František Kuřina

Povrch je derivací objemu

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 60 (2015), No. 1, 75–79

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144338`

# vyučování

## POVRCH JE DERIVACÍ OBJEMU

*František Kuřina, Hradec Králové*

### 1. Úvod

V krásně vypravené knize *Atlas geometrie* [7] jsem si na s. 190 přečetl:

*Vzorec* $2\pi r$ *pro výpočet obvodu kruhu získáme derivováním vzorce* $\pi r^2$ *pro výpočet obsahu kruhu.*

*Vzorec* $4\pi r^2$ *pro výpočet povrchu koule získáme derivováním vzorce* $\frac{4}{3}\pi r^3$ *pro výpočet objemu koule.*

V duchu koncepce této knihy (termín atlas chápeme obvykle jako soubor obrazů z určitého oboru) se zde přirozeně problematika nevysvětluje ani nezdůvodňuje: uvádějí se fakta. Fakta o velikostech dimenzionálně odlišných útvarů mohou leckoho překvapit. Všimněme si proto této problematiky podrobněji.

### 2. První setkání

V roce 1955 jsem nastoupil po studiích matematiky a deskriptivní geometrie na své první učitelské místo na *jedenáctileté střední všeobecně vzdělávací škole* (takto složitě se jmenovala instituce, jejíž poslední tři ročníky byly náhražkou čtyřletých gymnázií z předešlých let). Všechno bylo tehdy nové. Pro mne zcela nové, protože první bylo zaměstnání, nová byla struktura školy, nové byly i učebnice. Na čtyřletých gymnáziích se učila matematika podle tzv. Čechových učebnic [2], produktu autorského kolektivu (František Balada, Eduard Čech, Josef Holubář, Karel Hruša, Marta Chytilová, Vanda Jandová, Bedřich Koenig, Emil Mastný, Karel Srb, Josef Šimek, Antonín Tuláček, Rudolf Zelinka), které byly neobyčejně náročné. Měly ovšem jepičí život (1951–1953), především v důsledku tehdy realizované školské reformy. O Čechových učebnicích jsem v jiných souvislostech psal v článku [4].

Učebnici geometrie, která nastoupila do školy spolu se mnou, napsali Jan Vyšín, Zbyněk Dlouhý, Josef Metelka a Alois Urban. To byli vesměs matematici hluboce vzdělaní, kteří se dlouhodobě zabývali problematikou vyučování. Jejich učebnice [8] je učebnice „poctivá“, zpracovaná systematicky a promyšená do všech detailů. Vidím v tom především vliv Zbyňka Dlouhého, jehož hluboký smysl pro preciznost jsem znal již z doby společných studií. Odhaduji, a nemohu to již dnes dokázat, protože ani Zbyněk již nežije, že to byla Dlouhého zásluha, že se do učiva 11. ročníku dostala problematika velikostí geometrických útvarů v pojetí Hermanna Minkowského (1864–1909), tematika, kterou se zabýváme v tomto článku.

V jakém pořadí studovat velikosti geometrických útvarů v prostoru? Máme nejdříve studovat objemy a pak povrchy nebo obráceně?

Současná učebnice stereometrie pro gymnázia [5] odvodí nejdříve na základě *Cavalieriho principu* vzorec pro objem koule a pak pokračuje takto:

Představme si kouli polepenou např. milimetrovým papírem. Její povrch tak máme rozdělen na množství čtverečků ($mm^2$). Spojíme-li vrcholy každého čtverečku se středem koule, dostaneme jehlany se čtvercovou podstavou, hlavními vrcholy ve středu koule a výškou rovnou poloměru

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc., katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové, Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové, e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz

koule. Čtverečky na povrchu koule, tj. podstavy jehlanů, můžeme bez omezení zmenšovat a podstavu každého jehlanu považovat za část roviny, nikoli za část kulové plochy. Objem koule se pak rovná součtu objemů všech takto vytvořených jehlanů. Podstavy těchto jehlanů tvoří dohromady povrch koule. Neboli objem $V$ koule je roven objemu jehlanu, jehož obsah podstavy je roven povrchu $S$ koule a jeho výška je rovna poloměru $r$ koule. Platí tedy rovnost:

$$\frac{1}{3}Sr = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

odtud

$$S = 4\pi r^2.$$

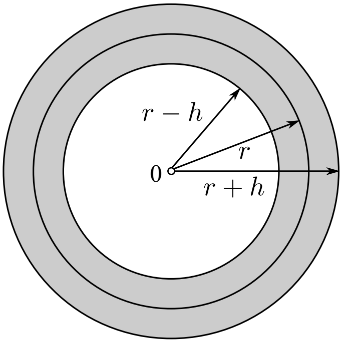
V podstatě stejně postupuje Čech v učebnici z r. 1951. Autoři učebnice [8] toto názorné, ale z matematického hlediska ne zcela korektní odvození nepřijímají a postupují takto:

Vzorec pro objem koule poctivě odvozují na čtyřech stranách pomocí limity objemů posloupností válců „vepsaných" a „opsaných" $n$ kulovým vrstvám výšky $v/n$, na něž je rozdělena daná kulová úseč výšky $v$, roste-li $n$ nade všechny meze. Další postup je elegantní a stručný [8, s. 358]:

Zvolme libovolné kladné $h$ a sestrojme k dané kouli o poloměru $r$ těleso $T_h$ (na obr. 1 je zobrazen jeho řez rovinou jdoucí středem koule). Je-li $h < r$, je $T_h$ rozdílem koulí s poloměry $r+h$, $r-h$ a pro objem $V_h$ tělesa $T_h$ dostáváme

$$V_h = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi(r-h)^3 = \\ = \frac{8}{3}\pi h(3r^2 + h^2).$$

Dále se konstruuje posloupnost dutých koulí se zmenšující se tloušťkou stěny $2h$. Povrch takovýchto těles dostaneme přibližně z jejich objemů dělením číslem $2h$ (to je podle mého názoru slabé místo výkladu).




Obr. 1

Máme tedy

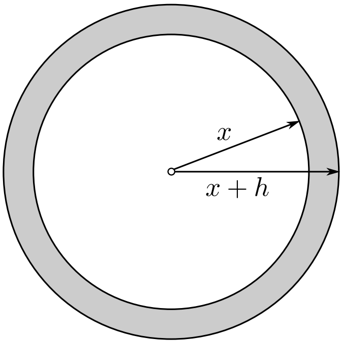
$$S_h = \frac{V_h}{2h} = 4\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi h^2.$$

Limita této posloupnosti pro $h$ konvergující k nule je $4\pi r^2$, tj. povrch koule. Zde jsem se poprvé setkal s odvozením vzorce pro povrch tělesa pomocí limity objemů těles.

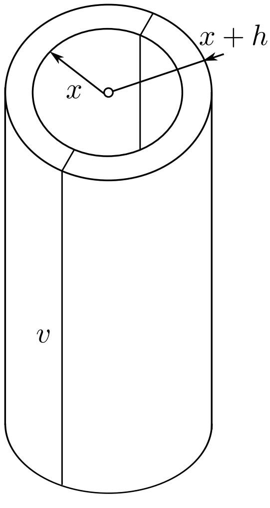
## 3. Derivací objemu je povrch

Již se znalostí úvodu do diferenciálního počtu na úrovni učebnice [3] můžeme výše naznačený postup upřesnit.

Je-li $V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$ objem koule poloměru $x$, $V(x+h) = \frac{4}{3}\pi(x+h)^3$ objem koule poloměru $x+h$, pak $V(x+h) - V(x)$ je objem jakéhosi *obalu* koule tloušťky $h$ (prostorová analogie mezikruží (obr. 2))




Obr. 2




Obr. 3

a povrch $S(x)$ koule pak můžeme definovat jako limitu

$$S(x) = \lim_{h \to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}. \qquad (1)$$

Povrch koule $S(x)$ je tedy derivací jejího objemu $V(x)$ podle $x$:

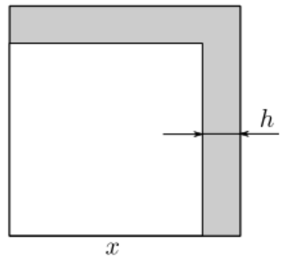
$$V'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{3}\pi(x+h)^3 - \frac{4}{3}\pi x^3}{h} = \\ = 4\pi x^2 = S(x).$$

Podobně můžeme odvodit např. vzorce pro velikost pláště rotačního válce s poloměrem podstavy $x$ a výškou $v$, známe-li vzorec pro objem válce $V(x) = \pi x^2 v$.

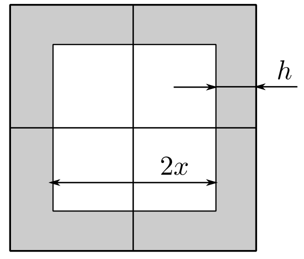
Rozdíl $V(x+h) - V(x)$ představuje objem dutého válce s tloušťkou stěny $h$ (obr. 3). Velikost $S(x)$ pláště válce vypočítáme pak podle vzorce (1):

$$S(x) = V'(x) = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{\pi(x+h)^2 v - \pi x^2 v}{h} = 2\pi x v.$$

Pokusme se nyní odvodit naznačeným způsobem vzorec $S(x)$ pro povrch krychle ze vzorce $V(x) = x^3$ pro její objem.




Obr. 4




Obr. 5

Podle vzorce (1) bychom měli

$$V'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 \neq S(x).$$

Selhání tohoto postupu je přirozené: $V(x+h) - V(x)$ nepředstavuje objem obalu krychle tloušťky $h$, ale pouze obalu tloušťky $\frac{h}{2}$: obložení tloušťky $h$ vystačí pouze na tři stěny krychle. Na obr. 4 je řez takovéhoto útvaru rovinou, která prochází středem krychle a je rovnoběžná se dvěma jejími stěnami. Abychom mohli použít vzorec (1), musíme pracovat s krychlí o hraně délky $2x$ (obr. 5). Objem krychle pak je $V(x) = 8x^3$, její povrch je $S = 24x^2$ a skutečně platí:

$$V'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{8(x+h)^3 - 8x^3}{h} = \\ = 24x^2 = S(x).$$

Vraťme se nyní k planimetrii. Obr. 2 můžeme interpretovat jako obrázek mezikruží. Jeho obsah je

$$S(x+h) - S(x) = \pi(x+h)^2 - \pi x^2.$$

Nyní je přirozené definovat obvod kruhu jako limitu obsahu mezikruží šířky $h$, jestliže $h$ konverguje k nule:

$$o(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = S'(x). \tag{2}$$

Je tedy obvod útvaru derivací jeho obsahu: $S'(x) = o(x)$. Pro obvod kruhu o poloměru $x$ tak dostaneme:

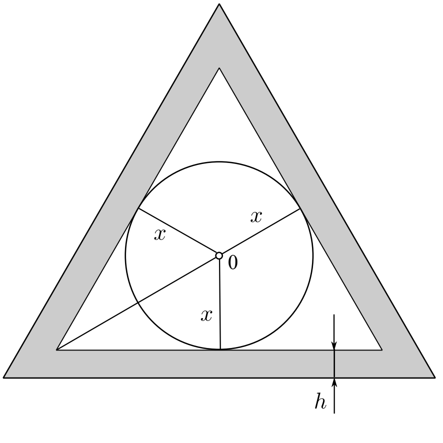
$$o(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\pi(x+h)^2 - \pi x^2}{h} = 2\pi x.$$

Podobně můžeme odvodit vzorce pro obvod čtverce ze vzorce pro jeho obsah. V označení podle obr. 5 tak dostáváme pro čtverec se stranou $2x$:

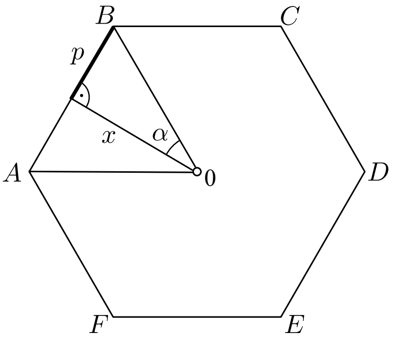
$$o(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(2(x+h))^2 - (2x)^2}{h} = 8x.$$

Ověřme ještě vzorec (2) pro rovnostranný trojúhelník. Abychom dostali obal trojúhelníku šířky $h$, nemůžeme vyjadřovat obsah pomocí délky jeho strany, ale pomocí poloměru $x$ kružnice trojúhelníku vepsané (obr. 6). Délka strany trojúhelníku je pak $2x\sqrt{3}$, jeho obvod $6x\sqrt{3}$ a obsah $3x^2\sqrt{3}$. Je tedy skutečně $S'(x) = o(x)$.

Ukažme, že vzorec (2) platí pro libovolný pravidelný $n$-úhelník. K tomu účelu




Obr. 6




Obr. 7

vyjádřeme jeho obvod a obsah pomocí poloměru $x$ kružnice jemu vepsané a úhlu $\alpha$, který se ovšem bude měnit s počtem $n$ stran mnohoúhelníku. V označení podle obr. 7 pravidelného šestiúhelníku můžeme určit (pro libovolný $n$-úhelník): $p = x \operatorname{tg} \alpha$, $o = 2nx \operatorname{tg} \alpha$, $S = nx^2 \operatorname{tg} \alpha$. Je tedy $S'(x) = o(x)$.

Vraťme se závěrem do prostoru a ověřme, že vzorec (1) platí pro libovolný pravidelný mnohostěn.

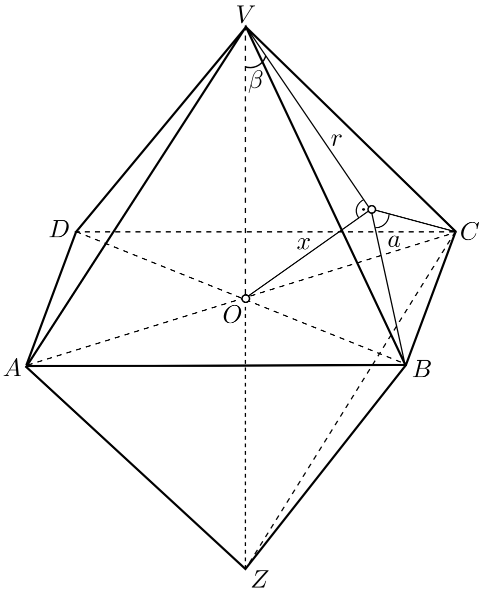
Označení volme podle obrázku pravidelného osmistěnu (obr. 8), úvahy však budeme formulovat pro libovolné z platonských těles.

Pravidelný mnohostěn určeme poloměrem $x$ kulové plochy jemu vepsané a volbou jeho typu ($n = 4, 6, 8, 12, 20$). Objem a povrch mnohostěnu vyjadřujeme pomocí poloměru $x$ a úhlů $\alpha, \beta$ sestrojených podle obr. 8. Každá z $n$ stěn mnohostěnu je pravidelný mnohoúhelník složený z $k$ rovnoramenných trojúhelníků s obsahem

$$\frac{1}{2} r^2 \sin \alpha,$$

kde $r$ je poloměr kružnice stěně mnohoúhelníku opsané a $\alpha$ je úhel u hlavního vrcholu každého z $k$ rovnoramenných trojúhelníků (obr. 8). Protože $r = x \operatorname{cotg} \beta$, platí pro obsah $M$ libovolné stěny mnohostěnu

$$M = \frac{1}{2} k x^2 \operatorname{cotg}^2 \beta \sin \alpha.$$



Obr. 8

Povrch mnohostěnu je tedy

$$S = nM = \frac{1}{2}nkx^2 \operatorname{cotg}^2 \beta \sin\alpha = Cx^2,$$

kde

$$C = \frac{1}{2}nk \operatorname{cotg}^2 \beta \sin\alpha,$$

a pro jeho objem dostáváme

$$V = n\frac{1}{3}Mx = \frac{1}{3}Cx^3.$$

Je tedy opět

$$V' = (\frac{1}{3}Cx^3)' = Cx^2 = S.$$

Souvislost vzorců pro objem a povrch (resp. pro obsah a obvod) nelze ovšem postihnout, postupujeme-li způsobem obvyklým v učebnicích, např. pro pravidelný osmistěn podle učebnice [5, s. 161], kde je objem vyjádřen pomocí poloměru kulové plochy osmistěnu opsané. Postup nelze rovněž aplikovat na libovolná tělesa. Výsledek ovšem platí např. pro objem $V$ a povrch $S$ čtyřdimenzionální koule s poloměrem $x$ ([1, s. 247]):

$$V' = (\frac{1}{2}\pi^2 x^4)' = 2\pi^2 x^3 = S.$$

## Závěr

Popsané vztahy objemu a povrchu nebo obsahu a obvodu ukazují méně známý geometrický význam první derivace funkce, který uvádějí např. americké publikace [6] a [9]. Vzhledem k nutnosti konstruovat přitom „obal“ tělesa dosti umělým způsobem se zdá, že jde spíše o zajímavost, která, ač nemá hlubší matematický význam, může být využita ve škole. Netradiční význam pojmu derivace funkce může přispět k jeho hlubšímu pochopení, souvislost vzorců pro objem a povrch (obsah a obvod) může pomoci k jejich zapamatování.

**Poděkování.** Příspěvek byl vypracován s podporou Specifického výzkumu PřFUHK/2015.

L i t e r a t u r a

[1] Bolťanskij, V. G., Jagom, I. M.: *Vypuklye figury i tela.* Enciklopedija elementarnoj matematiki V, Nauka, Moskva, 1966.

[2] Čech, E., a kol.: *Matematika pro 1., 2., 3., 4. třídu gymnázií.* SPN, Praha, 1951.

[3] Hrubý, D., Kubát, J.: *Matematika pro gymnázia. Diferenciální a integrální počet.* Prometheus, Praha, 1997.

[4] Kuřina, F.: *Eduard Čech a vyučování matematice.* PMFA *58* (2013), 326–335.

[5] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia. Stereometrie.* Prometheus, Praha, 1995.

[6] Usiskin, Z., a kol.: *Mathematics for high school teachers.* Prentice Hall, New Jersey, 2003.

[7] Voráčová, Š., a kol.: *Atlas geometrie.* Academia, Praha, 2012.

[8] Vyšín, J., a kol.: *Geometrie pro devátý až jedenáctý postupný ročník.* SPN, Praha, 1954.

[9] Zazkis, R., Sinitski, I., Leikin, R.: *Coincidence or rule?* Math. Teacher *106* (2013), 686–692.