Petr Kůrka
Hyperbolická geometrie v díle M. C. Eschera

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 59 (2014), No. 4, 293--301

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144081`

Hyperbolická geometrie v díle M. C. Eschera

Petr Kůrka, Praha

Nizozemský malíř Maurits Cornelis Escher (1898–1972) vytvořil pozoruhodné grafické dílo, které odhaluje podivuhodné paradoxní geometrické světy. Mnoho jeho grafik je založeno na teselacích eukleidovské roviny, tj. na pokrytích roviny kongruentními geometrickými obrazci. Takové grafiky se vyskytují již v jeho ranné tvorbě, ale začaly převažovat poté, co navštívil Alhambru ve španělské Granadě a obdivoval její ornamentální výzdobu.

Koncem třicátých let se Escher problematikou teselací zabýval i teoreticky, když se seznámil s klasifikací rovinných krystalografických grup. J. Fjodorov a později G. Pólya [5] ukázali, že existuje právě 17 rovinných krystalografických grup, což jsou grupy symetrií tapet – nekonečných mozaik sestavených z kongruentních geometrických obrazců. Eschera zejména zaujaly příklady tapet s těmito grupami symetrií a posloužily mu jako inspirace pro některé jeho grafiky.

V roce 1954 se konal v Amsterodamu Mezinárodní matematický kongres a jeden z organizátorů, N. G. de Bruin, na něm uspořádal výstavu Escherových grafik. Tato výstava silně zapůsobila na Rogera Penrosea, který krátce nato nakreslil paradoxní *Penroseův trojúhelník* – zdánlivě prostorový útvar sestávající ze tří hranolů spojených pravými úhly. Dalším matematikem, kterého tato výstava zaujala, byl kanadský geometr H. S. M. Coxeter. O tři roky později požádal Coxeter Eschera o souhlas, zda smí přetisknout Escherovu *Symetrii* ve svém článku o symetriích eukleidovské roviny a Poincarého modelu hyperbolické roviny. Escher souhlasil, a když později obdržel preprint Coxeterova článku, velmi ho zaujal obrázek teselace hyperbolické roviny pravidelnými hyperbolickými šestiúhelníky. Escher, kterého fascinovalo nekonečno, zde spatřil způsob, kterak znázornit nekonečno na omezené ploše kruhu. Začal tyto hyperbolické teselace intenzivně studovat a experimentálně určoval středy kružnic, které tyto teselace vytvářejí. Na základě hyperbolické geometrie pak vytvořil sérii svých grafik Circle Limits (obr. 1).

Hyperbolická geometrie je jedna z alternativních neeukleidovských geometrií, které vzniknou opuštěním pátého Eukleidova axiomu, podle kterého k dané přímce lze daným bodem, který na ní neleží, vést jedinou rovnoběžku. V eliptické neeukleidovské geometrii žádné rovnoběžky nejsou, zatímco v hyperbolické geometrii existuje takových rovnoběžek (vedených daným bodem) nekonečně mnoho. Tyto neeukleidovské geometrie studovali nejprve jejich objevitelé J. Bolyai a N. I. Lobačevskij abstraktně axiomaticky. Později Felix Klein sestrojil jejich modely uvnitř eukleidovské geometrie, a tím prokázal jejich bezespornost. Escherovy grafiky jsou založeny na pozdějším **Poincarého kruhovém modelu hyperbolické geometrie**. Hyperbolické body jsou vnitřní body jednotkového kruhu, hyperbolické přímky jsou oblouky kružnic kolmé na

Prof. RNDr. Petr Kůrka, CSc., Centrum pro teoretická studia, AV ČR a UK v Praze, Jilská 1, 110 00 Praha 1, e-mail: `kurka@cts.cuni.cz`

Obr. 1. M. C. Escher: Circle Limit I, II, III, IV

jednotkovou kružnici. Mezi hyperbolické přímky patří také průměry, tj. úsečky procházející středem jednotkové kružnice.

Vzdálenosti se v hyperbolické geometrii měří pomocí **riemannovské metriky**. Její definiční obor je jednotkový kruh

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\},$$

který je vhodné chápat jako jednotkový kruh komplexní roviny. Hyperbolická metrika je definována **diferenciální formou**

$$\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{1 - x^2 - y^2} = \frac{|\mathrm{d}z|}{1 - |z|^2}.$$

Je-li $z : [t_0, t_1] \to D$ diferencovatelná křivka v parametrickém tvaru $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$, lze její délku $L(z)$ spočítat integrací:

$$L(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{1 - x(t)^2 - y(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Mezi všemi křivkami, které spojují dané dva body $z, w \in D$, existuje nejkratší spojnice, která se nazývá **geodetika**. Ukážeme si, že geodetiky jsou oblouky kružnic kolmých na jednotkovou kružnici nebo úsečky přímek kolmých na jednotkovou kružnici. To je nejjednodušší v případě horizontálního průměru. Předpokládejme, že $z : [t_0, t_1] \to D$ spojuje dva body na reálné ose, tj. $z(t_0) = x_0$, $z(t_1) = x_1$, kde $-1 < x_0 < x_1 < 1$. Pak

$$L(z) \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{x'(t)}{1 - x(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = L(w),$$

kde $w : [x_0, x_1] \to 0$ je úsečka spojující body x_0 a x_1 s rovnicí $w(t) = t$. (Podobně se dokazuje, že nejkratší spojnicí dvou bodů eukleidovské roviny je úsečka.)

Pro obecnou charakteristiku geodetik potřebujeme shodné transfromace, které zachovávají metriku. V eukleidovské geometrii jsou shodné transformace otočení, posun a překlopení (reflexe). V případě hyperbolické roviny jsou shodnými transformacemi **möbiovské transformace** a **reflexe**. Obecná komplexní möbiovská transformace je zobrazení dané předpisem

$$M(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},\ M\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) = \infty,\ M(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma},$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ jsou komplexní čísla, která tvoří čtvercovou matici $\tilde{M}$ řádu 2. Skládání transformací odpovídá násobení těchto matic. Je-li $\det \tilde{M} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, je M vzájemně jednoznačné zobrazení rozšířené komplexní roviny (komplexní sféry) $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ na sebe. Möbiovské transformace tvoří grupu vzhledem ke skládání. V každém bodě mají nenulovou derivaci, takže jsou konformní – zachovávají úhly (viz např. Silverman [7]). Další jejich význačnou vlastností je to, že převádí každou přímku na přímku nebo kružnici a každou kružnici také na přímku nebo kružnici.

Pro hyperbolickou geometrii ovšem potřebujeme transformace, které zachovávají jednotkový kruh. To jsou kruhové möbiovské transformace tvaru

$$M(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}},$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\det \tilde{M} = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, a $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ jsou čísla komplexně sdružená k α a β. Pro bod $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$ jednotkové kružnice dostáváme

$$|M(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| = \frac{|\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \beta|}{|\overline{\beta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \overline{\alpha}|} = \frac{|\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \beta|}{|\overline{\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \beta}|} = 1,$$

takže transformace převádí jednotkovou kružnici na sebe. Protože

$$|M(0)| = |\beta/\overline{\alpha}| = |\beta|/|\alpha| < 1,$$

je obraz nuly uvnitř jednotkového kruhu a ze spojitosti plyne $M(D) = D$, tedy D je invariantní pro M. Ukážeme nyní, že M zachovává hyperbolickou metriku. Je-li $w = (\alpha z + \beta)/(\overline{\beta} z + \overline{\alpha})$, pak

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}w &= \frac{\mathrm{d}z}{(\overline{\beta} z + \overline{\alpha})^2},\\
|w|^2 &= \frac{(\alpha z + \beta)(\overline{\alpha z} + \overline{\beta})}{(\overline{\beta} z + \overline{\alpha})(\beta \overline{z} + \alpha)} = \frac{|\alpha z|^2 + |\beta|^2 + \alpha\overline{\beta} z + \overline{\alpha}\beta\overline{z}}{|\beta z|^2 + |\alpha|^2 + \alpha\overline{\beta} z + \overline{\alpha}\beta\overline{z}},\\
1 - |w|^2 &= \frac{1 - |z|^2}{|\overline{\beta} z + \overline{\alpha}|^2},\\
\mathrm{d}s &= \frac{|\mathrm{d}z|}{1 - |z|^2} = \frac{|\mathrm{d}w|}{1 - |w|^2}.
\end{aligned}$$

Kruhové möbiovské transformace převádí přímky a kružnice opět na přímky nebo kružnice. Jsou-li tyto přímky nebo kružnice kolmé na jednotkovou kružnici, jsou jejich obrazy rovněž kolmé na jednotkovou kružnici. Z toho plyne, že geodetiky hyperbolické roviny jsou právě úseky přímek nebo kružnic kolmých na jednotkovou kružnici.

V hyperbolické geometrii platí řada vztahů, které jsou analogické vztahům eukleidovské geometrie. Především jsou to sinové a kosinové věty. Pro hyperbolický trojúhelník sestavený z geodetik se stranami a, b, c a protilehlými úhly α, β, γ platí

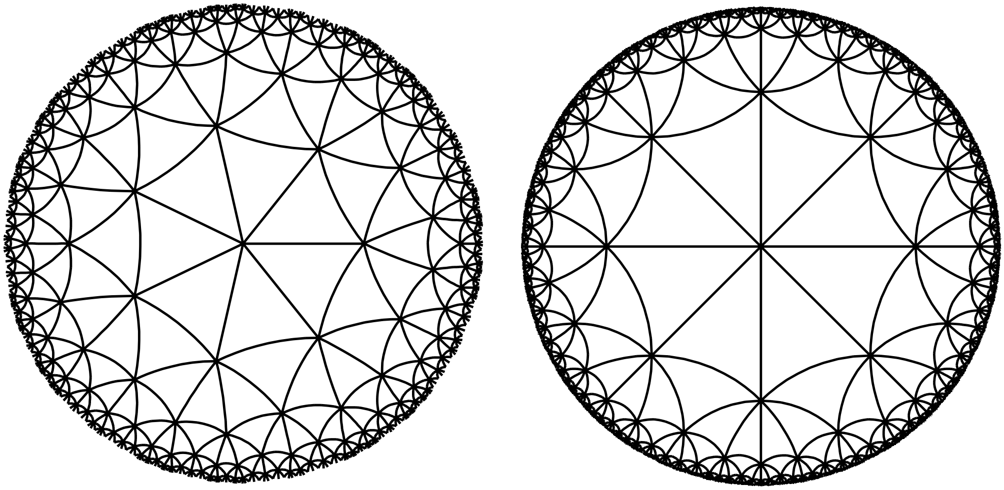
$$\begin{aligned}
\frac{\sinh a}{\sin\alpha} &= \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma},\\
\cos\gamma &= \frac{\cosh a \cdot \cosh b - \cosh c}{\sinh a \cdot \sinh b},\\
\cosh c &= \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha \cdot \sin\beta},
\end{aligned}$$

kde $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$, $\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ jsou hyperbolické funkce. To je formálně analogické sinové a kosinové větě eukleidovské geometrie:

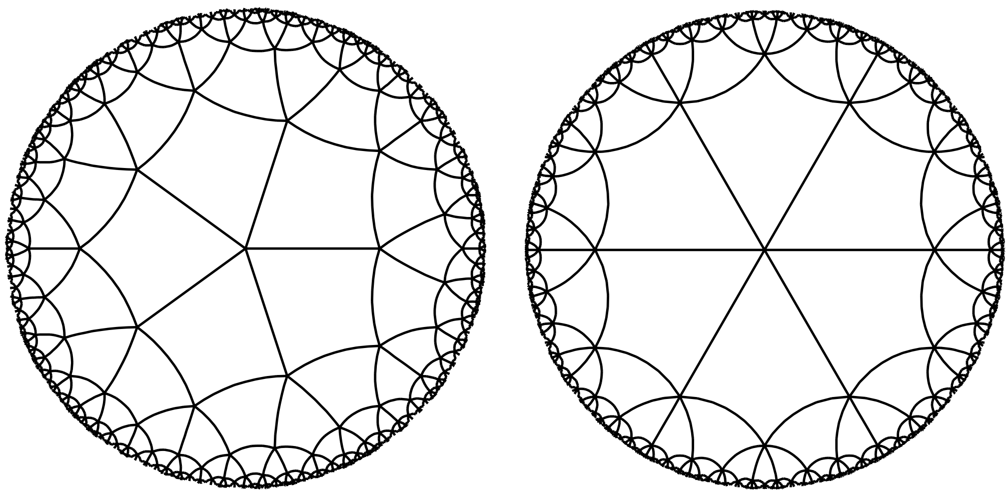
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Podobnost vyvstane, uvažujeme-li aproximace $\sinh x \approx x$, $\cosh x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$ pro malá x. Vskutku v okolí středu jednotkového kruhu je hyperbolická metrika aproximována eukleidovskou metrikou $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$. Ale v hyperbolické geometrii máme dvě kosinové věty a druhá z nich v eukleidovské geometrii žádnou analogii nemá. Určuje totiž velikost úhlů trojúhelníka z velikosti jeho stran, což v eukleidovské geometrii není možné. Podobné trojúhelníky mají stejné úhly ale obecně různě dlouhé strany. V hyperbolické geometrii žádné podobné trojúhelníky nejsou. Součet úhlů trojúhelníka je vždy menší než π a čím je trojúhelník větší, tím je jeho součet úhlů menší. Dokonce platí, že plošný obsah trojúhelníku s úhly α, β, γ je $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.



Obr. 2. Trojúhelníkové teselace hyperbolické roviny: $n = 3$, $m = 7$ (vlevo), $m = 8$ (vpravo)



Obr. 3. Čtvercové teselace hyperbolické roviny: $n = 4$, $m = 5$ (vlevo), $m = 6$ (vpravo)

To znamená, že v hyperbolické rovině je mnohem více teselací pravidelnými mnohoúhelníky než v eukleidovské rovině. Pro každé $n \geq 7$ existuje rovnostranný hyperbolický trojúhelník s úhly $2\pi/n$ a tyto trojúhelníky tvoří teselaci, kde každý vrchol každého trojúhelníku je sdílen s n sousedními trojúhelníky (obr. 2). Podobně pro každé $n \geq 5$ existuje hyperbolický čtverec s úhly $2\pi/n$ a také tyto čtverce tvoří teselaci (obr. 3). Obecná podmínka pro existenci teselace n-úhelníky, jejichž každý vrchol je společný s m sousedními n-úhelníky je $1/n + 1/m < \frac{1}{2}$. Uvažujme totiž rovnoramenný trojúhelník, jehož základna je hrana n-úhelníka a vrchol je jeho střed. Jeho vrcholový úhel je $2\pi/n$, jeho úhly při základně jsou π/m, takže podmínka, že součet úhlů musí být menší než π, dává nerovnost $1/n + 1/m < \frac{1}{2}$.

Kromě těchto teselací pravidelnými mnohoúhelníky existují také teselace nepravidelnými mnohoúhelníky. Escherovy grafiky Circle Limit III a Circle Limit IV jsou založeny na teselaci rovnoramennými trojúhelníky. Obecnější trojúhelníkové teselace (viz Beardon [1]) sestávají z trojúhelníků s úhly $\alpha = 2\pi/n$, $\beta = 2\pi/m$, $\gamma = 2\pi/p$, kde n, m, p jsou přirozená čísla splňující $1/n + 1/m + 1/p < \frac{1}{2}$. Pro konstrukci těchto teselací je třeba uvažovat další třídy transformací, které zachovávají hyperbolickou rovinu, a sice reflexí (převrácení). Například zobrazení $z \mapsto \overline{z}$ je reflexe podle reálné osy. Tato reflexe zobrazuje D na D a zřejmě zachovává metriku. Komplexní číslo $|\alpha| = 1$ na jednotkové kružnici určuje reflexi podle přímky $\{t\alpha : t \in \mathbb{R}\}$ která spojuje α s nulou. Tuto reflexi dostaneme tak, že otočíme komplexní rovinu o úhel $-\alpha$ podle středu, potom ji převrátíme podle reálné osy x a nakonec otočíme zpátky o úhel α. Dostáváme

$$R_\alpha(z) = \overline{z/\alpha} \cdot \alpha = \overline{z} \cdot \alpha^2.$$

Kromě těchto reflexí podle přímek existují také reflexe podle kružnic. Reflexe podle jednotkové kružnice je dána předpisem $R(z) = 1/\overline{z}$. Pro $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = r(\cos t + \mathrm{i}\sin t)$ dostáváme $\overline{z} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ a $R(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}/r$, takže z a $R(z)$ mají stejnou amplitudu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ a inverzní absolutní hodnotu. Reflexe podle kružnice se středem 0 a poloměrem r je $R_r(z) = r^2/\overline{z}$ a reflexe podle kružnice se středem $s \in \mathbb{C}$ a poloměrem $r > 0$ je

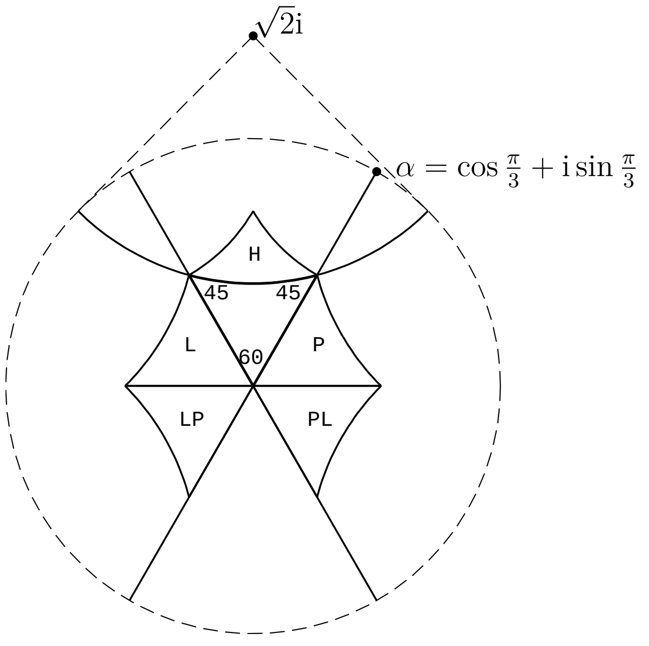
$$R_{s,r}(z) = s + \frac{r^2}{\overline{z - s}} = s + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{s}}.$$

Je-li tato kružnice geodetikou, zobrazuje jednotkový kruh na sebe a zachovává metriku. Pro každou geodetiku tedy existuje reflexe podle této geodetiky, která zachovává hyperbolickou metriku. Tyto reflexe se liší od möbiovských transformací tím, že obracejí orientaci a v jejich vzorci se vyskytuje operace komplexně sdruženého čísla. Složení dvou reflexí je ale již möbiovská transformace a naopak každou kruhovou möbiovskou transformaci lze vyjádřit jako složení dvou reflexí podle geodetiky.

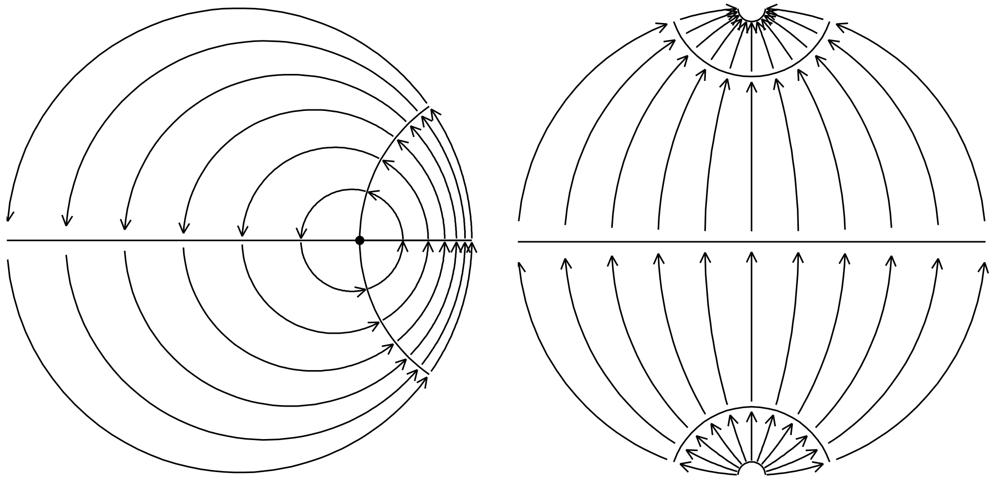
Reflexe podle geodetik a kruhové möbiovské transformace tvoří dohromady spojitou **grupu izometrií** hyperbolické roviny. To znamená, že izometrie tvoří metrický (topologický) prostor a operace skládání jsou spojité. Möbiovské transformace tvoří podgrupu grupy všech izometrií s indexem 2. Teselace hyperbolické roviny jsou založeny na **diskrétních podgrupách** grupy izometrií, tj. podgrupách, které jsou diskrétní jakožto topologický prostor. Speciální druh diskrétních grup tvoří **trojúhelníkové podgrupy**, které jsou generovány reflexemi podle stran hyperbolického trojúhelníku s úhly $\alpha = 2\pi/n$, $\beta = 2\pi/m$, $\gamma = 2\pi/p$.

Z každého takového hyperbolického trojúhelníku lze sestavit teselaci tak, že ho postupně převracíme podle jeho stran. Ukážeme si to na rovnoramenném trojúhelníku s úhly $\alpha = \frac{1}{3}\pi = 60°$, $\beta = \gamma = \frac{1}{4}\pi = 45°$, na kterém je založena teselace Escherovy grafiky Circle Limits IV. Trojúhelník odpovídá pozici největšího stojícího anděla. Jeho vrchol je ve středu jednotkové kružnice a jeho základna je vodorovná (obr. 4). Dvě strany tohoto trojúhelníku tvoří průměry procházející komplexními jednotkami $\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = \cos\frac{1}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{3}\pi$ a $\alpha^2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Třetí strana je oblouk kružnice se středem $s = \sqrt{2}\mathrm{i}$ a poloměrem $r = 1$. Tyto tři geodetiky určují tři reflexe

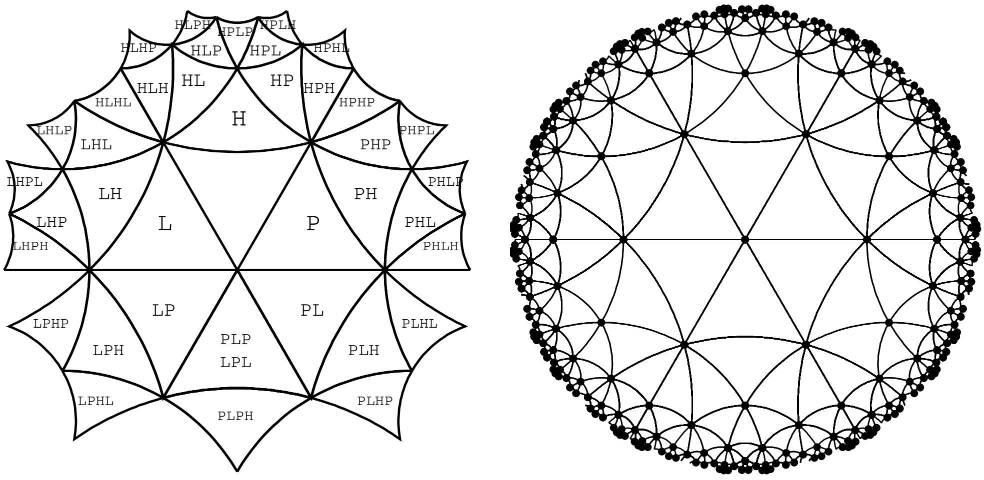
$$P(z) = \alpha^2 \cdot \overline{z},\ L(z) = \alpha^4 \cdot \overline{z},\ H(z) = \sqrt{2}\mathrm{i} + \frac{1}{\overline{z} + \sqrt{2}\mathrm{i}}.$$



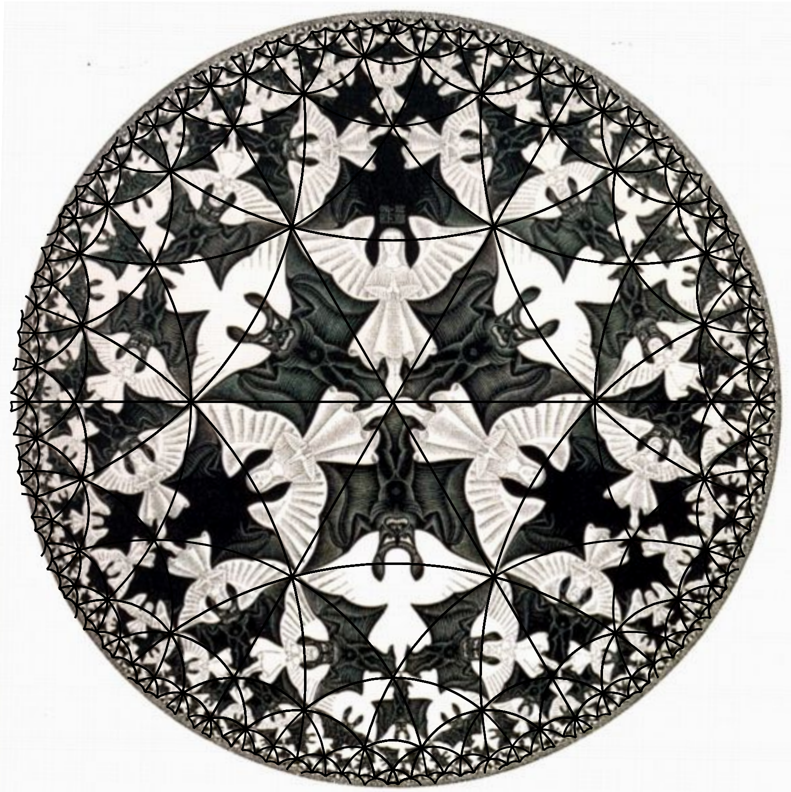
Obr. 4. Reflexe rovnoramenného trojúhelníka



Obr. 5. Rotace $PLHP$ (vlevo) a posun $HPLP$ (vpravo)



Obr. 6. Adresy trojúhelníků



Obr. 7. M. C. Escher: Circle Limits IV (Heaven and Hell)

Postupnou aplikací těchto transformací na základní trojúhelník dostáváme další trojúhelníky teselace. Například $LP(z) = \alpha^2 z$, $PL(z) = \alpha^{-2} z$ jsou rotace kolem nuly (obr. 4),

$$PLHP(z) = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}\mathrm{i})z - 2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}z + \sqrt{2} - \sqrt{6}\mathrm{i}}$$

je rotace a

$$HPLP(z) = \frac{\sqrt{2}z + \mathrm{i}}{-\mathrm{i}z + \sqrt{2}}$$

je posun (obr. 5). Složení sudého počtu základních reflexí L, P, H je möbiovská transformace, která převádí anděly na anděly a čerty na čerty. Složení jejich lichého počtu je reflexe, která převádí anděly na čerty a čerty na anděly (čerti jsou totiž padlí andělé). Každý trojúhelník teselace má *adresu*, tj. posloupnost transformací, kterými ho lze získat ze základního trojúhelníku (obr. 6). Transformace L, P, H ovšem splňují mnohé identity (například $PLP = LPL$), takže adresy nejsou určeny jednoznačně. Na obr. 7 vidíme superpozici této trojúhelníkové teselace na Escherovu grafiku Circle Limits IV.

Escherova grafika Circle Limits III je založena na teselaci hyperbolické roviny čtyřúhelníky s úhly $\frac{1}{2}\pi = 90°$, $\frac{1}{3}\pi = 60°$, $\frac{2}{3}\pi = 120°$ a $\frac{1}{3}\pi = 60°$ (Coxeter [2] nebo Dunham [3]). Rozdělíme-li tento čtyřúhelník na dva trojúhelníky, dostáváme rovnoramenný trojúhelník s úhly $\frac{1}{4}\pi = 45°$, $\frac{1}{3}\pi = 60°$, $\frac{1}{3}\pi = 60°$, takže se opět jedná o trojúhelníkovou teselaci.

Reference

[1] Beardon, A. F.: *The geometry of discrete groups.* Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[2] Coxeter, H. S. M.: *The trigonometry of Escher's woodcut „Circle limit III".* Math. Intelligencer *18 (4)* (1996), 42–46.

[3] Dunham, D. J.: *Creating repeating hyperbolic patterns – old and new.* Notices Amer. Math. Soc. *50 (4)* (2003), 35–46.

[4] Escher, M. C.: *The regular division in the plane.* Escher on Escher: Exploring the infinite, W. J. van Horn, F. Wierda (eds). Harry N. Abrams, New York, 1989, 90–127.

[5] Pólya, G.: *Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene.* Z. Kristallographie *60* (1924), 278–282.

[6] Schattschneider, D.: *The mathematical side of M. C. Escher.* Notices Amer. Math. Soc. *57 (6)* (2010), 706–718.

[7] Silverman, R. S.: *Introductory complex analysis.* Dover Publications, New York, 1972.