

Jan Brandts; Apo Cihangir; Michal Křížek
Součet úhlů ve čtyřstěnu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 60 (2015), No. 2, 113–122

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144405>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2015

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Součet úhlů ve čtyřstěnu

Věnováno RNDr. Milanu Prágerovi, CSc., k jeho 85. narozeninám

Jan Brandts, Apo Cihangir, Amsterdam, Michal Krížek, Praha

Kolik je součet úhlů v rovinném trojúhelníku? Odpověď je dobře známá: 180° , tj. π radiánů. Méně je ovšem známá odpověď na podobnou otázku pro čtyřstěn. V tomto článku nejprve podáme přehled klasických výsledků z článku [5] J. W. Gadduma, že pro součet Σ dihedrálních úhlů měřených v radiánech mezi stěnami čtyřstěnu platí $2\pi < \Sigma < 3\pi$ a pro součet A prostorových úhlů ve steradiánech ve vrcholech je $0 < A < 2\pi$. Ukážeme, že tyto odhady jsou optimální v tom smyslu, že je nelze zlepšit. Podle [1] však pro netupoúhlé čtyřstěny platí lepší odhady $2\pi < \Sigma < 2.5\pi$ a $0 < A < \pi$. Takové čtyřstěny mají celou řadu důležitých aplikací — viz [3].

1. Úvod

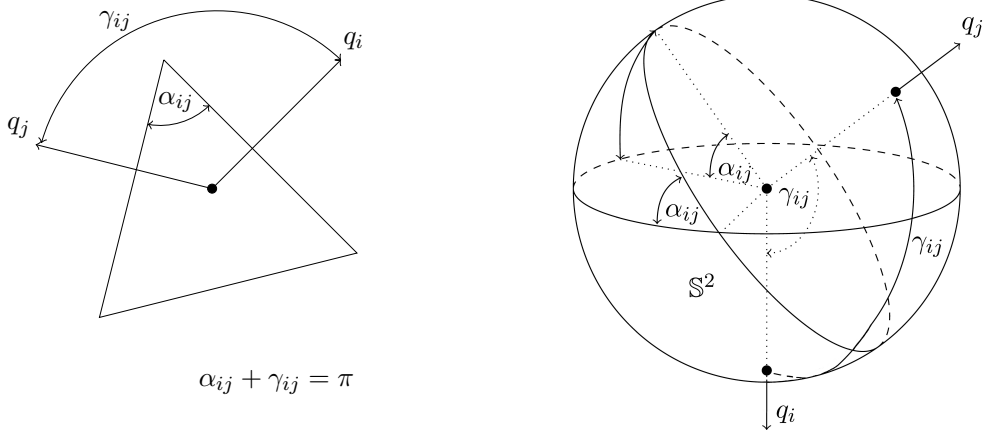
V roce 1952 řešil J. W. Gaddum v článku [5] otázku součtu úhlů ve čtyřstěnu. Připomeňme, že *dihedrální úhel* mezi dvěma stěnami čtyřstěnu je doplňkový úhel α_{ij} k úhlu γ_{ij} mezi dvěma vnějšími normálami q_i a q_j k těmto stěnám, tj. $\alpha_{ij} + \gamma_{ij} = \pi$. Tato definice zobecňuje pojem úhlu v trojúhelníku, viz levá část obr. 1. Poznamenejme, že γ_{ij} je roven tzv. *sférické vzdálenosti* na sféře S^2 mezi jednotkovými vnějšími normálami, viz pravá část obr. 1. Zde jsou kromě vnějších normál q_i a q_j nakresleny také dvě hlavní kružnice, které jsou průnikem ortogonálních doplňků q_i a q_j s jednotkovou sférou S^2 , tj. povrchem koule o poloměru 1. Všimněme si, že dihedrální úhel α_{ij} je vlastně úhel mezi rovinami obsahujícími obě hlavní kružnice.

Označme Σ součet všech šesti dihedrálních úhlů daného čtyřstěnu \mathcal{T} a Γ součet sférických vzdáleností na S^2 mezi každými páry čtyř vnějších jednotkových normál ke stěnám čtyřstěnu \mathcal{T} . Pak zřejmě platí

$$\Sigma + \Gamma = 6\pi. \quad (1)$$

Množina bodů na sféře S^2 se nazývá *globální*, jestliže neleží v jedné uzavřené hemisféře (tj. polosféře). Gaddum v článku [5] hledal extrémy *součtu sférických vzdáleností* Γ globální čtyřbodové množiny na S^2 , aby dokázal, že Σ může nabývat jakékoliv hodnoty větší než 2π a menší než 3π . Přitom množina čtyř bodů na S^2 je globální právě tehdy, když je to množina vnějších normál čtyřstěnu.

Assoc. Prof. JAN BRANDTS, Ph.D., APO CIHANGIR, MSc., Korteweg-de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam, P.O. Box 94248, 1090 GE Amsterdam, Nizozemí, e-mail: J.H.Brandts@uva.nl, A.Cihangir@uva.nl, prof. RNDr. MICHAL KRÍŽEK, DrSc., Matematický ústav AV ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: krizek@math.cas.cz



Obr. 1. Vlevo: součet dihedrálního úhlu mezi dvěma stěnami a úhlu mezi jejich vnějšími normálami je π . Vpravo: na úhel mezi normálami ke sféře lze nahlížet jako na sférickou vzdálenost.

Ve 2. kapitole si podrobně připomeneme Gaddumovy odhady pro součet dihedrálních úhlů ve čtyřstěnu. Ve 3. a 4. kapitole předložíme nedávné výsledky z [1], které platí pro *netupoúhlý čtyřstěn*, jehož žádný ze 6 dihedrálních úhlů nepřevyšuje pravý úhel. Tato důležitá třída čtyřstěnu je studována např. v [2], [3], [4]. Až do dodatku odsuneme příslušné důkazy, které jsou založeny na konvexní optimalizaci na sféře na rozdíl od Gaddumových důkazů z [6]. Domníváme se, že Gaddumův přístup nemůže být použit k získání optimálních (tj. nezlepšitelných) odhadů součtu dihedrálních úhlů pro netupoúhlé čtyřstěny. Na druhé straně ani náš důkaz (viz dodatek) nelze zobecnit tak, aby umožňoval získat Gaddumovy odhady.

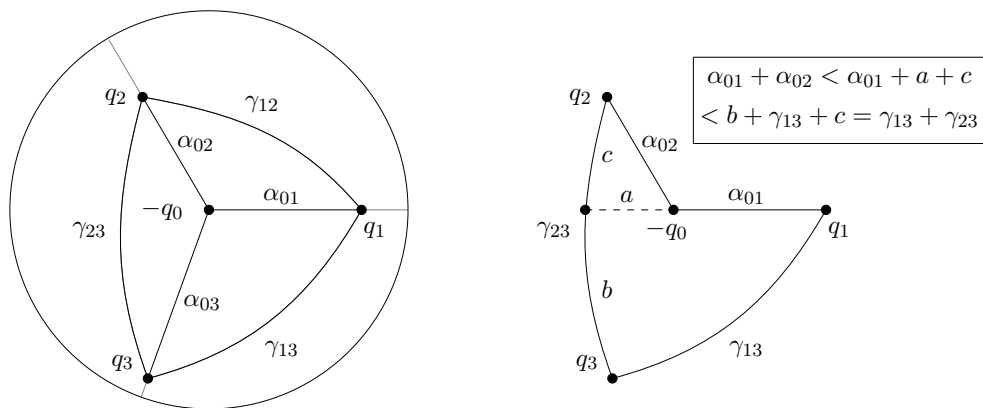
2. Gaddumovy odhady pro součty dihedrálních a prostorových úhlů

Nechť Q je množina 4 vnějších jednotkových normál q_0, q_1, q_2 a q_3 ke stěnám čtyřstěnu \mathcal{T} a nechtě $T_j \subset S^2$ je sférický trojúhelník [7, s.83] s množinou vrcholů $Q_j = Q \setminus \{q_j\}$. Zřejmě $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 = S^2$ a vnitřky T_j jsou po dvou disjunktní. Označme γ_{ij} sférickou vzdálenost mezi q_i a q_j , tj. úhel mezi q_i a q_j , a nechtě $\alpha_{ij} = \pi - \gamma_{ij}$. Nyní shrneme Gaddumovy argumenty ukazující, že součet dihedrálních úhlů Σ čtyřstěnu \mathcal{T} a odpovídající suma prostorových vzdáleností Γ splňují nerovnosti

$$2\pi < \Sigma = \sum_{i < j} \alpha_{ij} < 3\pi \quad \text{nebo podle (1) ekvivalentně} \quad 3\pi < \Gamma = \sum_{i < j} \gamma_{ij} < 4\pi, \quad (2)$$

které si nyní dokážeme.

Gaddum vtipně využil skutečnost, že Q neleží v jedné hemisféře. Povšiml si, že $-q_j \in T_j$ pro všechna j a že sférická vzdálenost mezi $-q_0$ a q_j se rovná α_{0j} , jak je znázorněno v levé části obr. 2.



Obr. 2. Vlevo: opačně orientovaný vektor $-q_0$ k q_0 leží ve sférickém trojúhelníku T_0 s vrcholy q_1 , q_2 a q_3 . Vpravo: trojúhelníková nerovnost dokazuje, že $\alpha_{01} + \alpha_{02} < \gamma_{13} + \gamma_{23}$.

Pomocí vztahů $\gamma_{0j} = \pi - \alpha_{0j}$ a (2) máme

$$\begin{aligned} \Sigma &= 6\pi - \Gamma = 3\pi - (\gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{23}) + 3\pi - (\gamma_{01} + \gamma_{02} + \gamma_{03}) \\ &= 3\pi - (\gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{23}) + (\alpha_{01} + \alpha_{02} + \alpha_{03}). \end{aligned} \quad (3)$$

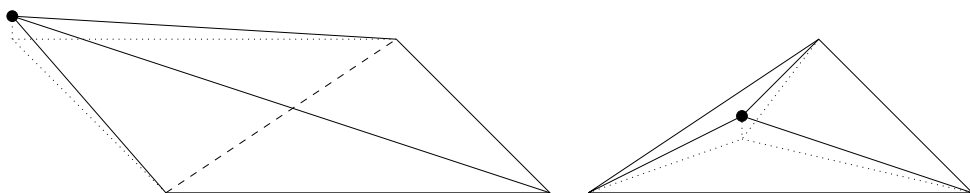
Použijeme-li dvakrát trojúhelníkovou nerovnost tak, jak je naznačeno na pravé části obr. 2, dostaneme $\alpha_{01} + \alpha_{02} < \gamma_{13} + \gamma_{23}$. Podobně odvodíme, že $\alpha_{01} + \alpha_{03} < \gamma_{12} + \gamma_{23}$ a $\alpha_{02} + \alpha_{03} < \gamma_{12} + \gamma_{13}$, což vede na

$$\alpha_{01} + \alpha_{02} + \alpha_{03} < \gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{23}.$$

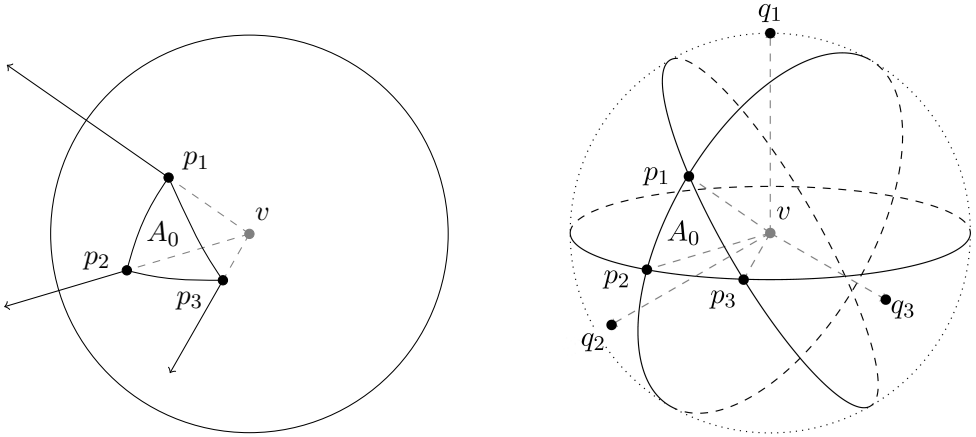
Dosazením do (3) a (1) dostaneme odhady $\Gamma > 3\pi$ a $\Sigma < 3\pi$.

Zbývající odhady $\Gamma < 4\pi$ a $\Sigma > 2\pi$ z (2) platí, protože obvod jakéhokoliv sférického trojúhelníku je menší než 2π . Tedy součet obvodů T_0 , T_1 , T_2 a T_3 je menší než 8π . Tento součet je ale zároveň 2Γ .

Ukažme nyní naopak, že každé $\Sigma \in (2\pi, 3\pi)$ je součtem dihedrálních úhlů nějakého čtyřstěnu \mathcal{T} . K tomu stačí uvažovat situaci na obr. 3 vpravo, kde vrchol vyznačený černým puntíkem lze posunout libovolně blízko k protější stěně. Pak se budou tři dihedrální úhly blížit nule a zbývající tři k π . Budeme-li spojitě posunovat vyznačený vrchol rovnoběžně s podstavou \mathcal{T} , dostaneme situaci v levé části obrázku, kde se čtyři dihedrální úhly blíží nule a dva k π , což dokazuje tvrzení.



Obr. 3. Čtyřstěn se součtem dihedrálních úhlů blížícím se k 2π (vlevo) a 3π (vpravo)



Obr. 4. Vlevo: prostorový úhel odpovídající vrcholu. Vpravo: jeho vztah k dihedralním úhlům v perspektivním pohledu z roviny tečné v bodě q_1 .

Gaddum také uvádí, jaké má tento přístup důsledky pro součet prostorových úhlů. Připomeňme, že *prostorový úhel* (angl. solid angle) ve vrcholu v čtyřstěnu \mathcal{T} je obsah (tj. dvojrozměrná míra) $|A_0|$ průniku A_0 jednotkové sféry se středem ve vrcholu v a nejmenšího trojhranného kuželu s vrcholem v , který obsahuje \mathcal{T} , jak nakresleno v levé části obr. 4.

Girardova věta pro *sférický excés* říká, že (viz např. [7, s. 84])

$$|A_0| = \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{23} - \pi,$$

kde α_{12} , α_{13} a α_{23} jsou úhly sférického trojúhelníku A_0 . Jak je ovšem patrné z obr. 1, jsou to zároveň dihedralní úhly mezi třemi stěnami čtyřstěnu \mathcal{T} , které procházejí vrcholem v . Normály k těmto stěnám jsou schematicky znázorněny v pravé části obr. 4. Jako důsledek dostáváme, že součet A prostorových úhlů A_0, A_1, A_2, A_3 čtyřstěnu a součet Σ jeho dihedralních úhlů splňují

$$A = 2\Sigma - 4\pi, \quad \text{což podle (2) dává } 0 < A < 2\pi. \quad (4)$$

Příklady čtyřstěně, jejichž součet prostorových úhlů se blíží tomuto dolnímu a hornímu odhadu, jsou znázorněny na obr. 3. Výsledky této kapitoly můžeme shrnout do následující věty.

Věta 1 (Gaddumova). *Pro součet dihedralních úhlů Σ a součet prostorových úhlů A libovolného čtyřstěnu platí*

$$2\pi < \Sigma < 3\pi \quad \text{a} \quad 0 < A < 2\pi.$$

Navíc každé hodnoty z těchto intervalů se pro nějaký čtyřstěn nabývá.

3. Nové odhady pro součty úhlů netupoúhlých čtyřstěně

Níže uvedená věta 2 je speciálním případem věty z [1], v níž jsou stanoveny optimální odhady pro všechny netupoúhlé n -simplexy. Pro netupoúhlé čtyřstěny dostáváme užší

intervaly, v nichž leží součty uvažovaných úhlů, než pro libovolné čtyřstěny (srov. Gaddumovu větu).

Věta 2. *Pro součet dihedrálních úhlů Σ a součet prostorových úhlů A libovolného netupouhlého čtyřstěnu platí*

$$2\pi < \Sigma < \frac{5}{2}\pi \quad \text{a} \quad 0 < A < \pi. \quad (5)$$

Navíc každé hodnoty z těchto intervalů se pro nějaký netupouhlý čtyřstěn nabývá.

Je patrné, že dolní odhady v (5) nelze zlepšit pro netupouhlý (dokonce ostroúhlý) čtyřstěn s vrcholy $(1, 0, \pm\varepsilon)$ a $(-1, \pm\varepsilon, 0)$ pro $\varepsilon \rightarrow 0$. Větu 2 dokážeme pomocí optimalizace na polárních sférických trojúhelnících. Náš důkaz věty 2 využívá konceptu *polárního trojúhelníka* T° ke sférickému trojúhelníku T s vrcholy p_1, p_2 a p_3 . Nechť q_j je pro každé $j \in \{1, 2, 3\}$ jednotkový normálový vektor k rovině $F_{i\ell}$ obsahující vektory p_i a p_ℓ pro $i \neq j \neq \ell$ s orientací takovou, že q_j a p_j leží na stejné straně jako $F_{i\ell}$. Pak T° je sférický trojúhelník s vrcholy q_1, q_2 a q_3 .

Pro $r \in \mathbb{S}^2$ označme $H(r)$ tu uzavřenou hemisféru, jejíž body jsou vzdáleny nejvýše $\frac{1}{2}\pi$ od r na sféře \mathbb{S}^2 . Vidíme, že $s \in H(r)$ právě tehdy, když $r \in H(s)$.

Lemma 1. *Polární trojúhelník T° ke sférickému trojúhelníku T s vrcholy r_1, r_2, r_3 je množina bodů, které jsou vzdáleny nejvýše $\frac{1}{2}\pi$ od každého z vrcholů T ,*

$$T^\circ = H(r_1) \cap H(r_2) \cap H(r_3).$$

Jako důsledek máme

$$x \in T^\circ \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, 3\} : x \in H(r_i) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, 3\} : r_i \in H(x) \Leftrightarrow T \subset H(x),$$

což ukazuje, že T° je množina severních pólů, pro něž T je na severní hemisféře.

Celá situace je znázorněna v pravé části obr. 4. Sférickému trojúhelníku s vrcholy q_1, q_2 a q_3 odpovídá polární trojúhelník s vrcholy p_1, p_2 a p_3 . Poznamenejme, že naopak sférickému trojúhelníku s vrcholy p_1, p_2 a p_3 odpovídá polární trojúhelník s vrcholy q_1, q_2 a q_3 . Platí tedy $(T^\circ)^\circ = T$.

Normály stěn čtyřstěnu definují vrcholy čtyř sférických trojúhelníků. Nyní dokážeme, že pro netupouhlý čtyřstěn každý takový trojúhelník obsahuje odpovídající polární trojúhelník.

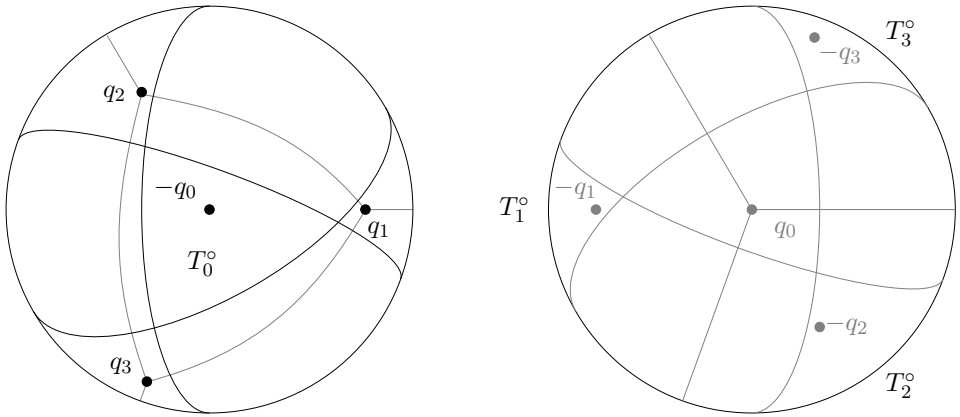
Věta 3. *Nechť $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \subset \mathbb{S}^2$ je množina jednotkových vnějších normál stěn netupouhlého čtyřstěnu. Pak pro každé $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ je*

$$-q_j \in T_j^\circ \subset T_j,$$

kde T_j je sférický trojúhelník s vrcholy z množiny $Q_j = Q \setminus \{q_j\}$.

Důkaz. Čtyřstěn je netupouhlý právě tehdy, když $T_j \subset H(-q_j)$ pro všechna j , což jinak řečeno znamená, že q_j má sférickou vzdálenost nejvýše pravý úhel od každé z ostatních normál. Podle lemmatu 1 je to ekvivalentní vztahu $-q_j \in T_j^\circ$. Dále podle definice leží vnitřek T_j° uvnitř $H(q_i)$ pro všechna $i \neq j$, zatímco T_i leží v $H(-q_i)$ pro všechna $i \neq j$. Jestliže tedy $i \neq j$, pak vnitřek T_j° nemá společný bod s T_i . To dokazuje, že vnitřek T_j° leží uvnitř T_j , a tudíž $T_j^\circ \subset T_j$. \square

Smysl věty 3 je znázorněn na obr. 5. Netupouhlé čtyřstěny lze totiž popsat pomocí polárních trojúhelníků. Vidíme, že plochy čtyř polárních trojúhelníků na hemisféře odpovídají prostorovým úhlům $|A_0|, |A_1|, |A_2|$ a $|A_3|$ daného netupouhlého čtyřstěnu.



Obr. 5. Znázornění významu věty 3, kde q_0 označuje jižní pól. Vlevo se díváme na sféru \mathbb{S}^2 shora. Vidíme, že $-q_0 \in S_0^\circ \subset S_0$ a $q_j \in -S_j^\circ \subset -S_j$ pro $j \in \{1, 2, 3\}$. Vpravo se díváme dolů *dovnitř* jižní hemisféry, z níž je odstraněna severní hemisféra.

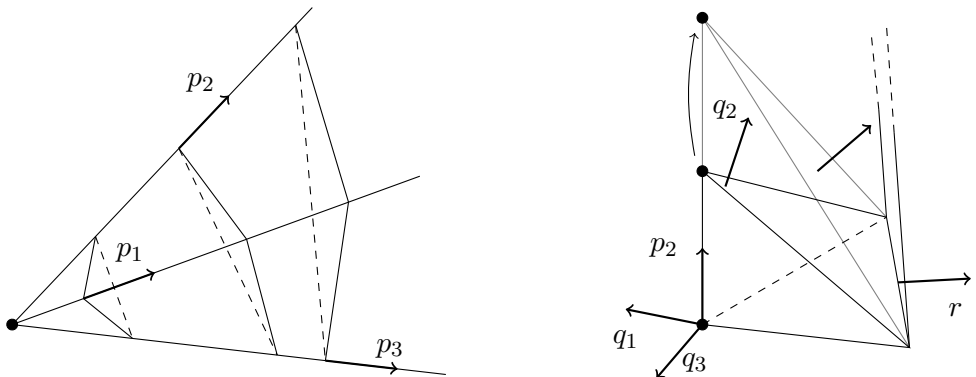
4. Optimalizace součtu dihedrálních úhlů na polárních trojúhelnících

Označme $d_p(x)$ sférickou vzdálenost k danému bodu $p \in \mathbb{S}^2$ a definujme (srov. obr. 5)

$$g_0 : T_0^\circ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto d_{q_1}(x) + d_{q_2}(x) + d_{q_3}(x).$$

Podle obr. 2 platí $g_0(-q_0) = \alpha_{01} + \alpha_{02} + \alpha_{03}$, což je vlastně součet dihedrálních úhlů mezi stěnou čtyřstěnu s normálou q_0 s ostatními třemi stěnami. Uvažujme $x \in T_0^\circ$ jako proměnnou probíhající všechny možné pozice této stěny tak, aby nevytvořila tupý úhel se žádnou s dalších stěn, jejichž normály jsou fixovány.

Levá část obr. 6 ilustruje tři možnosti polohy stěny odpovídající $x = p_1$, $x = p_2$ a $x = p_3$. Poznamenejme, že pokud $x = p_i$, pak x je kolmé k q_ℓ pro $\ell \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$.



Obr. 6. Vlevo: první optimalizační krok. Tři polohy stěny odpovídající $x = p_1$, $x = p_2$ a $x = p_3$. Vpravo: druhý optimalizační krok.

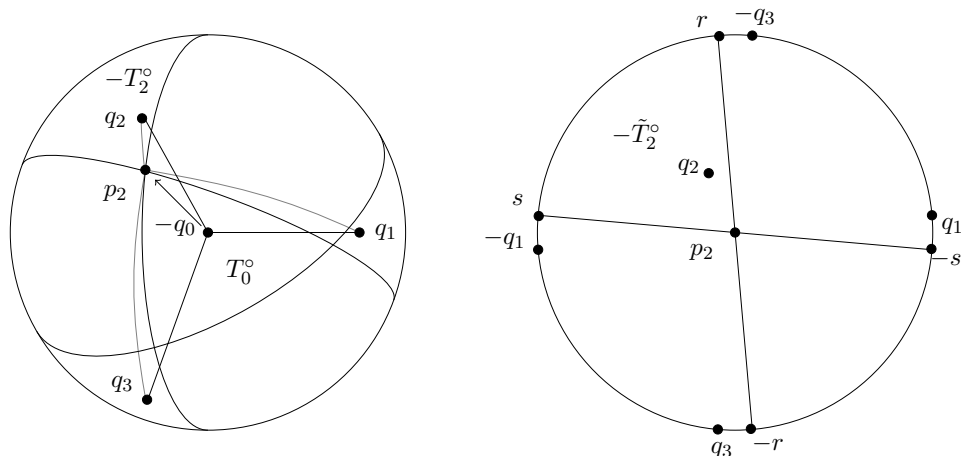
Následující věta ukazuje, že jedna z těchto tří možností maximalizuje g_0 přes T_0° .

Věta 4. *Nechť ℓ je takové, že $d_{p_j}(q_j) \leq d_{p_\ell}(q_\ell)$ pro všechna $j \in \{1, 2, 3\}$. Pak pro všechna $x \in T_0^\circ$ platí*

$$g_0(x) \leq g_0(p_\ell) = \pi + d_{p_\ell}(q_\ell). \quad (6)$$

Důkaz plyne z věty 5 uvedené v dodatku.

Bez újmy na obecnosti můžeme dále předpokládat, že podle věty 4 je $g_0(x)$ maximální pro $x = p_2$, jak je znázorněno v levé části obr. 7. To znamená, že součet dihedrálních úhlů Σ čtyřstěnu \mathcal{T} s normálami q_0, q_1, q_2 a q_3 nepřevyšuje součet dihedrálních úhlů $\hat{\Sigma}$ netupouhlého čtyřstěnu $\hat{\mathcal{T}}$ s normálami $-p_2, q_1, q_2$ a q_3 . Normály $\hat{\mathcal{T}}$ jsou znázorněny v pravé části obr. 7, kde vrchol p_2 je zvolen v severním pólu.



Obr. 7. Vlevo: součet vzdáleností $x \in T_0^\circ$ od q_1, q_2, q_3 je největší pro $x = p_2$. Vpravo: součet vzdáleností $x \in -\tilde{T}_2^\circ$ od $-q_1, p_2, -q_3$ je největší pro $x = r$.

Dále odhadneme součet dihedrálních úhlů čtyřstěnu $\hat{\mathcal{T}}$. Podle naší konstrukce leží nyní q_1 a q_3 na rovníku a q_2 leží v polárním trojúhelníku $-\tilde{T}_2^\circ$ ke sférickému trojúhelníku s vrcholy $-q_1, -q_3$ a p_2 . Poznamenejme, že vrcholy $-\tilde{T}_2^\circ$ jsou r, s a p_2 , a tedy p_2 je vrchol jak sférického trojúhelníku, tak i jemu odpovídajícího polárního trojúhelníku.

Můžeme užít stejný argument jako ve větě 4. Toho lze dosáhnout tím, že budeme uvažovat q_2 jako proměnnou, která se může volně pohybovat v $-\tilde{T}_2^\circ$ tak, aby odpovídající čtyřstěn zůstal netupouhlý. Vrchol $-\tilde{T}_2^\circ$, v němž se nabývá maxima ve větě 4, není p_2 , protože se shoduje s vrcholem poláry. Tudíž maxima se nabývá ve vrcholu $-\tilde{T}_2^\circ$ na rovníku, řekněme r . Tento druhý optimalizační krok je znázorněn v pravé části obr. 6, kde se normála q_2 postupně přesouvá na r , zatímco normály $q_1, -p_2$ a q_3 zůstávají pevné.

K dokončení důkazu uvedeme, že vzájemné vzdálenosti tří vrcholů q_1, q_3, r ležících na rovníku dávají v součtu 2π . Každý z nich má vzdálenost $\frac{1}{2}\pi$ k severnímu pólu p_2 . Tedy součet jejich vzdáleností se rovná $\frac{7}{2}\pi$. Odtud a z (6) již plyne $2\pi < \Sigma < \frac{5}{2}\pi$. Ze vztahu (4) pak dostaneme $0 < A < \pi$, tj. platí (5).

5. Závěrečné poznámky

Horní odhad z (5) pro součet dihedrálních úhlů netupoúhlého čtyřstěnu je menší než podobný horní odhad z (2) pro obecný čtyřstěn. V článku [6] z roku 1956 Gaddum zobecnil své výsledky na vícerozměrný případ. Pro součet dihedrálních úhlů Σ_n libovolného n -rozměrného simplexu dokázal optimální odhady z tab. 1. V článku [1] jsou tyto výsledky zesíleny na netupoúhlé n -rozměrné simplexu. Poznamenejme, že odhady pro netupoúhlé simplexu jsou mnohem těsnější než pro obecné simplexu, jakmile dimenze n vzrůstá. Je to dobře patrné z následující tabulky (viz např. poslední sloupec):

n	3	4	5	6	7	8	9	10
	4	8	12	18	24	32	40	50
	5	9	14	20	27	35	44	54
	6	12	20	30	42	56	72	90

Tab. 1. Dolní a horní odhady součtu dihedrálních úhlů pro n -rozměrné simplexu vyjádřené v násobcích pravého úhlu. Druhý řádek: dolní odhady pro obecné i netupoúhlé simplexu. Třetí řádek: horní odhady pro netupoúhlé simplexu. Čtvrtý řádek: horní odhady pro obecné simplexu.

Délka intervalu odpovídající Σ_n pro netupoúhlé simplexu dělená délkou intervalu pro obecné simplexu se blíží k nule pro $n \rightarrow \infty$. Tato pozorování mohou pomoci dokázat nebo vyvrátit některé domněnky týkající se netupoúhlých simplicialních triangulací polytopických oblastí zejména pro případ $n = 4$, viz [3].

Dodatek: Geodeticky konvexní množiny a funkce na S^2

Nejprve si připomeňme standardní definici geodetické konvexity na Riemannových varietách pro speciální případ jednotkové sféry S^2 . Množina $D \subset S^2$ se nazývá *sféricky konvexní*, jestliže pro každou dvojici $x, y \in D$ existuje minimalizující geodetika (tj. část hlavní kružnice) z bodu x do y obsažená v D . Funkce $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ na sféricky konvexní množině D se nazývá *sféricky konvexní funkce*, jestliže pro všechna $x, y \in D$ a rovnoměrnou parametrizaci γ (angl. the unit speed parametrization) minimalizující geodetiku mezi x a y je složená funkce

$$f \circ \gamma : [0, \phi(x, y)] \rightarrow \mathbb{R}$$

konvexní v běžném smyslu. Zde $\phi(x, y) \in [0, \pi]$ je sférická vzdálenost mezi x a y definovaná vztahem $\phi(x, y) = \arccos(x^T y)$.

Následující tvrzení lze najít v např. v [8].

- Sférický trojúhelník je sféricky konvexní.
- Součet sféricky konvexních funkcí je sféricky konvexní funkce.
- Sféricky konvexní funkce na sférickém trojúhelníku T nabývá svého maxima ve vrcholu T .

Lemma 2. Zúžení zobrazení d_p na $H(p)$ je sféricky konvexní pro všechna $p \in \mathbb{S}^2$.

Důkaz. Oblast $H(p)$ je zřejmě sféricky konvexní. Necht' jsou dány body $x, y \in H(p)$ takové, že $-y \neq x \neq y$. Geodetika mezi x a y je podmnožina geodetiky na \mathbb{S}^2 mezi dvěma opačně orientovanými vektory $-a$ a a , pro něž $a^T p = 0$. Položme $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$ a $e_3 = (0, 0, 1)^T$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p = e_1$ a $a = e_2$. Povšimněme si, že každá rovnoměrná parametrizace geodetiky $H(e_1)$ mezi $-e_2$ a e_2 je tvaru

$$\gamma_s : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \cos(t)e_2 + \sin(t)(se_1 + ce_3), \quad c = \sqrt{1 - s^2},$$

pro nějakou hodnotu $s \in [0, 1]$. Vektor $v = se_1 + ce_3$ je totiž libovolný bod na $H(e_1)$ kolmý na e_2 , viz levá část obr. 8. Podle definice sféricky konvexní funkce stačí dokázat, že pro všechna $s \in [0, 1]$ je složené zobrazení

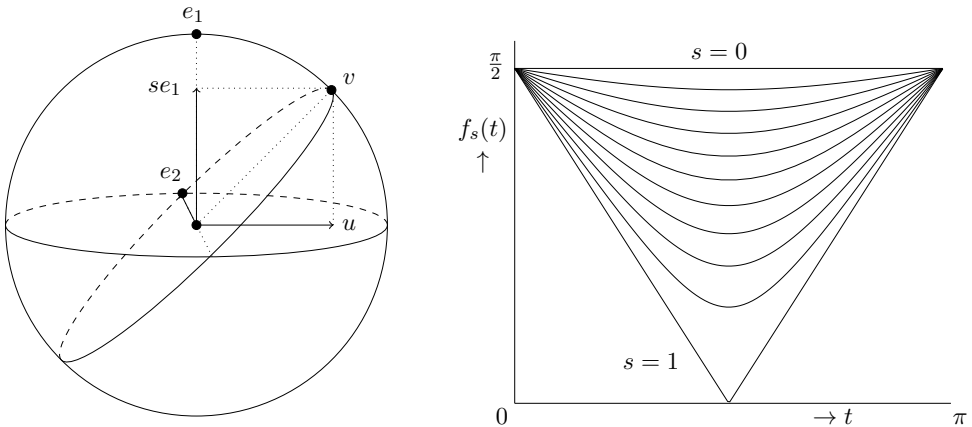
$$f_s = d_{e_1} \circ \gamma_s : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \arccos(e_1^T \gamma_s(t)) = \arccos(s \sin(t))$$

konvexní v obvyklém smyslu.

Zřejmě $f_1(t) = |\frac{1}{2}\pi - t|$. Pro $s \in [0, 1)$ je funkce f_s diferencovatelná a platí

$$f_s''(t) = (s - s^3) \sin(t)(1 - s^2 \sin^2(t))^{-\frac{3}{2}} \geq 0,$$

což bylo dokázati (viz graf v pravé části obr. 8). □



Obr. 8. Vlevo: Geodetická parametrizace pomocí γ_s na \mathbb{S}^2 (v perspektivním pohledu z roviny tečné v bodě e_1). Vpravo: grafy konvexních funkcí $f_s(t)$.

Nyní máme již vše připraveno k důkazu hlavního výsledku tohoto dodatku.

Věta 5. Necht' T_0 je sférický trojúhelník s vrcholy $Q_0 = \{q_1, q_2, q_3\}$. Pak je funkce

$$g_0 : T_0^\circ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto d_{q_1}(x) + d_{q_2}(x) + d_{q_3}(x)$$

sféricky konvexní na T_0° . Označíme-li $\{p_1, p_2, p_3\}$ množinu vrcholů T_0° očíslovaných tak, že $p_\ell^T q_\ell > 0$ pro všechna $\ell \in \{1, 2, 3\}$, pak platí

$$g_0(p_j) = \pi + d_{q_j}(p_j). \tag{7}$$

Tudíž g_0 je maximální v každém vrcholu p_j polárního trojúhelníku T_0° , pro nějž je $d_{q_j}(p_j)$ maximální.

Důkaz. Podle lemmatu 2 a věty 3 je d_{q_ℓ} sféricky konvexní na $T_0^\circ \subset H(q_\ell)$ pro každé $\ell \in \{1, 2, 3\}$, a tak jejich součet g_0 je také sféricky konvexní na T_0° . Tedy g_0 nabývá svého maxima ve vrcholu T_0° . Protože $p_j^T q_\ell = 0$ pro všechna $j \neq \ell$, máme $d_{q_\ell}(p_j) = \frac{1}{2}\pi$ pro každé $\ell \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j\}$, což dokazuje jak (7), tak i výsledné tvrzení věty. \square

Na závěr ještě poznamenejme, že součet vzdáleností k vrcholům sférického trojúhelníka T obecně není sféricky konvexní funkce na T . To vysvětluje, proč nelze zobecnit předkládané výsledky pro netupoúhlé čtyřstěny na libovolné čtyřstěny.

Poděkování. Práce byla podpořena grantem GA ČR P101/14-02067S a prostředky RVO 67985840.

L i t e r a t u r a

- [1] BRANDTS, J. H., CIHANGIR, A., KŘÍŽEK, M.: *Tight bounds on the dihedral angle sum of nonobtuse simplices*. Appl. Math. Comput. (2015), 12 pp.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.02.035>
- [2] BRANDTS, J. H., KOROTOV, S., KŘÍŽEK, M.: *Dissection of the path-simplex in \mathbb{R}^n into n path-subsimplices*. Linear Algebra Appl. 21 (2007), 382–393.
- [3] BRANDTS, J. H., KOROTOV, S., KŘÍŽEK, M., ŠOLC, J.: *On acute and nonobtuse simplicial partitions*. SIAM Rev. 51 (2009), 317–335.
- [4] FIEDLER, M.: *Über qualitative Winkeleigenschaften der Simplexe*. Czechoslovak Math. J. 7 (1957), 463–478.
- [5] GADDUM, J. W.: *The sums of the dihedral and trihedral angles in a tetrahedron*. Amer. Math. Monthly 59 (1952), 370–371.
- [6] GADDUM, J. W.: *Distance sums on a sphere and angle sums in a simplex*. Amer. Math. Monthly 63 (1956), 91–96.
- [7] REKTORYS, K.: *Přehled užité matematiky I*. Prometheus, Praha, 1995.
- [8] UDRISTE, C.: *Convex functions and optimization methods on Riemannian manifolds*. Kluwer, Dordrecht, 1994.