Michal Křížek

Abelovu cenu za matematiku získali v roce 2015 John F. Nash a Louis Nirenberg

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 60 (2015), No. 4, 277–283

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144483`

Abelovu cenu za matematiku získali v roce 2015 John F. Nash a Louis Nirenberg

Michal Křížek, Praha

1. Úvod

Dne 25. března 2015 oznámila prezidentka Norské akademie věd Kristi S. Bullová, že v pořadí již třináctou Abelovu cenu[1] získají američtí matematici John F. Nash a Louis Nirenberg za překvapivé a původní příspěvky k teorii nelineárních parciálních diferenciálních rovnic a její aplikace na geometrickou analýzu. V pondělí 18. května byli oba laureáti pozváni do královského paláce v Oslu. Následující den pak převzali Abelovu cenu[2] od Jeho Veličenstva norského krále Haralda v hlavní aule univerzity v Oslu. Večer se konal slavnostní banket na zámku v Akershus, kam je pozval norský ministr pro vzdělávání a vědu Torbjørn Røe Isaksen.

Obr. 1. John F. Nash a Louis Nirenberg (foto Peter Badge a Bureau Hollenshead)

[1] Abelova cena za matematiku je obdobou Nobelovy ceny za fyziku (viz [5] a [22]). O předchozích Abelových cenách pojednávají práce [6], [7] a [12].

[2] Ocenění je spojeno s peněžitou odměnou 3 milionů norských korun pro každého laureáta.

Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc., Matematický ústav AV ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: krizek@cesnet.cz

Výběrová komise pro Abelovu cenu (angl. *Abel Committee*) se skládala z pěti vynikajících matematiků. Komisi předsedal John Rogers z univerzity v Oslu. Dalšími členy byli Marta Senz-Soléová (Univ. Barcelona, Španělsko), Rahul Pandharipande (ETH Zürich, Švýcarsko), Éva Tardosová (Cornellova univerzita, Ithaca, NY, USA) a Luigi Ambrosio (Scuola Normale Superiore, Pisa, Itálie). Členové mohou působit v komisi nejvýše dvě dvouletá funkční období po sobě.

2. Stručný životopis Johna F. Nashe

John Forbes Nash jr. se narodil 13. června 1928 v Bluefieldu v západní Virginii. V době dospívání absolvoval Carnegie Institute of Technology v Pittsburghu. Svůj první článek *The bargaining problem* [13] napsal jako student druhého semestru na Princeton University.

Většinu své profesionální kariéry strávil John Nash na Princeton University a na MIT (Massachusetts Institute of Technology). Byl uznáván zejména za práce v oblasti teorie her a diferenciální geometrie. V roce 1994 získal Nobelovu cenu za ekonomii, kterou společně s ním dostali i další dva matematici, Reinhard Selten a John Harsanyi. Nobelovský výbor ocenil zejména Nashovy práce týkající se tzv. Nashovy rovnováhy, o níž se zmíníme v následující kapitole. Mezi další jeho významná ocenění patří John von Neumann Theory Prize (1978) a Steelova cena Americké matematické společnosti (1999).

Nashův životní příběh je zachycen v oscarovém filmu *A Beautiful Mind*, který čeští diváci mohli shlédnout pod názvem *Čistá duše*. Film vypráví o jeho boji s paranoidní schizofrenií. V roce 2001 jej natočil režisér Ron Howard podle scénáře Akiva Goldsmana. Role Nashe se zhostil herec Russell Crowe.

John Nash bohužel nešťastně zemřel společně se svou manželkou Alicií dne 23. května krátce po převzetí Abelovy ceny. Při cestě z Norska domů měli těžkou havárii v taxíku v New Jersey [20]. V době nehody manželé neměli zapnuté bezpečnostní pásy.

3. Vybrané vědecké výsledky Johna F. Nashe

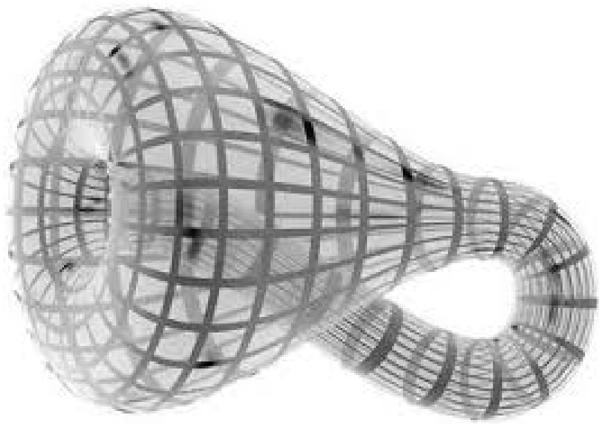
Nobelovu cenu získal John F. Nash zejména za práce týkající se teorie her, které mají uplatnění v ekonomii a sociologii. Existují hry pro více hráčů takové, že prohrává ten, kdo je první na tahu. Mějme například řadu 13 kamenů a každý ze dvou hráčů z ní bere 1, 2, anebo 3 kameny. Oba hráči se střídají a prohrává ten, kdo sebere poslední kámen. Vítězná strategie druhého hráče je tato:

Jestliže první hráč vezme $x \in \{1, 2, 3\}$ kamenů, pak druhý musí vzít $4 - x$ kamenů. Potom první zřejmě hráč prohraje, jak plyne z diagramu:

$$\bullet\bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet\bullet \mid \bullet$$

To pak vyvolává jakousi přirozenou rovnováhu, protože při zahájení hry nikdo nechce táhnout jako první, aby neprohrál.

Nashova rovnováha je v teorii her taková situace, kdy žádný z hráčů nemůže jednostrannou změnou zvolené strategie vylepšit svoji situaci [14]. Současně se jedná



Obr. 2. Kleinova láhev je uzavřená neorientovatelná plocha ve čtyřrozměrném eukleidovském prostoru $\mathbb{E}^4$, kterou lze vnořit do trojrozměrného prostoru $\mathbb{E}^3$. Nelze ji ale vložit do $\mathbb{E}^3$.

i o koncept řešení nekooperativních her více hráčů [15]. John Nash dokázal, že každá konečná hra má alespoň jedno takové řešení.

Abelovu cenu získal J. Nash za práce o teorii nelineárních parciálních diferenciálních rovnic a její aplikace na geometrickou analýzu. V roce 1954 publikoval v Annals of Mathematics zcela zásadní článek [16]. Jeho na tehdejší dobu velice překvapivé výsledky se týkají izometrických[3] vnoření (angl. *immersion*) a vložení[4] (angl. *imbedding*) Riemannových variet s pozitivně definitní metrikou do k-rozměrných eukleidovských prostorů $\mathbb{E}^k$. Na ukázku uveďme některé důležité matematické výsledky z práce [16]:

Věta 1. *Pro každou uzavřenou n-rozměrnou Riemannovu varietu existuje izometrické C^1-vložení do $\mathbb{E}^{2n}$.*

Věta 2. *Pro každou n-rozměrnou Riemannovu varietu existuje izometrické C^1-vnoření do $\mathbb{E}^{2n}$ a izometrické C^1-vložení do $\mathbb{E}^{2n+1}$.*

Věta 3. *Pokud pro uzavřenou n-rozměrnou Riemannovu varietu existuje C^∞-vnoření (resp. vložení) do $\mathbb{E}^k$ pro nějaké $k \geq n+2$, pak existuje izometrické vnoření (resp. vložení) do $\mathbb{E}^k$.*

Tato tvrzení rozšířil J. Nash na C^3-vložení v pokračování [17] uveřejněném rovněž v Annals of Mathematics.

Na ukázku nyní popíšeme jednu úlohu z oblasti nelineárních parciálních diferenciálních rovnic, kterou se John Nash podrobně zabýval. Zatímco teorie lineárních parciálních rovnic je v podstatě uzavřenou disciplínou, teorie nelineárních rovnic se stále buduje. Každá třída nelineárních problémů se totiž musí vyšetřovat individuálně. K tomuto účelu je třeba vyvinout speciální důkazové techniky využívající příslušného

[3] Izometrie je zobrazení zachovávající vzdálenosti.

[4] Příslušné definice lze najít např. v [11, s. 137–138]. Poznamenejme, že při vložení je vzor difeomorfní se svým obrazem. Přitom každé vložení je zároveň vnoření, ale obrácené tvrzení neplatí. Při vnoření je vzor pouze lokálně difeomorfní a obecně nemusí jít o vzájemně jednoznačné zobrazení globálně. Například známou Kleinovu láhev (ale i všechny další dvourozměrné neorientovatelné uzavřené plochy) lze vnořit do $\mathbb{E}^3$, kde se tato plocha protíná, ale nelze ji vložit do $\mathbb{E}^3$ (viz obr. 2).

tvaru nelinearit. V článku [19] Nash vyšetřuje nelineární úlohu proudění viskózní tepelně vodivé stlačitelné tekutiny

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} &= -\rho\nabla\cdot v,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\nabla p}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}+F(x,t), \qquad (1)\\
\rho T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \nabla\cdot(\varkappa\nabla T)+\frac{\eta}{2}\Big[\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}+\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell}\Big]\zeta(\nabla\cdot v)^2,
\end{aligned}$$

kde

$$\sigma'_{ik}=\eta\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big)+\Big(\zeta-\frac{2}{3}\eta\Big)\delta_{ik}\frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell},$$

T je teplota a ρ hustota tekutiny, $v=(v_1,v_2,v_3)$ je její rychlost, p je tlak, F je hustota vnějších objemových sil, η a ζ jsou koeficienty viskozity[5], S je entropie, $[M_{ij}]^2$ označuje $M_{ik}M_{ik}$ se standardní Einsteinovou sumační konvencí a $\mathrm{d}/\mathrm{d}t=\partial/\partial t+v_k\partial/\partial x_k$ je lagrangeovská časová derivace. Nash předpokládá, že entropie závisí na hustotě i teplotě (tj. $S=S(\rho,T)$). Pro teplotu pak odvozuje další parciální diferenciální rovnici, kterou využije k důkazu existence a jednoznačnosti řešení soustavy (1) za jistých předpokladů na data úlohy.

4. Stručný životopis Louise Nirenberga

Louis Nirenberg se narodil dne 28. února 1925 v kanadském Hamiltonu. Matematiku a fyziku studoval na McGillově universitě v Montrealu a získal titul bakaláře. Magisterský titul obdržel na New York University. Na konci války působil v National Research Council of Canada, kde pracoval v matematickém oddělení, které založil fyzik Ernest Courant, syn slavného matematika Richarda Couranta. Nirenberg pak získal místo v Courantově matematickém ústavu Newyorské univerzity. V roce 1957 se stal profesorem a v létech 1970–1972 působil ve funkci ředitele Courantova ústavu.

L. Nirenberg má za sebou dlouhou a úspěšnou matematickou kariéru. Mnoho výsledků nese jeho jméno, např. Gagliardovy–Nirenbergovy interpolační nerovnosti, Nirenbergova teorie pseudodiferenciálních operátorů, Caffarelliovy–Kohnovy–Nirenbergovy nerovnosti, Johnova–Nirenbergova nerovnost či Johnův–Nirenbergův prostor. Za své matematické výsledky získal L. Nirenberg Bôcherovu medaili Americké matematické společnosti (1959), Crafoordovu cenu Švédské královské akademie věd (1982), Jefferyovu–Williamsovu cenu (1987), Steelovu cenu Americké matematické společnosti (1994, 2014), Chernovu medaili od Mezinárodní matematické unie (2010) aj. Další životopisné údaje lze nalézt v následujícím článku [8].

5. Vybrané vědecké výsledky Louise Nirenberga

Mezi nejdůležitější Nirenbergovy práce patří článek [21] s jeho studentem Augustem Newlanderem o komplexních strukturách, který vyšel v Annals of Mathematics v roce 1957. V článku [1] z roku 1959 Louis Nirenberg se Shmuelem Agmonem a Avronem

[5] Koeficient η se anglicky nazývá *shear viscosity* a ζ *bulk viscosity*.

Douglisem vytvořil teorii regularity řešení eliptických rovnic. Pak v roce 1961 společně s Fritzem Johnem zavedl v [9] nové speciální funkcionální prostory (functions with bounded mean oscillation). V další významné práci [10] z roku 1978 se Nirenberg s Davidem Kinderlehrerem a Joelem Spruckem zabýval regularitou řešení okrajových problémů s volnou hranicí.

O rok později napsal Loius Nirenberg s Basilisem Gidasem a Wei Ming Ni zcela zásadní článek o symetriích řešení nelineárních parciálních diferenciálních rovnic [4], který získal okolo tisíce citací. Na ukázku si z něj uveďme typickou větu.

Věta 4. *Nechť $u \in C^2(\overline{\Omega})$ je řešení úlohy*

$$\Delta u + f(u) = 0 \qquad \text{a} \qquad u = 0 \ \textit{pro} \ \ |x| = R,$$

kde $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| < R\}$ je koule a f je třídy C^1. Je-li $u > 0$ na Ω, pak řešení u je sféricky symetrické a $\partial u/\partial r < 0$ pro všechna $r \in (0, R)$.

Autoři tuto větu dále zobecňují na prstencové oblasti a také na evoluční parabolické úlohy typu

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \Delta u + f(t, r, u) = 0 \qquad \text{a} \qquad u = 0 \text{ pro } |x| = R$$

s vhodnými počátečními podmínkami.

V roce 1983 napsal Loius Nirenberg s Haïmem Brezisem další důležitý článek[6] o kladných řešeních nelineárních parciálních diferenciálních rovnic [2], který rovněž získal okolo tisíce citací. Jeho autoři uvažují na ohraničené oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pro $n \geq 3$ nelineární eliptickou okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u^p + f(x, u) \quad \text{v } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

kde $p = (n + 2)/(n - 2)$, $f(x, 0) = 0$ a $f(x, u)$ je perturbace nízkého stupně vzhledem k u^p, tj.

$$\lim_{u \to \infty} \frac{f(x, u)}{u^p} = 0.$$

Variační řešení úlohy (2) se hledá v Sobolevově prostoru

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in (L^2(\Omega))^n,\ v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

a převádí se na minimalizaci funkcionálu

$$\Phi(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} - F(x, u)\Big)\,\mathrm{d}x,$$

kde $F(x, u) = \int_0^u f(x, v)\,\mathrm{d}v$. Poznamenejme, že pro exponent $p + 1 = 2n/(n - 2)$ není vnoření $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ kompaktní, což je hlavním zdrojem potíží. Není totiž splněna Palaisova–Smaleova podmínka zaručující existenci kritických bodů funkcionálu Φ. Označíme-li λ_1 nejmenší vlastní číslo operátoru $-\Delta$ s homogenními okrajovými podmínkami, pak platí následující tvrzení [2]:

[6]Profesor Brezis přednášel o těchto výsledcích i v Matematickém ústavu ČSAV v Praze.

Věta 5. *Pro každé $n \geq 4$ a $\lambda \in (0, \lambda_1)$ má úloha* (2) *variační řešení pro $f(x,u) = \lambda u$.*

Věta 6. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{E}^3$ je koule a $f(x,u) = \lambda u$. Pak má úloha* (2) *variační řešení právě tehdy, když $\lambda \in \left(\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1\right)$.*

Hlavní výsledek obsáhlého článku [3] o lokální regularitě řešení Navierových–Stokesových rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p &= f, \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

pro dané počáteční a okrajové podmínky na parabolickém válci

$$Q_r(x,t) = \{|y - r| < r,\ t - r^2 < \tau < t\}$$

lze formulovat přibližně takto: pokud pro rychlost u a tlak p existují konstanty ε_1 a $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(q)$ takové, že

$$\iint\limits_{Q_1} (|u|^3 + |u||p|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} \Big(\int_{|x|<1} |p|\,\mathrm{d}x\Big)^{5/4} \mathrm{d}t \leq \varepsilon_1$$

a $\iint_Q |f|^q \leq \varepsilon_2$ pro nějaké $q > 5/2$, pak u je hladké na $Q_{1/2}$. Za tento článek získal Louis Nirenberg se spoluautory Luisem A. Caffarellim a Robertem V. Kohnem v roce 2014 American Mathematical Society Steele Prize for Seminal Contribution to Research.

6. Závěr

V důsledku vážné Nashovy choroby databáze Mathematical Reviews eviduje pouze 26 jeho vědeckých prací, které však získaly přes 1 600 citací. To je naprosto vynikající průměr na jednu práci. Přitom šest prací bylo publikováno v Annals of Mathematics. Každý z článků [15] a [18] získal kolem 300 citací. I když Nash nenapsal s Nirenbergem žádnou společnou práci, byl jím podstatně ovlivněn (viz např. [18]). John Nash psal většinou sám. Na druhé straně Loius Nirenberg psal hlavně se spoluautory. Publikoval přes 170 vědeckých článků, které eviduje databáze Mathematical Reviews. Získal na ně neuvěřitelných 10 000 citací od 5 800 autorů.

Poděkování. Autor děkuje Radimu Hoškovi, Šárce Nečasové a Jakubu Šístkovi za inspirující diskuze. Článek byl podpořen RVO 67985840 České republiky.

L i t e r a t u r a

[1] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L.: *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I.* Comm. Pure Appl. Math. *12* (1959), 623–727.

[2] Brézis, H., Nirenberg, L.: *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Comm. Pure Appl. Math. *36* (1983), 437–477.

[3] Caffarelli, L., Kohn, R., Nirenberg, L.: *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Comm. Pure Appl. Math. *35* (1982), 771–831.

[4] Gidas, B., Ni, W. M., Nirenberg, L.: *Symmetry and related properties via the maximum principle.* Comm. Math. Phys. *68* (1979), 209–243.

[5] Helsvig, K.: *The Abel Prize: The missing Nobel in mathematics?*

[6] Holden, H., Riene, R. (eds.): *The Abel Prize 2003–2007. The first five years.* Springer--Verlag, Berlin, New York, 2009.

[7] Holden, H., Riene, R. (eds.): *The Abel Prize 2008–2012.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 2014.

[8] Jacksonová, A.: *Rozhovor s Louisem Nirenbergem.* PMFA *60* (2015), 284–293.

[9] John, F., Nirenberg, L.: *On functions of bounded mean oscillation.* Comm. Pure Appl. Math. *14* (1961), 415–426.

[10] Kinderlehrer, D., Nirenberg, L., Spruck, J.: *Regularity in elliptic free boundary problems.* J. Anal. Math. *34* (1978), 86–119.

[11] Kowalski, O., Křížek, M., Pravda, V.: *Nejsymetričtější variety.* PMFA *59* (2014), 135–145.

[12] Křížek, M., Somer, L., Markl, M., Kowalski, O., Pudlák, P., Vrkoč, I.: *Prvních deset Abelových cen za matematiku.* JČMF, Praha, 2013.

[13] Nash, J.: *The bargaining problem.* Econometrica *18* (1950), 155–162.

[14] Nash, J.: *Equilibrium points in n-person games.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA *36* (1950), 48–49.

[15] Nash, J.: *Non-cooperative games.* Ann. of Math. *54* (1951), 286–295.

[16] Nash, J.: C^1 *isometric imbeddings.* Ann. of Math. *60* (1954), 383–396.

[17] Nash, J.: *The imbedding problem for Riemannian manifolds.* Ann. of Math. *63* (1956), 20–63.

[18] Nash, J.: *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations.* Amer. J. Math. *80* (1958), 931–954.

[19] Nash, J.: *Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général.* Bull. Soc. Math. France *90* (1962), 487–497.

[20] Nash and Nirenberg awarded 2015 Abel Prize. Notices Amer. Math. Soc. *62* (2015), 670–672.

[21] Newlander, A., Nirenberg, L.: *Complex analysis coordinates in almost complex manifolds.* Ann. of Math. *65* (1957), 391–404.

[22] `http://www.abelprisen.no/en/`