	1362.06	7697.33	—1160.72	104.42	— .06
76	1172.26	6335.27	—1015.54	100.23	— 1.06
77	999.84	5163.01	— 880.46	95.24	— 1.98
78	844.41	4163.17	— 755.82	89.55	— 2.85
79	705.52	3318.76	— 641.86	83.24	— 3.65
80	582.62	2613.24	— 538.73	76.41	— 4.30
81	475.020	2030.618	— 446.445	69.211	— 4.802
82	381.943	1555.598	— 364.878	61.811	— 5.207
83	302.519	1173.655	— 293.759	54.306	— 5.468
84	235.783	871.136	— 232.717	46.839	— 5.499
85	180.631	635.353	— 181.217	39.630	— 5.310
86	135.839	454.722	— 138.539	32.880	— 4.975
87	100.136	318.883	— 103.832	26.712	— 4.529
88	72.251	218.747	— 76.176	21.210	— 3.991
89	50.943	146.496	— 54.615	16.437	— 3.413
90	35.0401	95.5527	— 38.1953	12.4028	— 2.8254
91	23.4710	60.5126	— 26.0031	9.0891	— 2.2565
92	15.2738	37.0416	— 17.1925	6.4499	— 1.6844
93	9.6014	21.7678	— 10.9835	4.4623	— 1.2460
94	5.7867	12.1664	— 6.7137	2.9727	— .8968
95	3.3144	6.3797	— 3.8725	1.8761	— .6157
96	1.7842	3.0653	— 2.0598	1.0920	— .3866
97	.88692	1.28114	— .96056	.55832	— .21001
98	.39422	.39422	— .33191	.21495	— .09018