Karl Goldziher

Beiträge zur Theorie der Vermehrungsformeln

*Aktuárské vědy*, Vol. 2 (1931), No. 1, 1–10

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144534

# Beiträge zur Theorie der Vermehrungsformeln.

Von Dr. *Karl Goldziher* in Budapest.

## 1. Einleitung.

Die einfachsten Vermehrungsansätze der wirtschaftlichen Mathematik sind die in der täglichen Praxis eingebürgerten Formeln für die zinslichen Kapitalsvermehrungen; die gestaltliche Einfachheit dieser Ansätze kann darin erblickt werden, dass die einzelnen Formeln als die einfachsten *Mittelbildungen* aus zwei entsprechenden Rahmenwerten zu deuten sind. So ist zum Beispiel die $\begin{matrix}\text{dekursive}\\ \text{anticipative}\end{matrix}$ kommercielle Aufzinsung als eine $\begin{matrix}\text{arithmetische,}\\ \text{harmonische,}\end{matrix}$ die exponentielle Zinsrechnungsart als eine geometrische Mittelwertoperation aufzufassen.[1]) Halten wir an einer solchen formalen Deutungsweise fest, dann tritt zwar der gesetzliche Charakter der entsprechenden Vermehrungsprocesse in den Hintergrund und die einzelnen Vermehrungsformeln erscheinen als heuristische rechnungsmässige Ansätze; hingegen gewinnt man ein Kriterium zur Beurteilung von komplicierter aufgebauten Vermehrungsformeln[2]) einerseits und direkte Verallgemeinerungsmöglichkeiten andererseits.

Nach diesem theoretischen Gesichtspunkt haben wir in früheren Arbeiten[3]) jene Potenzmittelbildungen untersucht, welche als die direktesten Verallgemeinerungen der obigen einfachsten Mittelbildungen betrachtet werden können. Es ergab sich, dass für interpolatorische Zwecke die „allgemein associativen *Potenzmittelwerte*“, für längere vorwärtige, endlich bleibende Extrapolationen die „allge-

---

[1]) Siehe die Note des Verfassers: Miscellen zur politischen Arithmetik, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik Bd. I. (1921), S. 414-6. Die Fälle der Abzinsung werden entsprechend modifiziert.

[2]) Das methodische Kriterium wäre, dass der zu wählende Ansatz bzw. die anzubringende Korrektur einer bestimmten Mittelbildung formal anzupassen sei. Hierüber s. die Behandlung der *Moserschen* Zinsformel in der unter 1) angeführten Schrift.

[3]) Es seien hier angeführt:

mein nicht associativen **Potenzmittel**" als brauchbare rechnungsmässige Ansätze zu handhaben sind. Die ersteren:

$$M = \left(\frac{\Sigma_{(i)} g_i a_i^{\varrho}}{\Sigma_{(i)} g_i}\right)^{\frac{1}{\varrho}}$$

enthalten als Specialfälle die arithmetische ($\varrho = 1$), die geometrische ($\varrho \to 0$) und die harmonische Mittelbildung ($\varrho = -1$); die letzteren:

$$M = \frac{\Sigma_{(i)} g_i a_i^{\varrho+1}}{\Sigma_{(i)} g_i a_i^{\varrho}}$$

schliessen die geometrische Mittelbildung aus und liefern das antiharmonische ($\varrho = 1$), das arithmetische ($\varrho = 0$) und das harmonische ($\varrho = -1$) Mittel als wichtigste Specialfälle.

Im Folgenden wollen wir jenes extrapolatorische Vermehrungsproblem in die angedeutete methodische Beleuchtung bringen, welches von der **Euler'schen** geometrischen Vermehrungshypothese abweichend für ein unendliches (oder genügend grosses) Argument einem **endlichen** stationären Maximalzustand (Beharrung), also mit monoton abnehmender Vermehrungsintensität, asymptotisch zustrebt. Dieses Vermehrungsproblem tritt in den verschiedenen Gebieten der angewandten Wissenszweige (Zinseszinsrechnung für längere Zeitdauern, Bevölkerungsstatistik, Mathematik der Socialversicherung, Biometrie[4]) auf und besonders die neuere Wiederbelebung der lange Zeit hindurch in Vergessenheit geratenen **Verhulst'schen** Gesetze des Bevölkerungswachstums (s. Anmerkung 9.) kann es rechtfertigen, dass wir die mathematische Grundlegung des Problemes auch nach der angeführten Manier betrachten.

Bei den bevölkerungsstatistischen Anwendungen tritt der in methodischer Hinsicht principielle Unterschied zwischen „Vermehrungsgesetz" und „Vermehrungsformel" scharf hervor, sodass aus der formalen Umdeutung bekannter specieller Gesetzesansätze manche Belehrung für die Abgrenzungen und für die möglichen Erweiterungen der einzelnen Fälle zu holen ist. Endgültige mathematische Gesetze der

---

*a*) Über die Verwendung von Mittelwertprocessen in der Bevölkerungsstatistik und in der Zinsrechnung, Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1920, S. 72—96.

*b*) Nähere praktische Ausführung in der Abhandlung von **Gumbel**: Die Interpolation des Bevölkerungsstandes, Deutsches Statistisches Centralblatt, Bd. IX. (1917), Sp. 11—22 und in unserer Schrift:

*c*) Methodische Untersuchungen zu den bevölkerungsstatistischen Grundlagen der schweizerischen Alters- und Hinterlassenenversicherung, Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft, Jahrg. 66 (1930), im Erscheinen.

[4]) Eine formale Analogie zur Gegenüberstellung des **Eulerschen** und des ursprünglichen **Verhulstschen** Vermehrungsgesetzes (in der von **Yule** gegebenen Form) bietet auch die Gegenüberstellung des **Maxwellschen** und des **Fermischen** atomstatistischen Verteilungsgesetzes.

Bevölkerungsbewegungen sind nicht zu formulieren, da nicht sämtliche wesentlichen Möglichkeiten in einem analytischen Ausdruck zusammengeführt werden können und so erscheint ein heuristisch-formaler Ansatz als nutzbringend, wenn mit demselben wenigstens eine zu erwartende wesentliche Tendenz (empirische Gesetzmässigkeit) in möglichst brauchbarer rechnungsmässiger Art zu erfassen ist. In dieser Umdeutung erhalten wir für das genannte Problem keine Vermehrungsgesetze, die einen naturnotvendigen Verlauf im kleinen kennzeichnen, sondern wir kommen zu Vermehrungsformeln, welche eine denknotwendig postulierte Tendenz im grossen zum Ausdruck bringen. Inhaltlich wichtig ist dabei folgendes:

*a*) Ausser der allgemeinen Arbeitshypothese braucht man bei direkten Extrapolationsrechnungen keine weiteren speciellen statistischen Vermutungen für die unbekannte Zukunft einzuführen und

*b*) man findet formale Erweiterungsmöglichkeiten, welche auf empirischem Wege die aus der Vergangenheit zu schöpfenden Tendenzen im gegebenen Fall schärfer zu reproducieren vermögen.

Bei Verwendung von solcherart konstruierten Vermehrungsformeln muss man stets darauf achten, dass womöglich solche Zwecke in Betracht kommen sollen, bei denen nicht die absolute Prognose, sondern nur die Berücksichtigung rechnungsmässig auf die Zukunft übertragbarer allgemeiner Entwickelungstendenzen das massgebende ist. Als wichtiges Beispiel hiefür dient die Abschätzung des plausibelen zeitlichen Verlaufes jener Verhältnisszahl-Reihen, welche den zu erwartenden Effekt einzelner Deckungssysteme der Socialversicherung in grossen Zügen zu charakterisieren haben und deren Zähler und Nenner durch die allgemeine, einem zu erwartenden Beharrungszustand anzupassende, Entwickelung gewisser abgegrenzter Bevölkerungsmassen ihre formalstatistische Unterlage erhalten.[5])

Die beiden hier folgenden theoretischen Behandlungen des genannten Problemes stehen insoweit in Beziehung zu einander, als man stets bestrebt war die einzelnen Vermehrungsansätze verschiedener Anwendungsgebiete gegenseitig nutzbar zu machen.[6]) So wollen wir im 2. Punkt das Kapitalvermehrungsproblem, im 3. Punkt das bevölkerungsstatistische Problem in den Vordergrund rücken lassen. Die

---

[5]) In der unter 3*c*) angeführten Arbeit haben wir in dieser Weise, und zwar mit der Potenzmittelmethode des zweiten Punktes vorliegender Arbeit, die mit dem Umlagesystem verbundene zeitliche Folge der „Rentnerverhältnisszahlen" behandelt. Ähnlich wäre auch die mit dem Kapitaldeckungsverfahren verknüpfte Reihe der „Neurentnerverhältnisszahlen" oder diese bei Repartierung auf die Neueintretenden zu berechnen gewesen.

[6]) Neuerdings hat Sós in einer ungarischen Arbeit (Ungarische Versicherungswissenschaftliche Rundschau Bd. I., 1930, S. 32—36) den ursprünglichen Verhulstschen Ansatz für das Kapitalvermehrungsproblem verwertet und manche Vorteile hervorgehoben, z. Bp. dass diese Lösung für den in Betracht kommenden Zweig der exponentiellen am nächsten liegt. Methodischer Nachteil ist der Inflexionspunkt und dass: $K_1 \neq K_0(1 + i)$ ist.

inhaltlich einseitige Betrachtungsweise der Arbeit sei damit motiviert, dass wir bei dieser Gelegenheit nur die **formalen** Gesichtspunkte der Mittelwertoperationen für das genannte Problem vertiefen wollten.

## 2. Die de Montelsche Kapitalvermehrungsformel.

Im zweiten Teil des bekannten Werkes von **Barriol**: Théorie et pratique des opérations financières (Encyclop. scient., Auflage v. J. 1914, S. 116—122) findet man mehrere Versuche zusammengestellt, welche brauchbaren Ansätzen für die, auch im Falle sehr langer Dauern, beschränkt bleibenden zinslichen Kapitalsvermehrungen zustreben.[7]) Wir wollen zeigen, dass die dort behandelte Lösung von de **Montel**, welche, ohne nähere Begründung, für den Vermehrungsprocess ein hyperbolisches Gesetz anschreibt, als dieselbe **Potenzmittelformel** zu deuten ist, die wir in den bereits citierten Arbeiten für die im Unendlichen endlich bleibende Bevölkerungsextrapolation vorgeschlagen haben. Methodisch wesentlich dabei ist, dass auf dieser Grundlage die resultierende Vermehrungsformel als eine, der extrapolatorischen Grundtendenz angepasste, direkte Weiterbildung derjenigen einfachsten Mittelwertoperation zu kennzeichnen ist, welche der dekursiven kommerciellen Aufzinsung zugeordnet wird.

Die im Bereiche des Einheitsintervalls der Zeitdauer geltende dekursive einfache Kapitalvermehrungsformel (mit $K(t) = K_t$)

$$K_t = K_0 + K_0 it = (1 - t)K_0 + tK_1,$$

definiert für $K_t$ ein gewogenes arithmetisches Mittel (Summe der Gewichte $= 1$) der Rahmenwerte

$$K_0 \text{ und } K_1 = K_0(1 + i).$$

Diesen linearen interpolatorischen Ansatz erweitern wir nun für vorwärtig-extrapolierende Zwecke in der Weise, dass mit denselben Rahmenwerten $K_\infty$ endlich bleibe; dies kann am einfachsten mit Hilfe der folgenden hyperbolischen Potenzmittelbildung geschehen:

$$K_t = \frac{(1-t)\,K_0^{\varrho+1} + t\,K_1^{\varrho+1}}{(1-t)\,K_0^{\varrho} \quad + t\,K_1^{\varrho}} = K_0\,\frac{1 + t\,(r^{\varrho+1} - 1)}{1 + t\,(r^{\varrho} \quad - 1)}$$

wobei für das Vermehrungsproblem

$$r = \frac{K_1}{K_0} = 1 + i > 1.$$

In diesem Ansatz ist $\varrho$ ein empirisch zu bestimmender Parameter, welcher für die Reproduktion der zu beschreibenden allgemeinen Tendenz des betrachteten Vermehrungsprocesses massgebend ist. $\varrho = 0$

[7]) Eine vom praktischen Gesichtspunkt treffende Kritik aller dieser Versuche ist bei **Insolera**: Corso di Matematica Finanziaria (Torino, 1927) S. 137, zu lesen.

führt zum Ausgangspunkt zurück; für die geplante vorwärtige Extrapolation muss $\varrho > 0$ sein. Es erweist sich dann

$$K_\infty = K_0 \frac{r^{\varrho+1} - 1}{r^\varrho - 1}$$

als ein positives, endliches asymptotisches Grenzmaximum (stationärer Beharrungszustand im Unendlichen).

Indem nun de Montel für seinen willkürlichen Vermehrungsprocess ausser $K_0$ und $K_1 = K_0(1+i)$, noch $K_\infty = K_0 M$ fixiert, umgeht er eigentlich die entsprechende Bestimmung von $\varrho$. Führen wir nämlich den Wert für $M$ in unsere Potenzmittelformel ein, so resultiert in der Tat die sonst ohne nähere Analyse entstandene Formel von de Montel. Wir erhalten in dieser Weise

$$M = \frac{r^{\varrho+1} - 1}{r^\varrho - 1} = r + \frac{i}{r^\varrho - 1}$$

d. h.

$$\frac{1}{r^\varrho - 1} = \frac{M - r}{i}$$

und nach Einführung in die Potenzmittelformel:

$$K = K_0 \frac{1 + t\,(r^{\varrho+1} - 1)}{1 + t\,(r^\varrho - 1)} = K_0 \frac{\frac{1}{r^\varrho - 1} + tM}{\frac{1}{r^\varrho - 1} + t} = K_0 \frac{M - r + itM}{M - r + it}$$

oder

$$K_t = K_0 \frac{M(1 + it) - (1 + i)}{M + it - (1 + i)}.$$

Dies ist (bei $K_0 = 1$) die von de Montel vorgeschlagene Kapitalvermehrungsformel.

Wir wollen an die Potenzmittelformel noch einige Bemerkungen knüpfen, da diese auch bei anderen, analog formulierten Vermehrungsproblemen Verwendung finden könnten.

Aus der Betrachtung der Differentialquotienten von $K(t)$ sieht man, dass die kennzeichnete Extrapolation bei $r > 1$ für $\varrho > 0$ einen monoton ansteigenden, wendepunktslosen und im Endlichen verbleibenden Hyperbelast ergiebt. (Für bestimmte Vermehrungsprobleme ist es wohl plausibel, dass ein wendepunktsloser Extrapolationsast entstehe.) Man hat die Formel

$$\varrho = \frac{\log \frac{K_\infty - K_0}{K_\infty - K_0 r}}{\log r} = \frac{\log \frac{M - 1}{M - r}}{\log r}.$$

und beim Kapitalsproblem kann z. Bp. errechnet werden, dass mit Festlegung eines $M = 100$, für $I = 1\% - 10\%$ bis zu drei Stellen ein einheitliches $\varrho = 0{\cdot}01$ angesetzt werden könnte.

Für rechnerische Zwecke ist die de Montelsche Form leicht zu verwenden; durch die folgende Umschreibung ist sie in Hinsicht auf eine etwaige tabellarische Anlage (für $\sigma$) noch einfacher zu gestalten: Es ist mit der Bezeichnung von

$$\frac{1}{r^{\varrho}-1} = \frac{M-r}{i} = \sigma$$

$$K_t = K_0 \frac{\sigma + tM}{\sigma + t} = \frac{\sigma K_0 + tK_{\infty}}{\sigma + t}\,.$$

(Hiebei dient $\sigma$ sozusagen als Schlüsselzahl; bei $M = 10^n$ ist diese für alle $I$ ganzzahlig, die Teiler von $(10^n - 1)\,100$ sind.)

Diese weitere Umgestaltung ist auch vom theoretischen Gesichtspunkt wesentlich. Sie führt nämlich die allgemeine Potenzmittel-Extrapolationsformel in eine arithmetische Interpolationsformel über: $K_t$ ist ein gewogener arithmetischer Mittelwert aus den Rahmendaten $K_0$ und $K_{\infty}$ mit den Gewichten $\sigma$ bzw. $t$. Durch diese Umformung ist in eindeutiger Weise ein von der Zergliederung des Extrapolationsintervalles unabhängiger („associativer") Process festgelegt, wenn man verabredet, dass bei demselben einem partiellen Mittelwert die Summe der komponenten Gewichte als Gewicht zugeordnet sei. In dieser Umschreibung, die auch die formalen Beziehungen zu den im nächsten Punkt anzugebenden Processen erkennen lässt, gewinnt man somit eine Möglichkeit, die allgemein nicht associativen Potenzmittel in solche zu anamorphisieren.[8])

Über die Anwendung der Potenzmittelextrapolation im Falle, dass $K_{\infty}$ nicht festgelegt wird, berichtet unsere unter 3c) angeführte Arbeit.

## 3. Die Verhulstschen Vermehrungsformeln.

Ohne auf die naturgesetzliche Analyse der hypothetischen Grundlagen der Ansätze von Verhulst[9]) einzugehen, stellen wir — im Sinne der einleitenden methodischen Bemerkungen — das Folgende fest:

---

[8]) Über die Festlegung des associativen Charakters siehe unsere unter 3a) genannte Abhandlung. Die Bemerkung, welche im Text an die weitere Umformung der Potenzmittelformel diesbezüglich mitgeteilt ist, wäre unseren früheren Arbeiten über diese Fragen nachzutragen.

[9]) Von neueren Arbeiten über diesen Gegenstand nennen wir:

*a*) Gumbel: Die Versuche eines Gesetzes der Bevölkerungszunahme, Allgemeines Statistisches Archiv, Bd. IX. (1916), besonders S. 644—656. Im Text citieren wir nach dieser Abhandlung ($\varrho$ hat dort andere Bedeutung), welcher von den modernen Wiederfindern des Verhulst'schen Ansatzes im Gebiete der Bevölkerungsstatistik die Priorität zuzuschreiben ist.

Die in den Arbeiten von Verhulst zu findenden Vermehrungsgesetze können als specielle Potenzmittelwert-Interpolationen mit den Rahmenwerten $P(0) = P_0$ und $P(\infty) = P_\infty$ gedeutet und nach dieser Richtung formal erweitert werden.

So ist z. Bp. das ursprüngliche „logistische" Wachstumgesetz, welches als Lösung der Differentialgleichung (citiert nach Gumbel S. 645).

$$\frac{dP(t)}{dt} = m\,P(t) - n\,[P(t)]^2$$

angesetzt ist und so lautet

$$P(t) = \frac{P_0 \frac{m}{n} e^{mt}}{P_0 e^{mt} - P_0 + \frac{m}{n}}$$

als ein gewogener harmonischer Mittelwert zu deuten. Indem nämlich

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = P_\infty = \frac{m}{n}$$

(ein positives, endliches asymptotisches Grenzmaximum), kann geschrieben werden:

$$\frac{dP(t)}{dt} = mP(t) - mP_\infty^{-1}\,[P(t)]^2$$

und

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty e^{mt}}{(e^{mt} - 1)P_0 + P_\infty} \tag{a}$$

oder

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{(1 - e^{-mt})\,P_0 + e^{-mt} P_\infty} \tag{b}$$

Diese Formeln stellen — wie leicht nachgerechnet werden kann — für $P(t)$ einen gewogenen harmonischen Mittelwert aus den Rahmenwerten $P_0$ und $P_\infty$ dar, und zwar in der Formel (a) mit den Gewichten 1 bzw. $e^{mt} - 1$, in der Formel (b) mit den Gewichten $e^{-mt}$ bzw. $1 - e^{-mt}$. Die Eulersche geometrische Vermehrungsformel wäre enthalten für $n = 0$, d. h. wenn $P_\infty = \infty$ gesetzt werden dürfte. Im Folgenden bilden wir die Form (b) weiter, da bei ihrer Gewichtsfestlegung die Summe der Gewichte $= 1$ ist.

Wir wollen nun diesen umgedeuteten Verhulstschen Ansatz formal verallgemeinern. Da es sich um eine Interpolation handelt,

---

*b)* Zwinggi: Beiträge zu einer Theorie des Bevölkerungswachstums mit einer Anwendung auf Socialversicherungskassen, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 24 (1929), S. 95—166. — Beide enthalten ausführliche Literaturnachweise.

kann dies am einfachsten durch die allgemein associative Potenzmittelwertbildung in folgender Weise geschehen:

$$P(t) = \sqrt[\varrho]{e^{-mt} P_0^\varrho + (1 - e^{-mt}) P_\infty^\varrho} = \sqrt[\varrho]{P_\infty^\varrho - e^{-mt} (P_\infty^\varrho - P_0^\varrho)}.$$

Hierbei ist $\varrho$ ein verfügbarer oder aus empirischen Angaben zu bestimmender Parameter[10]) welcher die entsprechendste Reproduktion der wahrzunehmenden allgemeinen Tendenz kennzeichnen soll. Ist $\varrho = -1$, so erhalten wir das obige ursprüngliche (oder das modificierte zweite, Gumbel S. 648) Verhulst'sche Gesetz; ist $\varrho = 1$, so erhalten wir das in der dritten Arbeit von Verhulst vorgeführte Gesetz (Gumbel S. 651), welches somit als eine arithmetische Mittelbildung aufzufassen ist.

Die allgemeine Differentialgleichung, durch welche eine ganze Reihe von speciellen Verhulstschen Ansätzen einheitlich definiert werden könnte, wäre:

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\frac{m}{\varrho} P(t) + \frac{m}{\varrho} P_\infty^\varrho [P(t)]^{1-\varrho}.$$

Der methodischen Auffassung von Zwinggi (a. a. O. S. 96) näher kommend, hätte man etwa in dieser Differentialgleichung die Erzeugerin einer „Normalgesetzmässigkeit" der betrachteten Vermehrungsprocesse zu erblicken. Diese legte eine allgemeine normale Vermehrungskurve fest, die ausser den logistischen Grundannahmen, durch Einführung des verfügbaren Parameters, auch eine empirische Auswahlsmöglichkeit für die aktuelle Reproduktion der wesentlichen Tendenzen enthält.

Bei der empirischen Auswahl von $\varrho$ muss man folgendes beachten: Aus der Betrachtung der Differentialquotienten von $P(t)$ ersieht man, dass

*a*) für $0 < \varrho < 1$ und $\varrho < 0$: ein Wendepunkt (mit Symmetrieeigenschaft) im Endlichen auftritt und zwar bei

$$t_\iota = \frac{1}{m} \log \frac{P_\infty^\varrho - P_0^\varrho}{\varrho P_\infty^\varrho}$$

wo dann

$$P(t_i) = P_\infty \sqrt[\varrho]{1 - \varrho}.$$

*b*) für $\varrho \geqq 1$: kein Wendepunkt.

Wir wollen der skizzenhaften Darstellung der vorangehenden

---

[10]) Über die numerische Lösung der bei Bestimmung von $\varrho$ auftretenden transcendenten Gleichung siehe die unter 3*a*) und *b*) genannten Schriften. — Die Elemente der sonstigen nötigen Rechenarbeiten giebt Gumbel in 9*a*).

formalen Beziehungen des Verhulstschen Wachstumsansatzes noch folgende Bemerkungen anschliessen:

1. Man muss den Grenzfall $\varrho \longrightarrow 0$ gesondert betrachten, dieser entspricht einer gewogenen geometrischen Mittelbildung, die im Endlichen verbleibt. Gleichzeitig bekommen wir ein Beispiel dafür, wie aus einer Weiterbildung, durch Einführung des $\varrho$, neuartige specielle Vermehrungsformeln entstehen. Mit der Durchrechnung des $\log P(t)$ nach der l'Hospitalschen Regel erhalten wir

$$\underset{\varrho \to 0}{P(t)} = P_\infty \left( \frac{P_0}{P_\infty} \right)^{e^{-mt}}$$

oder in logarithmisierter Form:

$$\log P(t) = \log P_\infty - e^{-mt} (\log P_\infty - \log P_0).$$

Diese, in die Klasse der Gompertz'schen Ausdrücke gehörige Formel, hat manche beachtenswerte Eigenschaften und könnte auch für das Kapitalvermehrungsproblem Verwendung finden.

2. Nachzutragen wäre die Untersuchung der für bevölkerungsstatistische Anwendungen wesentlichen Eigenschaften der allgemeinen logistischen Funktion (wie im Kap. I. § 2. bei Zwinggi für die ursprüngliche). Weiterhin müssten auch die genaueren Kriterien der Anpassungsmöglichkeit gegebener Reihen allgemein ausgearbeitet werden, wie dies in speciellen Fällen bei Gumbel und bei Stránský-Bulina (s. Anm. 11.) zu finden ist.

3. Die direkte Anwendung des allgemeinen Ansatzes im gegebenen Fall bedarf der numerischen Auswertung des Parameters $\varrho$ und dann der Konstanten der Formel. Diese Berechnungen sind auf die Auswahl von Angaben gestützt, welche aus Perioden vor dem Extrapolationszug stammen. Solche Auswahlen sind sehr vorsichtig zu treffen und es muss ausdrücklich betont werden, dass im einzelnen Fall, besonders für irgendwie gestörte Bestände, eine eingehende strenge Kritik der Anwendbarkeit und irgendeine auf demographische Momente gestützte Kontrolle des Grenzmaximums für ein genügend grosses Argument, der effektiven Verwendung vorangehen muss.[11]) Wenn man daran

---

[11]) Für die weitere Verfolgung dieser wichtigen Betrachtungsweise, von der eigentlich die praktische Verwendbarkeit im einzelnen gegebenen Fall abhängt, siehe die folgenden Arbeiten:

*a*) Friedli: Bevölkerungsstatistische Grundlagen zur Alters- und Hinterlassenenversicherung in der Schweiz (Beilage zum Entwurf eines Bundesgesetzes), Bern, 1928.

*b*) Stránský-Bulina: The development of population in the Czechoslovak Republic, Aktuárské vědy, Bd. I. (1929), S. 21—33.

Nach diesen neueren Untersuchungen ist der ursprüngliche Verhulstsche Ansatz für die schweizerische und für die tschecoslovakische allgemeine Bevölkerung nicht anwendbar und es sei auf die demographischen Hilfsmittel hingewiesen, welche durch diese Forscher zur indirekten Lösung des Vermehrungsproblemes herangezogen werden. — Grundlegend ist vor festhält, dass eigentlich nur allgemeine Tendenzen aus der Vergangenheit und diese auch nur für die in der Einleitung kennzeichneten rechnungsmässigen Zwecke zu übertragen sind, so kann der Einfluss etwaiger störender Elemente stark gedämpft werden, indem man aktuelle Störungen durch Bildung von entsprechend gewogenen Durchschnittswerten ausschaltet. Bei Vorhandensein genügend vieler Angaben kann auch eine vorherige, glättende mechanische Ausgleichung der zu verwendenden representativen Züge vorgenommen werden. — Die Bestimmung von $\varrho$ muss durch eine wohldurchdachte Auswahl aus den mit verschiedenen empirischen Ausgangsdaten berechneten Probewerten geschehen; hierbei können auch die für das Auftreten eines im Endlichen vermutbaren Wendepunktes massgebenden Kriterien eine verfeinerende Rolle haben.

Budapest, den 17. Juli 1930.

---

# Note sur la théorie mathématique des assurances contre l'invalidité.

Par *Emile Schoenbaum.*

## I.*)

J'ai montré, dans une note publiée dans les Rozpravy de l'Académie des Sciences Tchèque que la théorie mathématique des phénomènes collectifs nous conduit aux équations intégrales de Volterra. Il en est ainsi, par exemple, pour la théorie des assurances d'invalidité si on prend égard à la possibilité de la réactivité. Dans cette note je traite un autre problème, plus simple, qui conduit à la solution d'une équation intégrale et, en passant, j'indique les solutions nouvelles d'autres problèmes connus en pratique.

1. Considérons un groupe homogène des personnes actives d'un âge déterminé et observons le pendant un certain intervalle de temps. Une partie d'individus de ce groupe meurt et d'autres personnes deviennent invalides. Le groupe primitif se divisera donc en deux groupes: un groupe des personnes actives, diminuant par des décès et par des invalidités — et un groupe des personnes invalides qui augmente par les

---

allem das genaue Studium der zu erfassenden allgemeinen Tendenz und in dieser Richtung geben die klassischen Arbeiten von Moser über die Untersuchungsmethoden eines Beharrungszustandes und deren bereits vorliegende Anwendungen (so durch Wyss in den Mitt. der Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 24 (1929), S. 39—93) tiefgreifende Weisungen, auch für den Praktiker.

*) Traduction d'un article publiée 1917 dans Časopis pro pěstování matematiky a fysiky.