Jaroslav Bulina

Remarque au sujet de la théorie de l'invalidité

Aktuárské vědy, Vol. 1 (1930), No. 4, 173–176

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144527

Pour $x = \xi$

$$a(x)\, b(x) = 1$$

donc d'après le théorème auxiliaire de Volterra

$$\frac{dx}{dx_1} = 1$$

et

$$x = x_1,\ y = y_1,\ \xi = \xi_1.$$

D'après le corollaire ci-dessus nous pouvons maintenant choisir

$$G_1(x, y) = a(x)\, b(\xi)$$

et on a

$$\overset{*}{G}_1 \overset{*}{H}_1 (x, \xi) = a(x)\, b(\xi)\, \overset{*}{1} \overset{*}{H} (x, \xi).$$

De même

$$\overset{*}{H}_1 \overset{*}{G}_1 (x, \xi) = a(x)\, b(\xi)\, \overset{*}{H}\, \overset{*}{1} (x, \xi)$$

et par comparaison

$$\overset{*}{1} \overset{*}{H} (x, \xi) = \overset{*}{H}\, \overset{*}{1} (x, \xi)$$

d'où le resultat annoncé.

Ce théorème montre que la substitution (S) dans la théorie des équations integro-differentielles de Volterra a un sens bien déterminé et que la méthode de M. Schoenbaum est avantageuse pour les équations servant de base à la description de phénomènes héreditaires invariables à travers le temps.

Remarque au sujet de la théorie de l'invalidité.

Jaroslav Bulina.

Les actuaires s'occupant de l'élaboration des lois réglant l'assurance sociale, se heurtent à une difficulté pénible, c'est de trouver une base convenable des calculs. On a taché de choisir comme base des calculs tableaux provenant des statistiques les plus récentes et les plus appropriées aux conditions données.

L'auteur s'est proposé de prouver qu'à défaut d'un pareil matériel statistique convenable en ce qui concerne les conditions du temps, on peut se servir des données moins convenables.

Ainsi, p. ex. la mortalité des invalides s'abaisse très souvent en même temps avec l'invalidité décroissante de sorte que la valeur de rente d'invalidité ne change pas sensiblement. La présente remarque a pour but de fournir la preuve et l'analyse de cette affirmation.

Soit $\nu(x, t)$ taux instantané de l'invalidité d'âge x dans le temps t donné, $\nu(x, t + n)$ taux instantané d'invalidité dans le temps $t + n$, et analoguement $\mu(x, t)$, $\mu(x, t+n)$ taux instantanés de mortalité des invalides aux temps $t, t+n$; maintenant nous devons rechercher quelles prémisses concernant le caractère des dites fonctions doivent être remplies pour que la valeur $a^{ai}(x)$ soit indépendante du temps, c. à dire, que

$$a^{ai}(x, t) = a^{ai}(x, t+n). \tag{1}$$

Si l'on fait la dérivation de cette équation par rapport à x et emploie l'équation différentielle pour $a^{ai}(x)$, analogue de l'équation différentielle[1]) connue pour $a(x)$

$$\frac{da^{ai}(x)}{dx} = a^{ai}(x) \,.\, [\mu^a(x) + \nu(x) + \delta] - \nu(x) \,.\, a^i(x)$$

on obtient

$$a^{ai}(x)\,[\mu^a(x) + \nu(x, t) + \delta] - \nu(x, t)\, a^i(x, t) =$$
$$a^{ai}(x)\,[\mu^a(x) + \nu(x, t+n) + \delta] - \nu(x, t+n)\, a^i(x, t+n)$$

et après réduction

$$\frac{\nu(x\,.\,t+n)}{\nu(x, t)} = \frac{a^{ai}(x) - a^i(x, t)}{a^{ai}(x) - a^i(x, t+n)}. \tag{2}$$

Posons $\dfrac{\nu(x, t+n)}{\nu(x, t)} = 1 + \varepsilon$. Cette supposition est justifiée par exemple, si l'on exprime $\nu(x)$ par la fonction analytique $\nu(x) = a \,.\, b^x$. on obtient le rapport

$$\frac{\nu(x, t+n)}{\nu(x\,.\,t)} = \frac{a_2}{a_1} \,.\, \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^x.$$

Étant donné que les constantes b valables pour la même collectivité[2]) changent seulement peu avec le temps, on peut poser

$$\frac{b_2}{b_1} = 1, \quad \frac{a_2}{a_1} = 1 + \varepsilon,$$

de manière que

$$\frac{a^{ai}(x) - a^i(x, t)}{a^{ai}(x) - a^i(x, t+n)} = 1 + \varepsilon. \tag{3}$$

[1]) Voir. Dr. E. Schoenbaum: Sur l'emploi des équations différentielles en mathématiques des assurances paru dans la revue „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky", L II.

[2])

	Personnel au service des trains		Tout le personnel	
	Behm (1868—73)	Zimmermann (1868—84)	Behm (1868—73)	Zimmermann (1868 —84)
b	1,11	1,11	1,12	1,12
a	0,00010	0,00012	0,00038	0,00050

Par une dérivation nouvelle par rapport à x

$$1 - \mathrm{a}^i(x, t)\,[\mu^i(x, t) + \delta] = 1 - \mathrm{a}^i(x, t+n)\,[\mu^i(x, t+n) + \delta] + \\ + \varepsilon\,\delta \mathrm{a}^{ai}(x) - \varepsilon\,\mathrm{a}^i(x, t+n)\,[\mu^i(x, t+n) + \delta] + \varepsilon.$$

Substituant $\mathrm{a}^i(x, t+n)$ de l'équation (3) on obtient

$$[\varepsilon\,\mathrm{a}^{ai}(x) + \mathrm{a}^i(x, t)]\,[\mu^i x, t+n) + \delta] = \\ = \varepsilon\,\{1 + \mathrm{a}^{ai}(x)\,[\mu^a(x) + \nu(x, t) + \delta] - \nu(x, t)\,\mathrm{a}^i(x, t)\} \\ + \mathrm{a}^i(x, t)\,[\mu^i(x, t) + \delta].$$

Choisissant pour le taux instantané de mortalité des invalides le rapport

$$\frac{\mu^i(x, t+n)}{\mu^i(x, t)} = 1 + \eta(x) \tag{4}$$

où η est fonction de x, ce qui veut dire que $\mu^i(x, t+n) = \mu^i(x, t) + \eta(x)\,\mu^i(x, t)$ on obtient l'équation

$$\eta(x) = \frac{\varepsilon}{\mu^i(x, t)} \cdot \frac{1 + \mathrm{a}^{ai}(x)\,[\mu^a(x) + \nu(x, t) - \mu^i(x, t)] - \nu(x, t)\,\mathrm{a}^i(x, t)}{\varepsilon\,\mathrm{a}^{ai}(x) + \mathrm{a}^i(x, t).}$$

Ecrivons ce rapport sous la forme

$$\eta(x) = \frac{B(x)}{\mathrm{a}^{ai}(x) + \dfrac{\mathrm{a}^i(x, t)}{\varepsilon}}, \tag{5}$$

où

$$B(x) = \frac{1 + \mathrm{a}^{ai}(x)\,[\mu^a(x) + \nu(x, t) - \mu^i(x, t)] - \nu(x, t)\,\mathrm{a}^i(x, t)}{\mu^i(x, t).}$$

Pour que l'équation (1) soit valable, il faut que les changements des taux instantanés de l'invalidité et de la mortalité satisfassent à l'équation (5).

Appliquons maintenant cette formule aux chiffres statistiques reçus au cours de l'observation de la collectivité des employés des Chemins de fer, durant la période de 1885—89, élaborée par Zimmermann.

Quant au personnel au service des trains l'invalidité et la mortalité des invalides (à la base des probabilités annuelles) changeaient de manière suivante:

Année	1885	86	87	88	89
Invalidité	100	116	113	117	91
Mortalité des inval.	100	102	93	99	95

Si l'on applique la formule (5) au matériel statistique obtenu au cours de l'année 1885, on constate que pour les valeurs de $\varepsilon = 0{,}05$;

0,10; 0,15 etc. $\eta(x)$ pour les diverses valeurs x sont essentiellement les mêmes (il en résulte que η est indépendant de x comme ε).

La table ci-dessous fait ressortir les divergences constatées entre la réalité et le cours des valeurs de ε, η trouvées, cette table indiquant dans la 2ème colonne les changements de l'invalidité, exprimé par l'accroissance (la décroissance) rélative, dans la troisième colonne le changement effectif quant à la mortalité des invalides, dans la quatrième colonne la variabilité de la mortalité des invalides (toutes les deux exprimées de la même manière), qui, selon l'équation (5) compenseraient la variabilité de l'invalidité.

ε	η
— 5	— 7
— 10	— 14
— 15	— 21
— 20	— 29
+ 5	+ 7
+ 10	+ 14
+ 15	+ 20
+ 20	+ 27

	ε	η	η'
1	2	3	4
1885	0,—	0,—	0,—
1886	+ 0,02	+ 0,16	+ 0,03
1887	— 0,09	— 0,03	— 0,12
1888	+ 0,06	+ 0,04	+ 0,08
1889	— 0,04	— 0.22	— 0,06
	— 0,05	— 0,05	— 0,07

$\Sigma\eta$ diffère de $\Sigma\eta'$ théorique seulement de 0,02. On peut donc dire que, dans la collectivité donnée, les variabilités dans l'invalidité et la mortalité des invalides au cours des années 1885—89 n'ont eu aucune influence sur la valeur des rentes d'invalidité.

On obtiendrait probablement des résultats analogues pour toute collectivité, où le caractère d'invalidité reste sans changement pendant la durée de la période examinée; cependant il en serait autrement si, p. ex. au cours de la période examinée, la définition d'invalidité subirait un changement quelconque, ou si des circonstances imprévues, (chômage et autres) altéreraient le dévelopement normal de la collectivité.