Otomar Pankraz

Sur une transformation de la théorie des équations intégrales

Aktuárské vědy, Vol. 1 (1930), No. 4, 168–173

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144526

The administration is not advantageous, for we have not a type of territorial insurance institutions, which can be completed also by a central institution, to balance the risk.

The administration being very complicated, it is necessary to search a new basis for the organisation of the treatment benefits and medical benefit and to build also ambulances and sanatoria. The interest of the insured persons demands the building of own pharmacies and pharmaceutical manufactories, in order to receive cheap medicaments.

Sur une transformation de la théorie des équations intégrales.

Otomar Pankraz.

Dans un essai intitulé „Application des équations intégrales de Volterra dans la statistique mathématique“*) étudie M. le Prof. E. Schoenbaum une équation integro-differentielle très importante pour la description de décomposition d'ensemble statistique à travers le temps. On sait que tel équation se reduit à une équation intégrale. M. Schoenbaum fait (entre autres) cette reduction par une substitution analogue à celle de la théorie des équations differentielles.

Cette substitution est remarquable au point de vue de la théorie des fonctions permutables de M. Volterra. Je vais démontrer qu'elle se rattache aux fonctions permutables du groupe du cycle fermé.

En m'appuyant sur la notion du groupe j'expose d'abord quelques théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions permutables et puis je demontre un théorème qui comprend le resultat cherché.

I.

Soit une fonction $F(x, y)$ de deux variables réelles x, y continue et bornée dans une domaine tel que $a \leqq x \leqq y \leqq b$. Ayons en outre une autre fonction $G(x, y)$ de la même propriété et formons une nouvelle fonction

$$R_1(x, y) = \int_x^y F(x, \xi)\, G(\xi, y)\, d\xi.$$

Nous dirons que la fonction R_1 est formée par une opération appelée *la composition de fonction F avec la fonction G*. La fonction R_1 sera nommée *la résultante* de cette composition. Symboliquement on peut écrire

$$R_1(x, y) = \overset{*}{F} \overset{*}{G} (x, y) \text{ ou } = \overset{*}{F} \overset{*}{G}$$

*) Voir Rozpravy České Akademie II tř., 1917.

Si l'on forme

$$R_2(x, y) = \overset{*}{G}\overset{*}{F}(x, y)$$

il est évident que en général

$$R_1(x, y) \not\equiv R_2(x, y).$$

On peut facilement démontrer: 1. La composition est associative. Cela signifie que pour trois fonctions F, G, H est valable la rélation

$$\overset{*}{F}(\overset{*}{G}\overset{*}{H}) = (\overset{*}{F}\overset{*}{G})\overset{*}{H}.$$

2. La composition est distributive ou bien

$$\overset{*}{F}(\overset{*}{G} + \overset{*}{H}) = \overset{*}{F}\overset{*}{G} + \overset{*}{F}\overset{*}{H}.$$

Mais elle n'est pas en géneral commutative.

La composition qui est associative, distributive et commutative sera nommée *permutation*. Donc

$$\overset{*}{F}\overset{*}{G}(x, y) = \overset{*}{G}\overset{*}{F}(x, y).$$

Les fonctions figurant dans la permutation seront appelées *fonctions permutables*.

Une fonction permutable F est permutable entre elle et les fonctions ainsi obtenues peuvent être nommées *les puissances de composition de F* et notées par $\overset{*}{F}{}^n$ $(n = 2, 3, 4 \ldots)$. Remarquable sont les puissances de composition de la fonction $F =$ constante.

La propriété fondamentale de toutes fonctions permutables est exprimée par un théorème facilement à démontrer:

La résultante d'une permutation est la fonction permutable avec une fonction quelconque figurant dans la permutation.

C'est de cette propriété et de la propriété associative de permutation d'où on peut immédiatement conclure: Soit donnée une fonction quelconque continue et bornée G et formons toutes les fonctions permutables avec G. Puis l'ensemble de ces fonctions constitue *le groupe de fonctions permutables avec la fonction donnée G.*

Si l'on pose par exemple $G(x, y) = 1$ (ou bien $G(x, y) =$const.) on sait que toute fonction F pour laquelle

$$\overset{*}{1}\overset{*}{F}(x, y) = \overset{*}{F}\overset{*}{1}(x, y)$$

est une fonction de la forme

$$F(x, y) \equiv F(y - x)$$

et que l'ensemble de ces fonctions $F(y - x)$ forme un groupe que M. Volterra nomme groupe du cycle fermé (brièvement: groupe CF).*)

Les fonctions permutables sont étroitement liées avec la résolution

*) Voir: Volterra-Pérès: Leçons sur la composition et les fonctions permutables, Paris 1924.

des équations intégrales et le princip qui serte de base à la théorie des équations intégrales de M. Volterra peut être énoncé sous la forme suivante:

Toute une fonction $F(x, y)$ figurant dans une équation intégrale (et integro-differentielle) est élément d'un certain groupe de fonctions permutables.

II.

La notion du groupe conduit à l'existence *d'unité du groupe.* Mais ce démande se rattache à une extension de la notion de permutation. D'après la définition adoptée jusqu'à présent les expréssions $a + F(x, y)$ et $b + G(x, y)$, où F et G sont les fonctions permutables et $a =$ const., $b =$ const., ne sont pas des fonctions permutables. Pour éviter ce cas d'exception il est convenable d'introduire ex definitione *la puissance nulle* de composition d'une fonction F.

Definissons: Pour une fonction quelconque G permutable ou non avec la fonction donnée F soit

$$\overset{*}{F}{}^0\overset{*}{G} = \overset{*}{G}\overset{*}{F}{}^0 = G(x, y). \tag{1}$$

Il en résulte immédiatement

$$\overset{*}{F}{}^0 = \overset{*}{1}{}^0.$$

Donc cette puissance nulle est unique dans le groupe et c'est l'élément cherché.

Pour cette raison on peut aussi toujours écrire

$$a = a \, . \, \overset{*}{1}{}^0$$

où a est une constante. Par conséquent *il n'y a pas des constantes additives dans la théorie des fonctions permutables. Toute une constante est multiplicative.*

On peut encore introduire formellement *la première puissance* de composition de F par la relation se rattachent à la définition (1). Nous écrirons

$$\overset{*}{F}{}^1 = \overset{*}{F} = F(x, y).$$

Par cela les puissances de composition sont définies pour tous les exposants $n = 0, 1, 2, \ldots$

III.

Pour la démonstration du notre théoréme nous nous rappelons d'abord un théorème auxiliaire de Volterra.

Soient $a(x_1)$, $b(x_1)$ deux fonctions pour lesquelles

$$a(x_1) \, . \, b(x_1) = m'(x_1)$$

où la fonction

$$m'(x_1) = \frac{dx}{dx_1} \neq 0$$

est intégrable et effectuons un changement de variable

Posons par analogie
$$\left.\begin{aligned} x &= m(x_1) \\ y &= m(y_1) \\ \xi &= m(\xi_1) \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{T}_1)$$

Deux fonctions données F et G transformons comme il suit

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, y_1) &= a(x_1)\, b(y_1)\, F[m(x_1), m(y_1)] \\ G_1(x_1, y_1) &= a(x_1)\, b(y_1)\, G[m(x_1), m(y_1)] \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{T}_2)$$

Puis on a

$$\overset{*}{F_1}\overset{*}{G_1}(x_1, y_1) = a(x_1)\, b(y_1)\, \overset{*}{F}\overset{*}{G}(m(x_1), m(y_1))$$

ou bien: *la transformation donnée par les formules* (T_1) et (T_2) *laisse la composition de* F *avec* G *invariable.*

D'où l'on peut conclure: la transformation ci-dessus n'altère pas aussi la permutabilité de deux fonctions. Donc si on a

$$\overset{*}{F_1}\overset{*}{G_1}(x_1, y_1) = \overset{*}{G_1}\overset{*}{F_1}(x_1, y_1)$$

on a aussi

$$\overset{*}{F}\overset{*}{G}(x, y) = \overset{*}{G}\overset{*}{F}(x, y)$$

et inversement.

Les démonstrations de ces propositions sont très élémentaires et on ne les faut pas citer.

Immédiatement on démontre aussi l'exactitude du corollaire suivant:

Le groupe de fonctions transformées par les formules (T_1) *et* (T_2) *est identique au groupe de fonctions primaires (non transformées).*

Appliquons maintenant ces considérations à l'équation de M. Schoenbaum. Nous obtenons théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi(x)\, f(x) + \int_a^x \varphi(\xi)\, H(x, \xi)\, d\xi \qquad (\mathrm{JD})$$

soit reductible par la substitution

$$\varphi(x) = e^{\int_a^x f(z)\,dz}\, u(x) \qquad (\mathrm{S})$$

à l'équation

$$u(y) = u(a) + \int_a^y u(\xi)\, K(y, \xi)\, d\xi \qquad (\mathrm{I})$$

est que le noyau $H(x, \xi)$ *soit une fonction permutable du groupe* CF.

Démonstration: Pour obténir l'accord à la symbolique de M. Schoenbaum, il est permis — dans notre cas — substituer l'équation (I) par l'équation associé

$$u(y) = u(a) + \int_a^y u(\xi) K(\xi, y)\, d\xi. \tag{I'}$$

Si nous démontrons que le théorème est vrai pour (ID) et (I′), il sera certainement valable pour (I).

La réduction formelle donne pour le noyau de l'équation (I′) naissance à la condition

$$\int_\xi^y e^{\int_x^\xi f(z)\,dz} H(x, \xi)\, dx = K(\xi, y) \tag{A$_1$}$$

où
$$a \leqq \xi \leqq x \leqq y \leqq b$$

Si l'on pose

$$H_1(x, \xi) = e^{\int_x^\xi f(z)\,dz} H(x, \xi)$$

on peut écrire

$$K = \overset{*}{1}\, \overset{*}{H}_1. \tag{A$_2$}$$

D'après le principe cité ci-dessus il faut que K soit permutable avec certaine fonction $X(x, y)$ du groupe (G) de toutes fonctions qui sont permutables avec X. Donc il faut que H_1 comme un élément de la composition soit permutable avec X. Mais on a

$$(\overset{*}{1}\, \overset{*}{H}_1)\, \overset{*}{X} = \overset{*}{X}\, (\overset{*}{1}\, \overset{*}{H}_1) = (\overset{*}{X}\, \overset{*}{1})\, \overset{*}{H}_1$$

d'où X est permutable avec l'unité et le groupe (G) est identique au groupe CF. Inversement: Si H_1 n'est pas du groupe CF, on n'y peut pas être K et la condition (A$_2$) ne soit pas valable. Mais cela signifie que la substitution (S) est impossible.

Il reste à démontrer: Si H_1 est du groupe CF, H appartient au groupe CF. En effet on peut écrire

$$e^{\int_x^\xi f(z)\,dz} = e^{\int_x^c \ldots + \int_c^\xi \ldots}$$

où

$$\xi \leqq c \leqq x.$$

Posons

$$a(x) = e^{\int_x^c \ldots}$$

$$b(\xi) = e^{\int_c^\xi \ldots}$$

Pour $x = \xi$

$$a(x)\, b(x) = 1$$

donc d'après le théorème auxiliaire de Volterra

$$\frac{dx}{dx_1} = 1$$

et

$$x = x_1,\ y = y_1,\ \xi = \xi_1.$$

D'après le corollaire ci-dessus nous pouvons maintenant choisir

$$G_1(x, y) = a(x)\, b(\xi)$$

et on a

$$\overset{*}{G}_1 \overset{*}{H}_1 (x, \xi) = a(x)\, b(\xi)\, \overset{*}{1} \overset{*}{H} (x, \xi).$$

De même

$$\overset{*}{H}_1 \overset{*}{G}_1 (x, \xi) = a(x)\, b(\xi)\, \overset{*}{H}\, \overset{*}{1} (x, \xi)$$

et par comparaison

$$\overset{*}{1} \overset{*}{H} (x, \xi) = \overset{*}{H}\, \overset{*}{1} (x, \xi)$$

d'où le resultat annoncé.

Ce théorème montre que la substitution (S) dans la théorie des équations integro-differentielles de Volterra a un sens bien déterminé et que la méthode de M. Schoenbaum est avantageuse pour les équations servant de base à la description de phénomènes héreditaires invariables à travers le temps.

Remarque au sujet de la théorie de l'invalidité.

Jaroslav Bulina.

Les actuaires s'occupant de l'élaboration des lois réglant l'assurance sociale, se heurtent à une difficulté pénible, c'est de trouver une base convenable des calculs. On a taché de choisir comme base des calculs tableaux provenant des statistiques les plus récentes et les plus appropriées aux conditions données.

L'auteur s'est proposé de prouver qu'à défaut d'un pareil matériel statistique convenable en ce qui concerne les conditions du temps, on peut se servir des données moins convenables.

Ainsi, p. ex. la mortalité des invalides s'abaisse très souvent en même temps avec l'invalidité décroissante de sorte que la valeur de rente d'invalidité ne change pas sensiblement. La présente remarque a pour but de fournir la preuve et l'analyse de cette affirmation.

Soit $\nu(x, t)$ taux instantané de l'invalidité d'âge x dans le temps t donné, $\nu(x, t+n)$ taux instantané d'invalidité dans le temps $t+n$,