František Kuřina

Jak učinit myšlenku viditelnou

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 59 (2014), No. 2, 117--134

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/143892

Jak učinit myšlenku viditelnou

František Kuřina, Hradec Králové

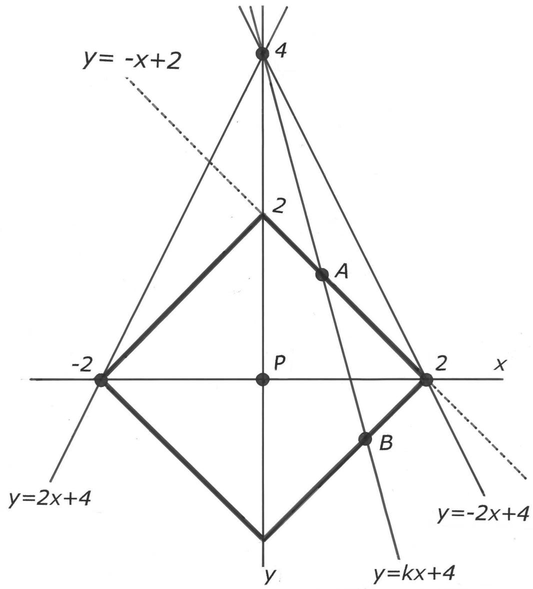
1. Úvod

„Poznání člověka je blokováno bariérami, které způsobují zkreslení… Za prvé je tu bariéra mezi představou a jazykem. Myšlení probíhá v představách, ale ke komunikaci s jinou osobou musíme transformovat představu do myšlenky a tu potom do jazyka. Dochází ke zkreslením: bohatá rozsáhlá textura představ, její mimořádná plastičnost a pružnost, její osobitý emocionální ráz — všechno to je ztraceno, když představu vyjádříme jazykem“ (viz [29], s. 206). Přitom, jak zdůrazňuje *Jashua Foer*: „Mozek si lépe pomatuje věci, které jsou opakovaně rytmické, veršované, strukturované a zejména snadno převeditelné do podoby obrazů… Hledání vzorců a struktur je přesně ten způsob, jakým náš mozek vytahuje ze spleti informací o světě to, co je pro něj významné“ (viz [4], s. 138). Např. *Albert Einstein* napsal: „Slova nebo jazyk, ať už v psané nebo mluvené formě, nehrají patrně žádnou roli v mém mechanismu myšlení. Psychickými jednotkami (psychical entities), snad elementy mého myšlení, jsou jisté znaky (signs) nebo více nebo méně jasné obrazy (images), které mohou být libovolně (voluntarily) reprodukovány a kombinovány“ (citováno podle [7], s. 142). Názory na roli obrázků v matematice se vyvíjely v souvislosti s otázkou porozumění matematickým idejím.

Slovenský matematik *Beloslav Riečan* (*1936) se vyznává „Prečo je obraz, a teda aj elementárna geometria taká dôležitá? Já som ju chápal len tak mimochodom. Ale pred 40 rokmi, ťažkej to dobe pre niektorých nepreverených hudobníkov, sa oni uchýlili pod krídla matematiky. A po rokoch si jeden z nich, jedna z vedúcich osobností súčasnej slovenskej, a nielen slovenskej hudby, *Roman Berger*, spomenul na moje matematické prednášky takto: Riečan zrazu utrúsil: Keď matematik stojí pred algebraickým problémom, usiluje sa ho dostať do geometrickej podoby, tak ho ľahšie môže vyriešiť.“ R. Berger dedukuje: „Tu sa zrazu v novom svetle ukázal vzťah medzi matematikou a hudbou: spoločným menovateľom je geometria odkazujúca k intuícii, ku konkrétnemu mysleniu, ku konkrétnym operáciam“ (viz [24], s. 71). Podobně se vyslovuje *Michal Křížek* (*1952): „Geometrická představivost může do značné míry usnadnit chápání některých algebraických tvrzení, vztahů a základních pojmů z teorie čísel“ (viz [14], s. 25).

Náš významný didaktik matematiky *Jan Vyšín* (1908–1983) napsal v předmluvě své knihy *Elementární geometrie*: „Obrazec je při provádění důkazu jen jakýmsi přehledným seznamem označení a zápisem situace, nikoli podstatnou složkou při zdůvodňování“ (viz [28], s. 4). *Eduard Čech* (1893–1960), snad největší český matematik dvacátého století, hodnotí roli obrazů zcela jinak: „Umět úlohu přeložit z řeči slov do

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc., Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové, Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové, e-mail: `frantisek.kurina@uhk.cz`



Obr. 1

řeči obrazů a obráceně, to není spjato jenom s určitou partií učiva, ale s celou podstatou matematiky – ba dokonce s celou podstatou myšlení“ (citováno podle [11]). Náš současný matematik *Petr Vopěnka* (*1935) píše: „Neuznávání obrázků a náčrtů za plnohodnotný způsob sdělování matematických poznatků, tj. důsledné trvání na úplných slovních popisech sdělovaných poznatků, výrazně umrtvuje dynamiku matematického poznávání“ (viz [27], s. 569). A filosof matematiky *Ladislav Kvasz* (*1962) zdůrazňuje „geometrické obrázky nejsou jen psychologickou pomůckou, ale důležitým nástrojem konstruování logické struktury matematických teorií“ (viz [16], s. 569).

2. Úlohy a obrázky

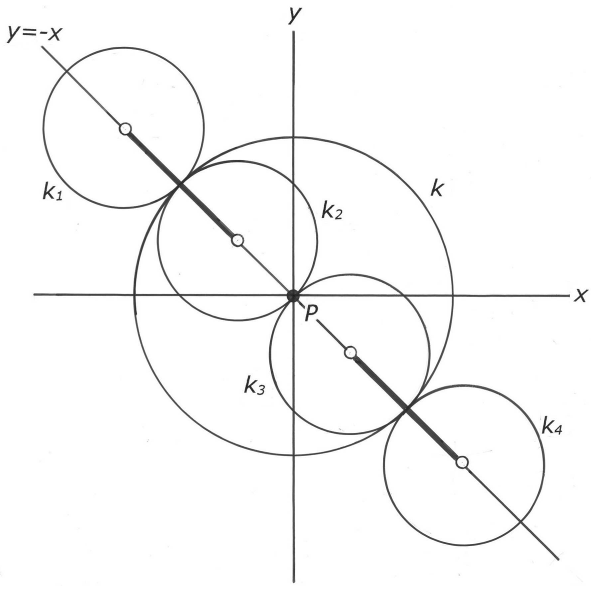
Ze školní praxe víme, že mnohé úlohy, např. určování kořenů rovnic, lze řešit početně a přibližně i graficky. Těmito úlohami se zde nebudeme zabývat, připomeňme však geometrický pohled na řešení dvou úloh s parametrem.

Máme-li řešit v oboru reálných čísel soustavu rovnic

$$y = kx + 4, \tag{1}$$

$$|x| + |y| = 2 \tag{2}$$

s neznámými x, y a reálným parametrem k, je výhodné vyjít z grafického znázornění obou relací v kartézské soustavě souřadnic. Všimneme-li si, že graf relace (2) je souměrný podle každé ze souřadnicových os, stačí k jeho sestrojení přenést úsečku, která je částí grafu přímky $y = -x + 2$ v prvním kvadrantu, do kvadrantů zbývajících. Grafem relace (2) je tedy hranice čtverce. Grafem relace (1) je svazek přímek, které procházejí bodem $[0, 4]$ (mimo přímku definovanou rovnicí $x = 0$). Z obr. 1 je patrné, že soustava



Obr. 2

má jediné řešení pro $k = 2$ a $k = -2$ a právě dvě řešení pro každé $k > 2$ a $k < -2$. Dojít k těmto výsledkům bez geometrického obrázku je podstatně pracnější. V učebnici [22] je popsána konstrukce grafu relace (2) na základě „množinově-logického“ rozboru.

Podobně diskusi o řešitelnosti soustavy

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{3}$$

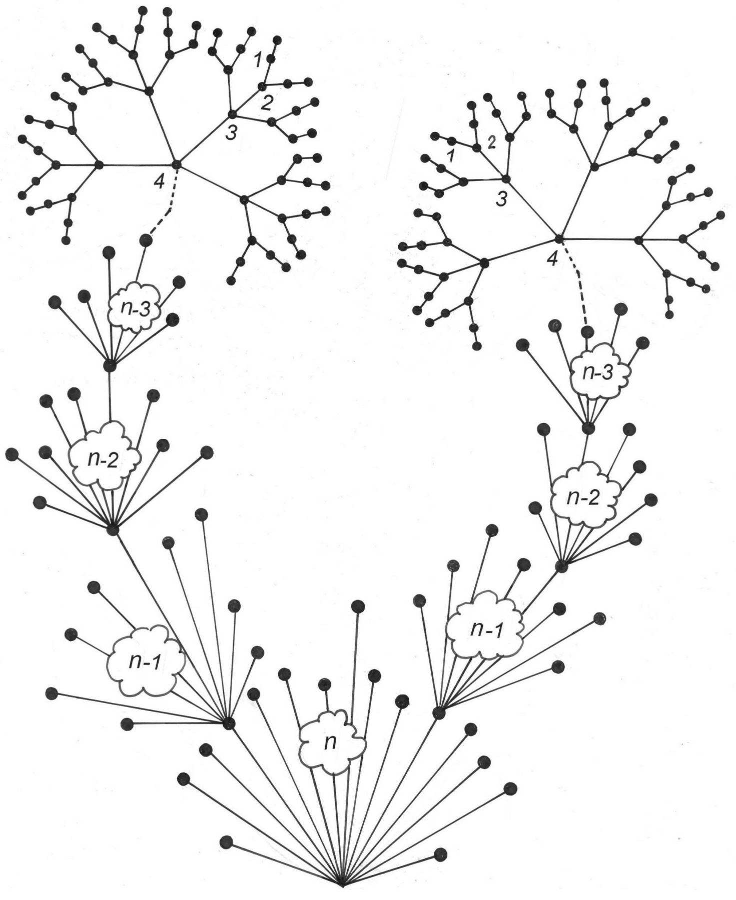
$$(x + m)^2 + (y - m)^2 = 1 \tag{4}$$

s reálnými neznámými x, y a parametrem m můžeme odvodit z obr. 2. Kroužkem vyznačené body určují ty hodnoty parametru m, pro něž má soustava jediné řešení, tlustě narýsované úsečky znázorňují, kdy má úloha právě dvě řešení, úsečka a polopřímky přímky $y = -x$ narýsované slabou čarou vedou k určení hodnot parametru, pro něž úloha nemá řešení. Detailní řešení této úlohy lze najít ve zprávě o XXX. ročníku naší matematické olympiády z r. 1983. Obrázky mohou přiblížit studentům i řešení otázek o určení počtu prvků „abstraktních“ množin. Ukažme to na jedné kombinatorické úloze.

Kolika způsoby můžeme uspořádat množinu s n prvky?

Protože na první místo můžeme zařadit libovolný z n prvků, na druhé pak již jen libovolný z $n-1$ zbývajících prvků, na třetí místo libovolný z $n-2$ zbývajících prvků a každé obsazení prvního místa můžeme spojit s každým obsazením druhého místa, lze první dvě místa obsadit $n(n-1)$ způsoby atd. (obr. 3). Celkový počet uspořádání je tedy

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$



Obr. 3

V učebnici [12] je uvedena tato definice složené funkce:

Říkáme, že funkce $h = g \circ f$ je složena z funkcí f, g právě tehdy, když platí: $D_h = \{x \in D_f; f(x) \in D_g\}$ a pro všechna $x \in D_h$ je $h(x) = g(f(x))$.

Zde D_h je definiční obor funkce h, D_f je definiční obor funkce f a D_g je definiční obor funkce g.

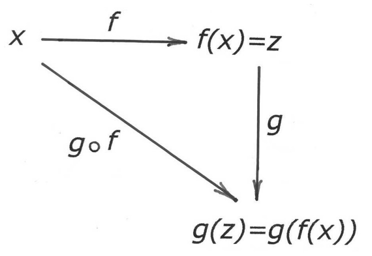
Tuto definici je podle mého názoru vhodné ilustrovat schématy na obr. 4 a 5. Ukažme jejich aplikace na složenou funkci

$$k = f \circ f,$$

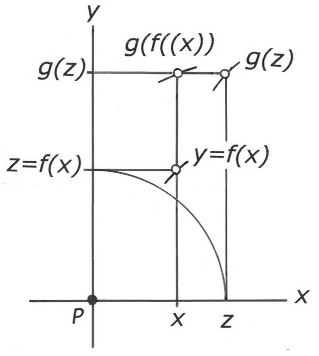
kde f je dána v intervalu $\langle -2, 2\rangle$ předpisem

$$y = \sqrt{4 - x^2}.$$

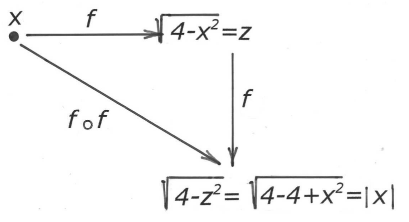
Podle obr. 4 můžeme nakreslit obr. 6, z něhož plyne, že $f \circ f = |x|$. Tentýž výsledek dostaneme podle obr. 7.



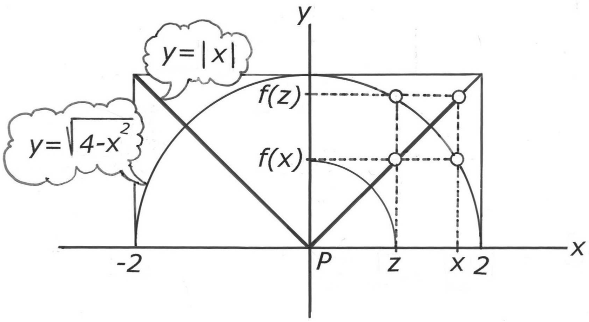
Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

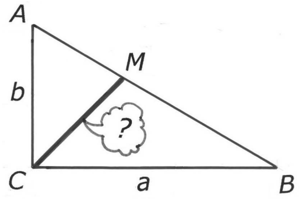


Obr. 7

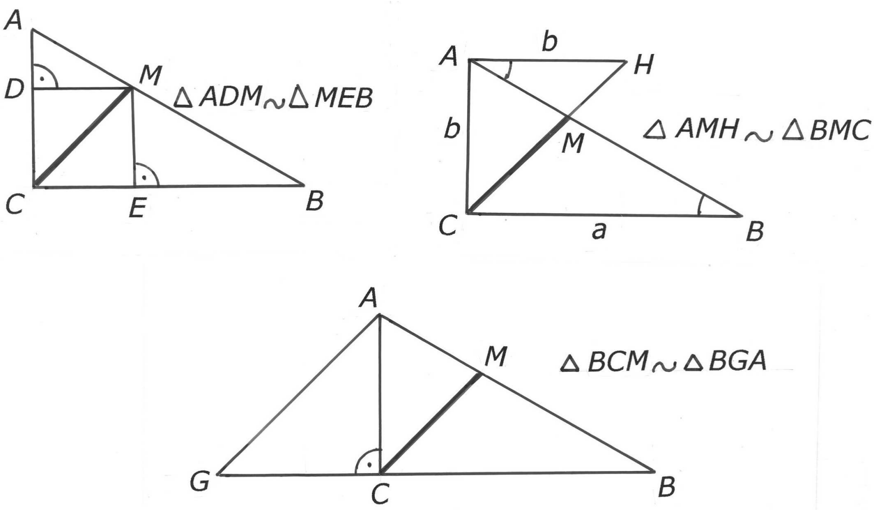
V některých geometrických úlohách (např. důkazových, početních či konstrukčních) bývá významnou součástí řešení doplnění vhodného obrázku. Způsob tohoto doplnění je spíše otázkou intuice a zkušenosti, než otázkou logiky. Doložme to řešením úlohy:

V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b vypočítejte délku úsečky CM, kde M je průsečík osy pravého úhlu pravoúhlého trojúhelníku ABC s jeho přeponou (obr. 8).

Tři různé možnosti doplnění obrázku a z nich vyplývající řešení jsou naznačeny na obr. 9.



Obr. 8



Obr. 9

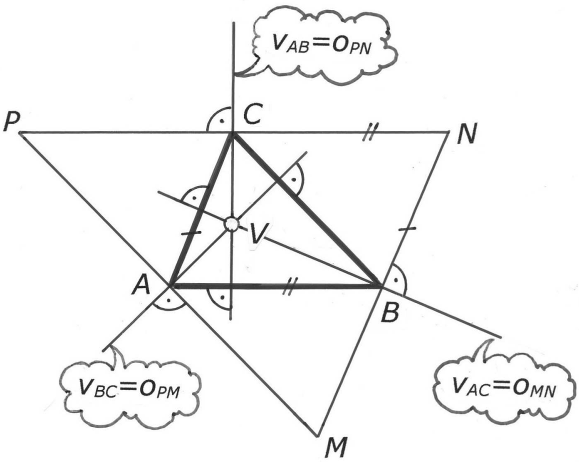
3. Důkazy beze slov

Geometrický obrázek může vyjadřovat myšlenku beze slov podobně jako kreslený vtip. Příběh tradičně formulovaného důkazu je vyjádřen slovně nebo symbolicky posloupností na sebe navazujících myšlenek. Vizuální důkaz je nakreslený příběh. Vidíme celek důkazu, jeho pochopení však může ztěžovat skutečnost, že není zřejmá posloupnost úvah. Kromě toho obrázek nepostihuje obvykle „obecnou situaci“, bývá omezen na „konkrétní“ parametry. Přesto může být někdy z obrázku idea důkazu průkaznější než např. z posloupnosti implikací. Podobně jako nemusí být na první pohled srozumitelný kreslený vtip, může se stát, že neporozumíme ihned kreslenému důkazu. Stojí však za to se nad obrázkem zamyslet.

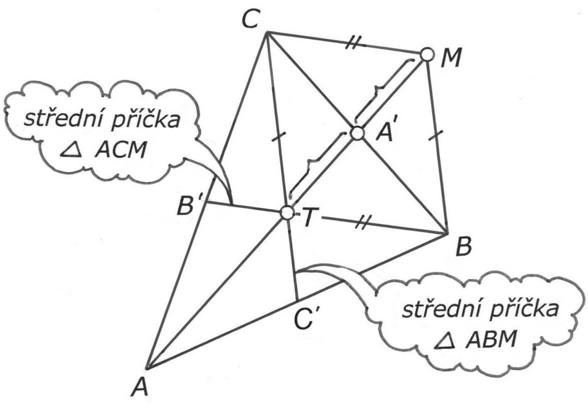
Uveďme několik příkladů.

Gaussův důkaz věty o průsečíku tří výšek trojúhelníku spočívá na myšlence konstruovat nový trojúhelník, v němž výšky původního trojúhelníku budou osami stran trojúhelníku nového (obr. 10).

Čechův důkaz věty o těžišti trojúhelníku spočívá v konstrukci obrazu M vrcholu A trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti se středem v průsečíku T těžnic BB' a CC' (obr. 11).



Obr. 10



Obr. 11

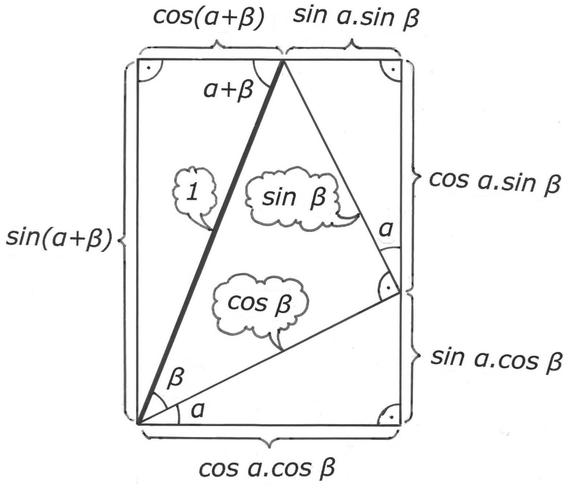
Nevím, zda je Čechův důkaz z jeho učebnice z r. 1946 původní, je však určitě jednodušší než důkazy uváděné v klasických knihách [1], [6], [13] a [28].

Platnost součtových vzorců

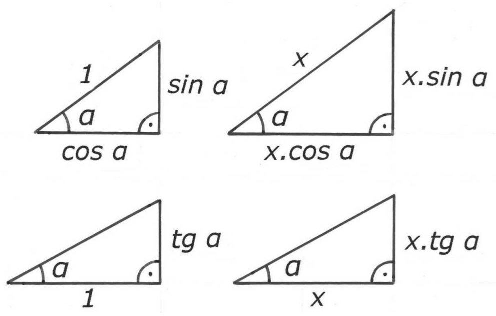
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{5}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{6}$$

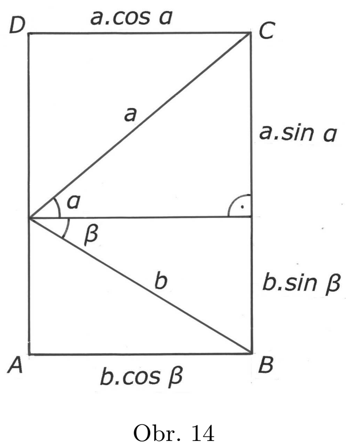
můžeme, pro případ, že $\alpha+\beta < 90°$, nahlédnout s použitím obr. 12 (podle [9], s. 470). Před tím je ovšem výhodné připomenout „obrázkové“ definice goniometrických funkcí podle obr. 13. Platnost vzorce (5) je vidět i z obr. 14, vypočítáme-li dvojím způsobem obsah obdélníku $ABCD$.



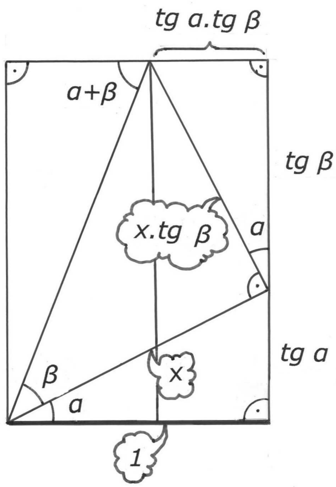
Obr. 12



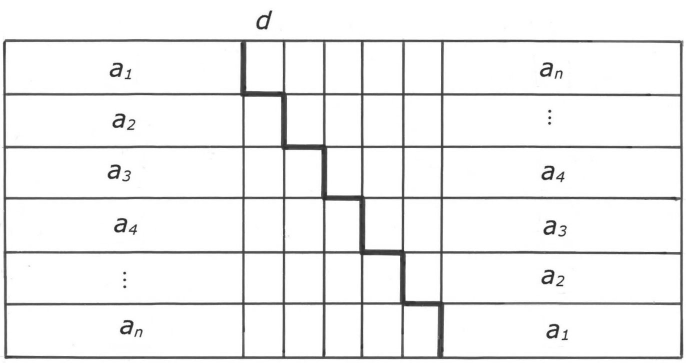
Obr. 13



Obr. 14



Obr. 15



Obr. 16

Vzorec

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \tag{7}$$

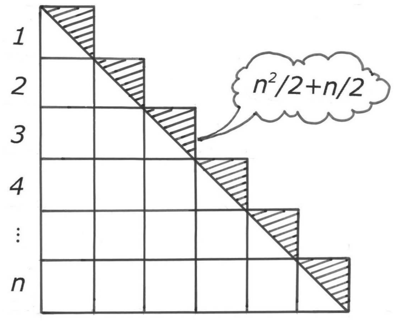
můžeme odpozorovat z obr. 15 (viz [21], s. 47).

Všeobecně známý nápad mladého Gausse pro výpočet součtu

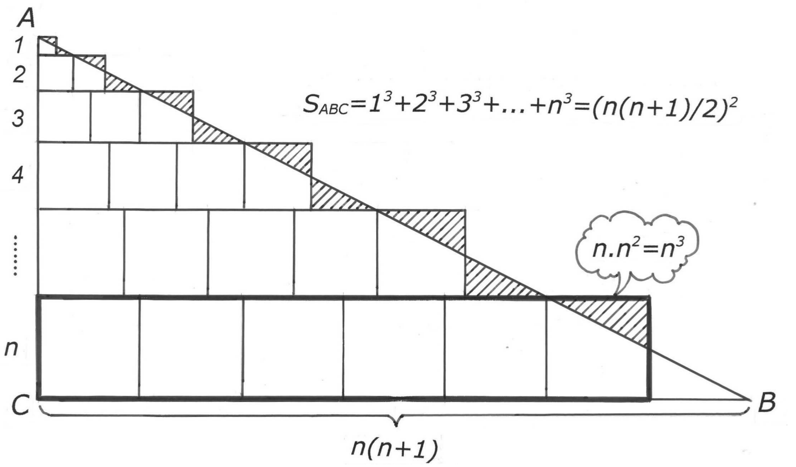
$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \cdots + (50 + 51) = 101 \cdot 50 = 5050$$

je možné aplikovat i na součet prvních n členů aritmetické posloupnosti s prvním členem a_1 a diferencí d (viz [14], s. 24). Podle obr. 16 je

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \tag{8}$$



Obr. 17



Obr. 18

Součet prvních n přirozených čísel můžeme ovšem odvodit i podle obr. 17 (viz [20], s. 70):

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n(n+1). \tag{9}$$

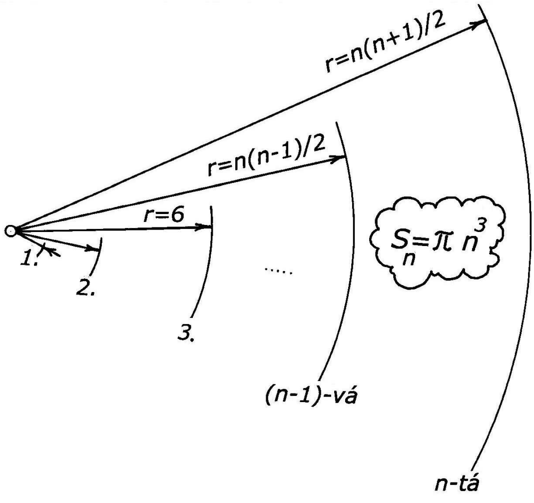
Vzorec (9) můžeme využít k výpočtu součtu

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(n(n+1)/2)^2 \tag{10}$$

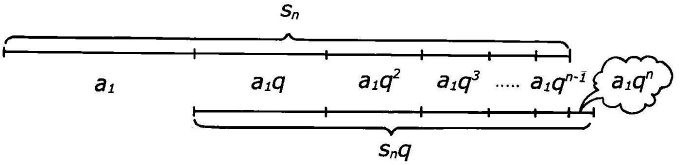
podle nápadu *Georga Schregeho* ([20], s. 90) z obr. 18.

Překvapivé odvození vzorce (10) založené na myšlence, že obsah kruhu můžeme získat jako součet obsahů mezikruží, která jsou jeho částí, objevili *W. Derring* a *J. Herstein* a uvádím je na obr. 19, kde jsou nakresleny části soustředných kružnic s poloměry $r_n=n(n+1)/2$ pro $n=1,2,3,\ldots,n-1,n$. Protože pro obsah n-tého mezikruží dostaneme

$$\pi(n(n+1)/2)^2-\pi(n(n-1)/2)^2=\pi n^3,$$



Obr. 19



Obr. 20

platí pro obsah kruhu s poloměrem r_n

$$\pi \cdot 1^3 + \pi \cdot 2^3 + \pi \cdot 3^3 + \ldots + \pi n^3 = \pi(n(n+1)/2)^2$$

neboli (10).

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti s prvním členem a_1 a kvocientem q $(0 < q < 1)$ můžeme vypočítat podle obr. 20.

Protože

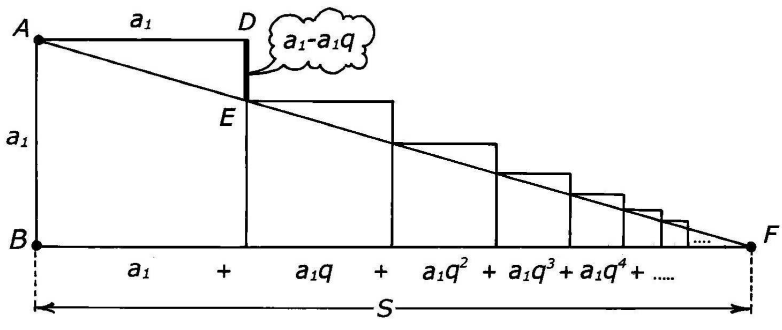
$$s_n q = s_n - a_1 + a_1 q^n, \tag{11}$$

je

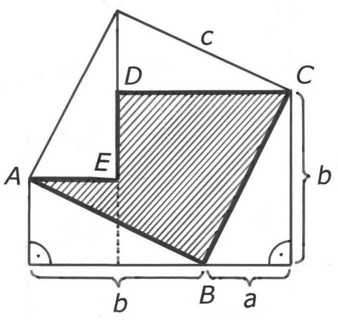
$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{12}$$

Vzorec

$$s = \frac{a_1}{1 - q}$$



Obr. 21



Obr. 22

pro součet nekonečné geometrické řady můžeme objevit v obr. 21 (viz [20], s. 120), neboť z podobnosti trojúhelníků ADE a FBA plyne

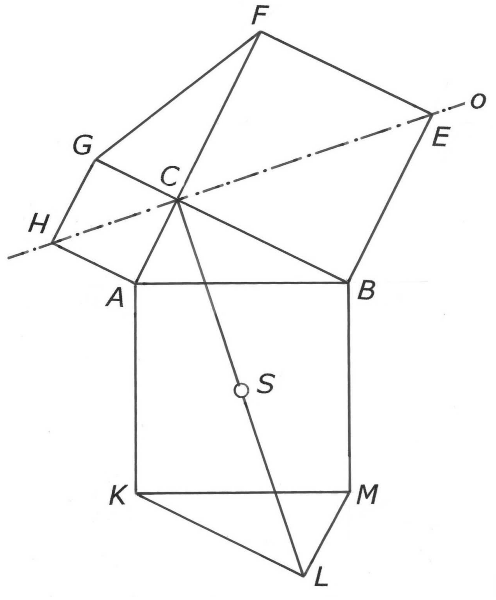
$$\frac{s}{a_1} = \frac{a_1}{a_1 - a_1 q}$$

Všimněme si nyní několika příkladů z geometrie.

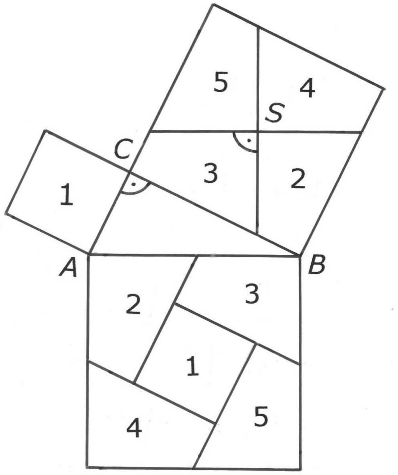
Důkazů *Pythagorovy věty* je známo více než 300. Řadu z nich publikoval počátkem dvacátého století profesor göttingenské university *E. Lietzmann* (viz [17]), 13 důkazů obsahují knihy Nelsenovy, z novějších monografií o Pythagorově větě připomeňme německou knihu [5] a americkou [18]. Řadu pěkných důkazů lze najít v našich i cizích učebnicích. Původní důkazy Pythagorovy věty, které pocházejí od *Eukleida*, *Bolzana* a *Polyi*, uvádím ve své publikaci *Elementární matematika a kultura* [15]. Jako podnět k zamyšlení zde připomeneme pouze pět obrázků se stručným komentářem.

Indický důkaz Pythagorovy věty z 9. století je uveden na obrázku 22. Připojíme-li k pětiúhelníku $ABCDE$ dvěma různými způsoby shodné pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami a, b a přeponou c, dostaneme buď čtverce s obsahy a^2, b^2, nebo čtverec s obsahem c^2 (viz [17], s. 28).

Leonardu da Vincimu (1452–1519) se připisuje podle knihy ([21], s. 5) důkaz vycházející z obr. 23. Ke čtvercům nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku ABC se připojí podle obrázku trojúhelník GFC s trojúhelníkem ABC shodný a stejný troj-



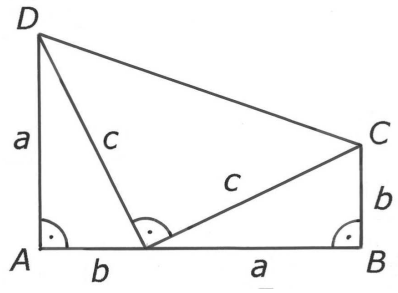
Obr. 23



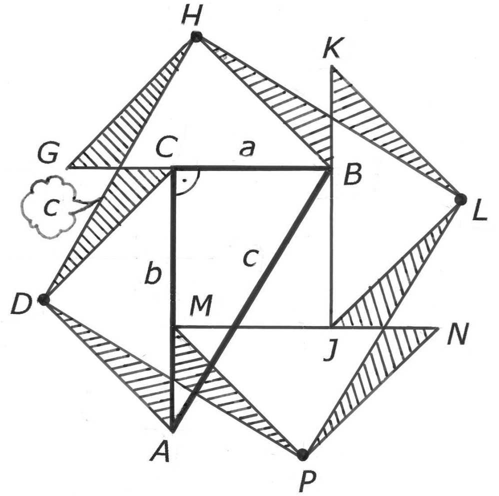
Obr. 24

úhelník MKL se podle obrázku připojí ke čtverci nad přeponou AB. Z rovnosti obsahů šestiúhelníků $ABEFGH$ a $ACBMLK$ vyplyne tvrzení Pythagorovy věty. Jmenované šestiúhelníky mají stejné obsahy, protože jejich „poloviny" (tj. čtyřúhelníky $HABL$ a $CAKL$ jsou shodné).

Od *H. E. Dudeneyho* pochází důkaz znázorněný na obr. 24. Přímky vedené středem S čtverce nad větší odvěsnou rovnoběžně a kolmo k přeponě rozdělí čtverec nad



Obr. 25



Obr. 26

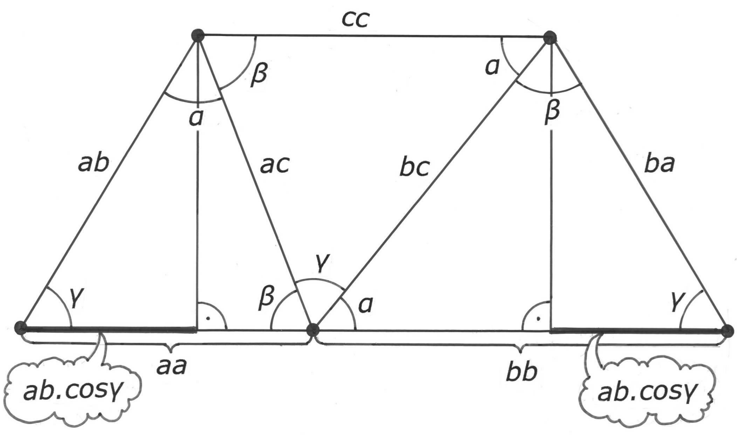
touto odvěsnou na čtyři shodné čtyřúhelníky, které lze postupně přesunout do nových poloh ve čtverci nad přeponou podle obrázku tak, že „nevyplněná“ oblast je čtverec shodný se čtvercem nad menší odvěsnou (viz [17], s. 23).

Dvacátý americký prezident *J. A. Garfield* je autorem jednoduchého důkazu Pythagorovy věty spočívajícího na dvojím vyjádření obsahu lichoběžníku $ABCD$ podle obr. 25 (viz [17], s. 34).

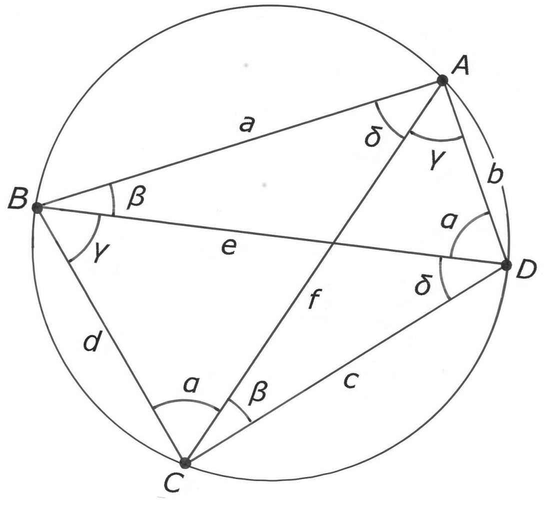
Roku 1999 publikoval *Poo-sung Park* důkaz znázorněný na obr. 26. K pravoúhlému trojúhelníku ABC s odvěsnami a, b a přeponou c jsou „připojeny“ podle obrázku čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky BGH, JKL, MNP a ACD s celkovým obsahem b^2. Ten dává s obsahem a^2 čtverce $MJBC$ obsah c^2 čtverce $DPLH$ (viz [21], s. 8).

Byl to patrně *Frank Burk*, který r. 1996 pojal nápad využít při důkazech podobné trojúhelníky, jejichž poměr podobnosti je roven vždy velikosti jedné strany.

Tak např. zvětšíme-li a-krát každou stranu trojúhelníku se stranami a, b, c, dostaneme trojúhelník původnímu trojúhelníku podobný se stranami aa, ab, ac. Stejně



Obr. 27



Obr. 28

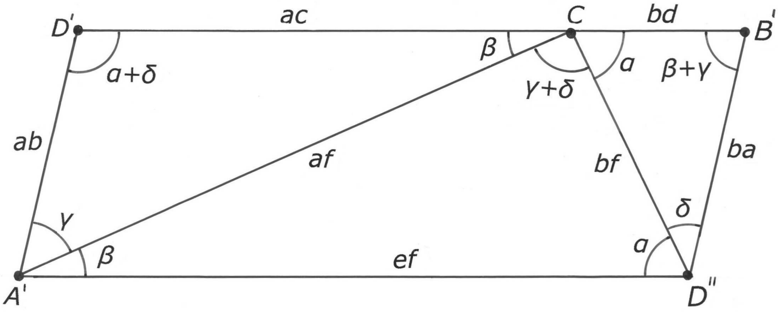
můžeme sestrojit trojúhelníky se stranami ba, bb, bc a ca, cb, cc. Uspořádáme-li tyto trojúhelníky „do lichoběžníku“ podle obr. 27, vidíme, že platí kosinová věta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{13}$$

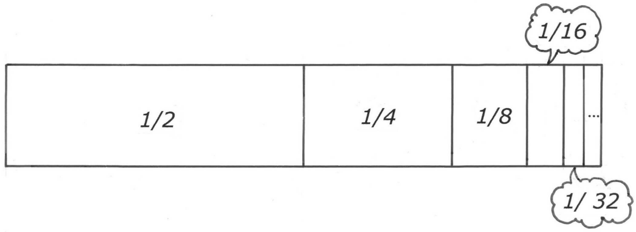
Je-li $\gamma = 90\,^\circ$, dostaneme přirozeně důkaz věty Pythagorovy.

Aplikujeme-li popsanou metodu na trojúhelníky ADC, ABC a ABD v tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ na obr. 28, dostaneme podle obr. 29 z rovnoběžníku $A'D'B'D''$ tvrzení Ptolemaiovy věty

$$ef = ac + bd.$$



Obr. 29



Obr. 30

Autory tohoto důkazu jsou *E. Derrick* a *J. Herstein* (viz [2], s. 386).

Všimněme si nakonec možnosti znázornit součet některých geometrických řad.

Protože střední příčka dělí libovolný rovnoběžník na dvě části stejného obsahu, vyjadřuje aplikace takovéhoto dělení podle obr. 30 platnost rovnosti

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots=1.$$

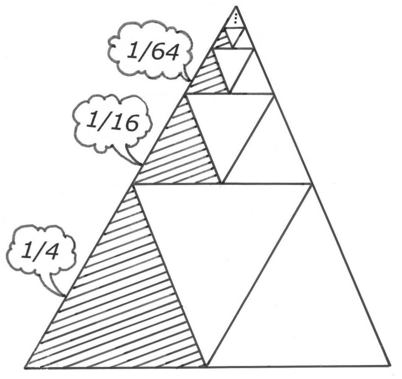
Protože tři střední příčky dělí libovolný trojúhelník na čtyři části stejného obsahu, vyjadřuje obr. 31 součet nekonečné geometrické řady

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots=\frac{1}{3}.$$

4. Závěry

Otázku *jak učinit myšlenku viditelnou* lze patrně v historii matematiky sledovat až k Pythagorově geometrizaci aritmetiky ve formě tzv. figurálních čísel.

A po téměř 2 500 letech, v roce 1978 píše *David W. Henderson* z Cornellovy univerzity poeticky „*Geometry is to open my mind*“ ([10], s. II) a o rok později *Milan Hejný* z bratislavské univerzity vydává knihu „*Geometria naučila človeka myslieť*“ [8].



Obr. 31

Patrně právě spjatost logického uvažování s geometrickou intuicí, tak charakteristickou pro geometrii, lze považovat za vysvětlení skutečnosti, že to byla právě tato disciplína, která našla v *Eukleidovi* jako první v historii deduktivní zpracování, ačkoliv není zdaleka nejjednodušší matematickou strukturou. I proto jsem se snažil v této stati ukázat spjatost matematického myšlení s názorným obrazovým materiálem. Tento přístup snad může, aspoň v některých případech, kladně ovlivnit porozumění matematice a tak přispívat k získávání zájmu o matematiku. Učitel by měl při vyučování pracovat s takovými reprezentacemi matematických pojmů a postupů, které jsou blízké studentům, které jsou přitažlivé. Nemusí to být vždycky reprezentace vizuální. *Umberto Eco* (*1932) např. upozorňuje, že „západní myšlení" je založeno na řeckém principu, podle něhož poznání je spjato s viděním, kdežto kultura židovská dává přednost slovním vyjádřením. Přitom „ikona je od nepaměti součástí vojska analogického, text položil základy budoucího systému digitálního" (viz [3], s. 97 a 107).

Neporozumění matematice může mít kořeny v neporozumění jejímu jazyku. Matematiku nelze od jejího jazyka oddělit, jazyk je formou existence matematiky. Probírání abstraktních matematických teorií bez náležitého porozumění je jedním z hlavních problémů matematického vzdělávání. Studenti by se měli učit jazyku matematiky podobně, jako se učí dítě mateřskému jazyku, „implicitně" tím, že ho spolu s učitelem používají při řešení problémů. Neverbální vyjadřování, kterému jsme se zde věnovali, nemůže být oddělováno od vyjadřování slovního, obě složky se musí vzájemně doplňovat. Porozumět matematice znamená osvojit si i její jazyky.

Je možná příznačné, že česká pedagogická psychologie snad poprvé ve své historii vyjádřila kladný vztah k neverbálnímu vyjadřování zařazením „učení z obrazového materiálu" v pracech Jiřího Mareše (*1942). V klasických pracích [23] a [25] jsem tyto přístupy nenašel. Mareš přirozeně nepíše v psychologické monografii o geometrii, nepíše ani o tom, jak učinit myšlenku viditelnou, zdůrazňuje však, že obrazový materiál má ukazovat souvislosti (funkce procedurální) a má přispívat k pochopení učiva žáky (funkce interpretující) ([19], s. 138). Tyto přístupy jsou zcela v souladu s mými názory, které jsem se snažil vyložit v tomto článku.

L i t e r a t u r a

[1] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to geometry.* Willey, New York, 1961.

[2] Derrick, W., Herstein, J.: *Proofs without words: Ptolemy's theorem.* College Math. J. *43 (5)* (2013), 386.

[3] Eco, U.: *Kant a ptakopysk.* Argo, Praha, 2011.

[4] Foer, J.: *Šetři se, Einsteine!* Jota, Praha, 2012.

[5] Fraedrich, A. M.: *Die Satzgruppe des Pythagoras.* Bi, Mannheim, 1995.

[6] Hadamard, J.: *Lessons in geometry.* AMS, Newton, 2008.

[7] Hadamard, J.: *The mathematician's mind.* University Press, Princeton, 1996.

[8] Hejný, M.: *Geometria naučila človeka myslieť.* SPN, Bratislava, 1979.

[9] Hejný, M.: *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, Bratislava, 1989.

[10] Henderson, D. W.: *Experiencing geometry.* Prentice Hall, New York, 1996.

[11] Holubář, J.: *Metodické semináře akademika Čecha o matematice.* Matematika ve škole *6 (X)* (1960), 325–329.

[12] Hrubý, D., Kubát, J.: *Matematika pro gymnázia. Diferenciální a integrální počet.* Prometheus, Praha, 1997.

[13] Kiselev, A. P.: *Geometrie.* Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1952.

[14] Křížek, M., Somer, L., Šolcová, A.: *Kouzlo čísel.* Academia, Praha, 2011.

[15] Kuřina, F.: *Elementární matematika a kultura.* Gaudeamus, Hradec Králové, 2012.

[16] Kvasz, L.: *Patterns of change.* Birkhäuser, Basel, 2008.

[17] Lietzmann, W.: *Der Pythagoreische Lehrsatz.* Teubner, Leipzig, 1913.

[18] Maor, E.: *The Pythagorean theorem.* Princeton University Press, 2007.

[19] Mareš, J.: *Pedagogická psychologie.* Portál, Praha, 2013.

[20] Nelsen, R. B.: *Proofs without words.* MAA, Washington, 1993.

[21] Nelsen, R. B.: *Proofs without words II.* MAA, Washington, 2000.

[22] Odvárko, O., Fořt, J., Novák, B.: *Matematika pro gymnázia, sešit 3.* SPN, Praha, 1978.

[23] Příhoda, V.: *Úvod do pedagogické psychologie.* SPN, Praha, 1956.

[24] Riečan, B.: *Kultúra v matematike, matematika v kultúre.* Obzory matematiky, fyziky a informatiky *42 (4)* (2013), 71–72.

[25] Thorndike, E. L.: *Pedagogická psychologie.* Dědictví Komenského, Praha, 1929.

[26] Třicátý ročník matematické olympiády. SPN, Praha, 1983.

[27] Vopěnka, P.: *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky.* Práh, Praha, 2004.

[28] Vyšín, J.: *Elementární geometrie I.* Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1952.

[29] Yalom, I. D.: *Láska a její kat.* Portál, Praha, 2010.