

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Miroslav Miler

Atmosférická duha – jemná struktura

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 59 (2014), No. 2, 105--116

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/143891>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2014

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# Atmosférická duha – jemná struktura

*Miroslav Miler, Praha*

## Úvod

Jedním z nejpozoruhodnějších jevů v atmosférické optice je duha [4], [8]. Každý se s ní setkal mnohokrát v životě. Odedávna učenci usilovali o její popis a vysvětlení. K fyzikálnímu vysvětlení se obvykle užívá geometrická optika a je všeobecné mínění, že tento jednoduchý problém byl dávno vyřešen a dnes už k němu není co dodat. Geometrická optika však je pouze prvním přiblížením, a jak je známo např. z teorie optického zobrazení, vlnově optický přístup poskytne další podrobnější vzhled do podstaty optických jevů.

Účelem tohoto článku je právě uplatnit při popisu duhy vlnovou optiku, která vede k objasnění jemné struktury duhy. Protože však nelze vkročit přímo do jemné struktury jevu, aniž by se připomnělo základní přiblížení, bude nejprve popis směřovat ke geometrické optice. K tomu se nepoužijí jen obrázky převzaté z literatury, ale bude podrobně vyšetřen dopad paprsků na kulovou kapku, šíření paprsků v ní a výstup z ní. Teprve potom se přistoupí k aplikaci vlnové optiky. Přes optickou difrakci jako všeobecnou metodu pro výpočty šíření optických vln se dospěje k Airyově funkci jako řešení problému jemné struktury duhy [9]. Článek je určen všem zájemcům o optické jevy v atmosféře a neklade si za cíl nacházet v oboru absolutně nové poznatky.

Autor tohoto článku se začal poněkud podrobněji zabývat duhou potom, co ji nafotografoval ze svého okna v Praze-Vršovicích, jak se klene od kostela sv. Václava (obr. 1). Uveďme pro informaci, že tento kostel je vynikajícím dílem architekta prof. J. Gočára z r. 1929, kdy se slavilo milénium smrti uvedeného českého světce. Železobetonový skelet stavby a řešení stropu nad vedlejšími loděmi vystavěného jako mostní konstrukce vyloučily nutnost podpůrných sloupů stěn hlavní lodě a umožnily průběžná okna bez sloupků na bočních stěnách vedlejších lodí.

Historii výzkumu duhy lze najít např. v práci [8] nebo v řadě odkazů na internetu, a proto se jí zde nebudeme zaobírat.

## Základní přístup podle geometrické optiky

Duha se vyznačuje především rozkladem bílého slunečního světla na barevné složky, který se uskutečňuje lomem světla na rozhraní dvou optických prostředí označovaných indexy 1 a 2 podle Snellova zákona

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2, \quad (1)$$

kde symbolem  $n_j$  je značen index lomu a symbolem  $\alpha_j$  úhel mezi paprskem a kolmicí dopadu. V našem případě jde o rozhraní mezi vodní kapkou a vzduchem. Protože index



(a)



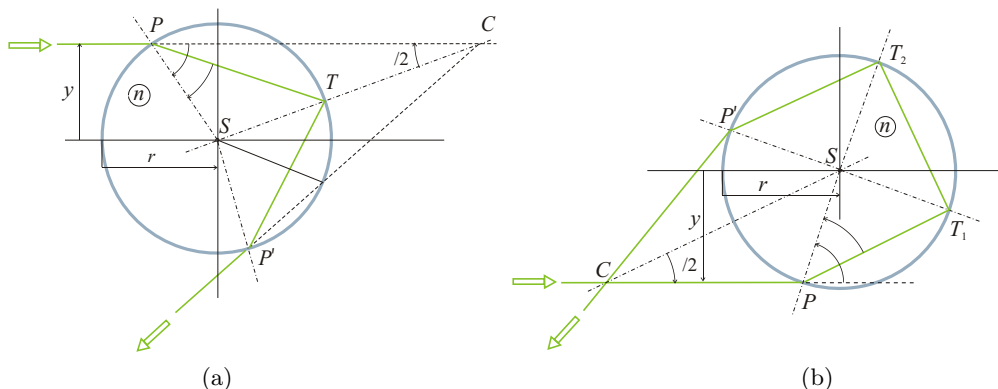
(b)

Obr. 1. Duha nafotografovaná z okna poblíž kostela sv. Václava v Praze-Vršovicích dne 28. 6. 2007

lomu je závislý na barvě světla, budou se úhly lomu pro různé barvy navzájem lišit, a tak dochází k rozkladu světla: různé barvy se šíří pod odlišnými úhly.

Protože duhový oblouk se vytváří na straně odvrácené od Slunce, když pozorovatel je zády k němu, musí v kapce vody nastat alespoň jeden odraz světla. Společně s dvěma lomy paprsku, jedním na vstupu a jedním na výstupu, jde při jednom odrazu uvnitř o duhu hlavní (primární) a při dvou odrazech o duhu vedlejší (sekundární), která je umístěna nad duhou hlavní (viz obr. 1a). Protože při odrazu nastává otočení pořadí paprsků, bude také pořadí barev navzájem opačné. Při každém odrazu se část světla lomí ven z kapky, proto vedlejší duha, která má navíc další lom, je oproti hlavní duze slabší. Odrazy uvnitř kapky totiž nejsou *úplně vnitřní odrazy*, jak se někteří domnívají, a autor k nim také zprvu patřil.

Vytvoření hlavní duhy je zobrazeno na obr. 2a. Pro snazší odvození se předpokládá vodorovné šíření dopadajícího paprsku. Poloměr kapky je označen písmenem  $r$  a výška paprsku nad vodorovnou osou písmenem  $y$ . Relativní výška vzhledem k poloměru je tedy  $y/r$  s hodnotami mezi 0 a 1. Index lomu vzduchu je pro všechny barvy roven přibližně 1,00. Vodní kapka má index lomu  $n$ , který se pohybuje kolem hodnoty 1,33. Jestliže úhel dopadu označíme  $\alpha$  a úhel lomu  $\beta$ , pak hodnota posledního bude dána uvedeným Snellovým zákonem (1) jako  $\sin \beta = (1/n) \sin \alpha$ . Úhlový poloměr duhového oblouku musí být roven ostrému úhlu mezi přímkou dopadajícího paprsku a přímkou paprsku vystupujícího. Z úhlů trojúhelníku  $PCT$  pak plyne  $\gamma/2 = 2\beta - \alpha$  a úhlový poloměr duhového oblouku pak se dá s použitím Snellova zákona napsat jako



Obr. 2. Obecný paprsek (a) hlavní duhy a (b) vedlejší duhy

$\gamma_1 = 2(2 \arcsin [(1/n) \sin \alpha] - \alpha)$ . Protože  $\sin \alpha = y/r$ , je konečný vztah pro úhlový poloměr

$$\gamma_1 = 2 \left( 2 \arcsin \left[ \frac{1}{n} \frac{y}{r} \right] - \arcsin \left[ \frac{y}{r} \right] \right), \quad (2)$$

kde index 1 znamená, že jde o hlavní duhu.

Polohový (elevační) úhel vrcholu (nejvyššího bodu) duhového oblouku je při vodorovném dopadajícím paprsku roven úhlovému poloměru duhového oblouku. Jestliže Slunce je výše nad obzorem a jeho polohový úhel je  $\theta$ , pak dopadající paprsek svírá s vodorovnou rovinou úhel  $-\theta$  a vrchol duhy má polohový úhel  $\gamma - \theta$ .

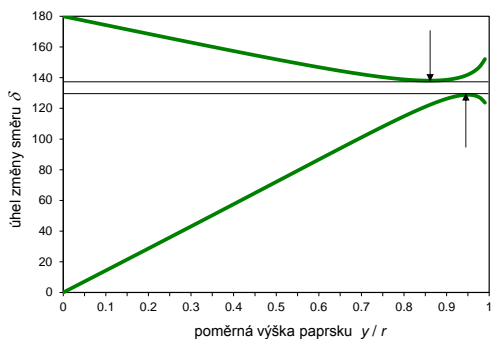
Vytvoření vedlejší duhy je zobrazeno na obr. 2b. Aby výsledný paprsek směřoval opět shora dolů, musejí se vzít v úvahu paprsky dopadající do spodní poloviny kapky. Opět stejně jako u duhy hlavní užitím poznatek o úhlech v trojúhelnících lze odvodit vztah pro úhel  $\gamma = 2(\alpha - 3\beta + 90^\circ)$ , odkud plyne

$$\gamma_2 = 180^\circ - 2 \left( 3 \arcsin \left[ \frac{1}{n} \frac{y}{r} \right] - \arcsin \left[ \frac{y}{r} \right] \right). \quad (3)$$

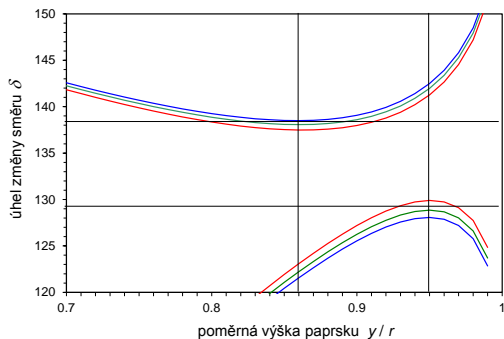
Oba vztahy (2) a (3) jsou znázorněny jako funkce proměnné  $y/r$  pro zelené světlo na obr. 3a. Přitom vystupující paprsek s nulovým polohovým úhlem je namířen proti paprsku dopadajícímu a poměrné výšky paprsků pro vedlejší duhu mají kladné hodnoty. Obě křivky mají pro poměrné výšky paprsků blízké jednotce své extrémy: hlavní duha maximum a vedlejší duha minimum ostřejší. V těchto oblastech se duhy začnou projevovat; jinde se jednotlivé barvy navzájem smísí a smyjí. Hlavní duha je v důsledku ploššího maxima širší než duha vedlejší, která má maximum ostřejší.

Krajní paprsek na výstupu (tj. ten, který má největší odchylku) se nazývá *Descartův*. Dopadové výšky Descartových paprsků se pro obě duhy samozřejmě vypočítají jako extrémy ztotožněním prvních derivací funkcí (2) a (3) s nulou. Po jednoduchém výpočtu (viz dodatek I) se dospěje ke vztahům, které je možno sjednotit do společného vztahu

$$\left( \frac{y}{r} \right)_{um} = \sqrt{\frac{(m+1)^2 - n^2}{(m+1)^2 - 1}} \quad (4)$$

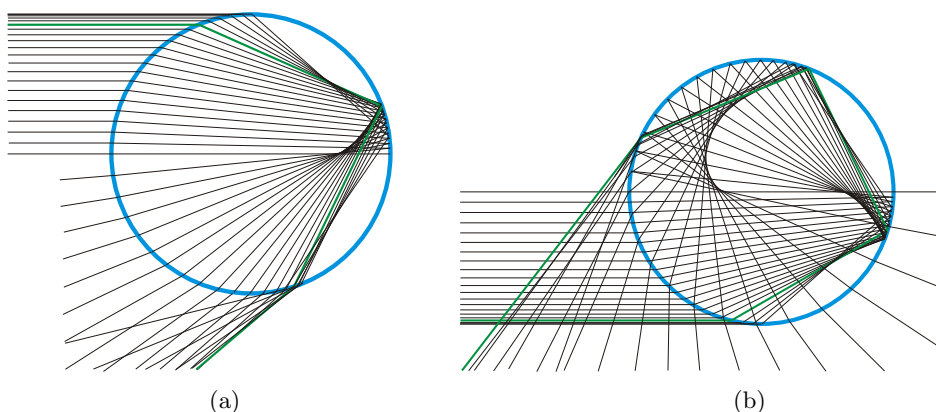


(a)



(b)

Obr. 3. (a) Úhlový poloměr duhového oblouku jako funkce  $y/r$  pro zelenou barvu světla a (b) její detail pro tři barvy v úvratích



(a)

(b)

Obr. 4. Průchod množiny paprsků kapkou a výstup z ní pro (a) hlavní a (b) vedlejší duhu

pro  $m = 1, 2$  vyjadřujícího hlavní resp. vedlejší duhu. Veličina  $n$  je index lomu kapky pro počítanou vlnovou délku. Tak např. pro zelené světlo je index lomu  $n = 1,334$  a výšky paprsků v úvratích jsou 0,860 a 0,950, což odpovídá úhlovým poloměrům duhových oblouků  $41,93^\circ$  a  $51,15^\circ$ . Pro jiné vlnové délky se výšky paprsků v úvratích mění jen nepatrně, úhlové poloměry duhového oblouku mají rozdíly zřetelnější, jak je to zřejmé z obr. 3b, který je detailem obr. 3a pro tři vlnové délky (červené světlo  $n = 1,330$ , zelené světlo  $n = 1,334$  a modré světlo  $n = 1,337$ ).

Protože do oblastí mezi oběma duhami se nerozptylují žádné paprsky, jeví se tato oblast tmavší. Tato oblast se nazývá *Alexandrovův tmavý pás*.

Šíření obecného paprsku v kapce pro hlavní a vedlejší duhu již bylo popsáno, ale pro názornost je vhodné vyjádřit graficky celou množinu paprsků. Pro hlavní duhu je množina paprsků znázorněna na obr. 4a, pro vedlejší duhu na obr. 4b.

Je zřejmé, že paprsky vytvářejí po lomech a odrazech uskupení s obálkami, které

se v optice nazývají *kaustické křivky* a jsou objektem podrobného zkoumání [10]. Teoreticky, použitím jak paprskové teorie, tak i vlnové teorie, byla vyšetřována kaustická struktura ve vodní kapce nejen pro jeden a dva, ale i více odrazů v článku [7]. Jak je vidět z chodu paprsků, vznikají po odrazu (u hlavní a po druhém odrazu u vedlejší duhy) dvě kaustické křivky: jedna se týká paprsků vnitřních od již zmíněného krajního Descartova paprsku a druhá paprsků vnějších. Ty vnější se pak vracejí do prostoru vystupujících vnitřních paprsků a křížují se s nimi pod různými úhly. Z toho vyplývá, že musí dojít ke skládání vln a vzniku difrakčních proužků. To bude předmětem další části článku.

Obr. 4 byl vytvořen tak, že byly vypočteny souřadnice průsečíků paprsků s kružnicí, která představuje meridiální řez kulovou kapkou, a ty byly pospojovány. Množina průsečíků pro hlavní a vedlejší duhu je shrnuta v dodatku II.

Jak je zřejmé, kaustické křivky jsou rozsáhlejší a zejména po druhém odrazu je křivka také silně zakřivena. Vnější paprsky se také vracejí do prostoru vnitřních paprsků, což je podmínkou vzniku difrakčních proužků.

## Přístup na základě vlnové optiky

Jak již bylo uvedeno, je ve vlnové optice šíření optických vln popsáno obecně difrakcí. Vyhněme se často v učebnicích používanému termínu „ohyb“, který vznikl otrockým překladem z německého die Beugung. Termín ohyb je zavádějící, protože spíše jde o odchylování světelného paprsku než jeho ohýbání. Bohužel, slova s kořenem ohyb jsou nějak zadržena pod kůží českých mluvčích, protože i ve vlaku se nemáme z oken vyklánět, ale nahýbat!?

Popis difrakce optických vln vychází z Huygensova principu, který tvrdí, že při šíření světla je vlnoplocha dána obálkou kulových vlnoploch elementárních vln vycházejících z jednotlivých bodů předešlé vlnoplochy. Jestliže chápeme obálku jako sumu vlnoploch, pak lze tento princip zapsat jako

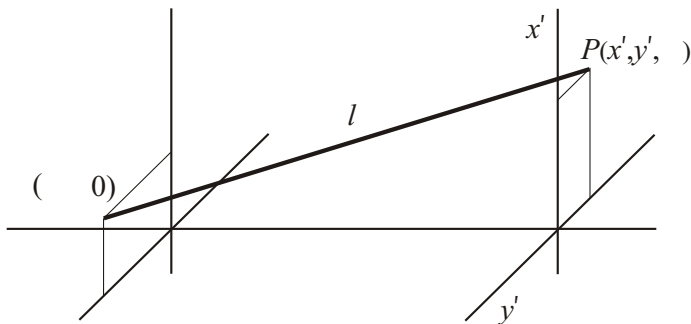
$$U' = \sum_j U_j \frac{\exp[ik_j l]}{l}, \quad (5)$$

kde  $U'$  je amplituda nové vlny,  $U_j$  je amplituda elementárních vlnoploch, které se šíří od staré vlny, exponenciální funkce  $\exp[ik_j l]$  vyjadřuje kulové elementární vlny a  $l$  je poloměr křivosti vlnoplochy. Veličina  $k_j = 2\pi/\lambda$  se nazývá úhlový vlnčet vlny. Poloměr  $l$  se vyskytuje ve jmenovateli, protože je známo, že intenzita vlnění klesá se čtvercem vzdálenosti, a protože intenzita je úměrná čtverci amplitudy, klesá amplituda nepřímo úměrně se vzdáleností.

Po přechodu ke kontinuálním souřadnicím ze vztahu (5) vyplývá

$$U'[x', y', \zeta] = -i \frac{k}{2\pi} \int \int_{\Sigma} U[\xi, \eta, 0] \frac{\exp[ik l]}{l} d\sigma, \quad (6)$$

kde písmenem  $U$  jsou obecně značeny komplexní amplitudy s reálnou částí jako reálnou amplitudou a exponenciální částí jako fází vlnění:  $U[x, y, z] = u[x, y, z] \exp[-i\phi[x, y, z]]$ . Předpokládá se neměnná vlnová délka, čímž vypadává z úvah časová závislost a tím rychle změny charakterizující vlnění. Integrál se bere přes původní vlnoplochu  $\Sigma$



Obr. 5. Funkce optické dráhy

a platí pro malé úhly šíření světla vůči ose  $z$ . Koeficient před integrálem  $-ik/(2\pi)$  vyplývá z přesného odvození tohoto vztahu, které se většinou probírá zdlouhavě ve vysokoškolských učebnicích.

Vzdálenost  $l$  se obvykle nazývá *funkce optické dráhy* (OPF – z angl. optical path function) a vypočítá se podle obr. 5 na základě Pythagorovy věty jako

$$l = \sqrt{(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + \zeta^2}. \quad (7)$$

S iracionálním výrazem nelze v našem případě dál pracovat, a proto je třeba učinit nějaká přiblížení pro jeho odstranění. Samozřejmý je předpoklad, že příčné souřadnice jsou mnohem menší než souřadnice podélná,  $(x', y', \xi, \eta) \ll \zeta$ , a pak je možno odmocninu rozvést v Taylorův rozvoj, v němž uplatníme členy pouze do druhého stupně,

$$l \approx \zeta + \frac{x'^2 + y'^2}{2\zeta} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2\zeta} - \frac{x'\xi + y'\eta}{\zeta}. \quad (8)$$

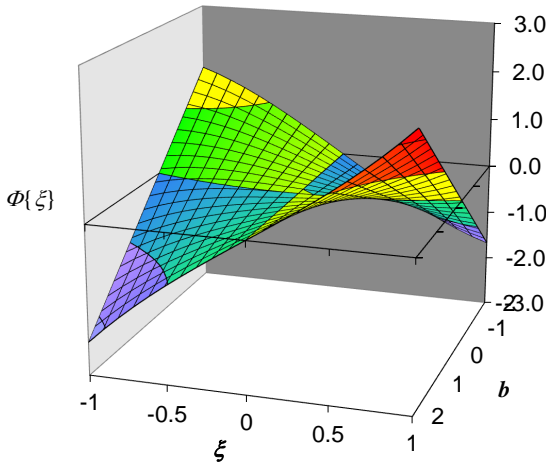
Na základě předechozí nerovnosti lze funkci optické dráhy ve jmenovateli nahradit vzdáleností mezi difrakční a pozorovací rovinou  $l \approx \zeta$ . Difrakční vztah pak obecně bude

$$U'[x', y', \zeta] = -i \frac{k}{2\pi} \frac{1}{\zeta} \exp \left[ ik \left( \zeta + \frac{x'^2 + y'^2}{2\zeta} \right) \right] \times \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}} U[\xi, \eta] \exp \left[ ik \left( \frac{\xi^2 + \eta^2}{2\zeta} - \frac{x'\xi + y'\eta}{\zeta} \right) \right] d\xi d\eta, \quad (9)$$

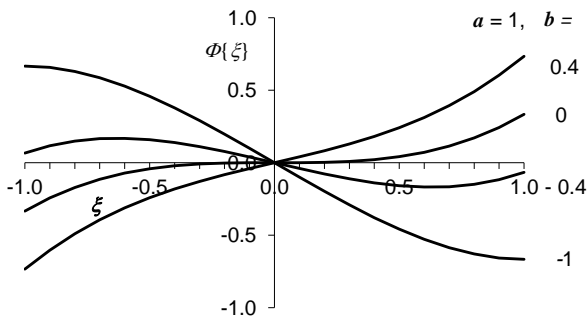
což je vyjádření pro obecnou difrakci zvanou *Fresnelova*.

Jestliže vzdálenost  $\zeta$  roviny pozorování je značná, je možno kvadratický člen zanedbat a difrakce se nazývá *Fraunhoferova*. Je vyjádřena integrálem (který je vlastně Fourierovou transformací)

$$U'[x', y', \zeta] = -i \frac{k}{2\pi} \frac{1}{\zeta} \exp [ik] \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}} U[\xi, \eta] \exp \left[ -ik \left( \frac{x'\xi + y'\eta}{\zeta} \right) \right] d\xi d\eta \quad (10)$$



(a)



(b)

Obr. 6. Vhodná funkce pro vyjádření fáze (a) jako povrchový graf a (b) pro několik součinitelů  $b$

a v našem případě malého zakřivení duhy proti velikosti kapek bude integrál pouze jednorozměrný

$$U'[x', \zeta] = -i \frac{k}{2\pi} \frac{1}{\zeta} \exp[ik\zeta] \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} U[\xi] \exp\left[-ik \left(\frac{x'\xi}{\zeta}\right)\right] d\xi. \quad (11)$$

Pro určení vstupní komplexní amplitudy nebudeme brát v úvahu nepatrné změny reálné amplitudy  $u[\xi]$  závisující na úhlech dopadu a položíme ji rovnou jednotce. Jinak je to s fází  $\phi[\xi]$  čili jinak řečeno s tvarem vlnoplochy. To, že se paprsky nejprve rozvíjejí vějířovitě dopředu a potom se zase od Descartova paprsku vějířovitě navracejí, je možno vyjádřit fází ve tvaru

$$\phi[\xi] = \frac{1}{3} a \xi^3 + b \xi, \quad (12)$$

která je znázorněna jako povrchový graf pro součinitel  $a = 1$  u kubického členu a pro součinitel  $b$  u lineárního členu v rozmezí  $b \in \langle -2, +2 \rangle$  na obr. 6a a pro několik součinitelů  $b$  na obr. 6b.



Je zřejmé, že jestliže si představíme paprsky jako kolmice v každém místě čáry grafu, pak se opravdu paprsky navzájem překřičují v částech některých kvadrantů.

Jestliže se dosadí vyjádření pro fázi (12) do difrakčního integrálu (11), obdrží se difrakční integrál (bez koeficientu před integrálem) ve tvaru

$$U'[x', \zeta] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -ik \left( \frac{1}{3} a \xi^3 + b \xi \right) \right] \exp \left[ -ik \frac{x' \xi}{\zeta} \right] d\xi, \quad (13)$$

kde namísto ostře ohraničených mezí integrálu zvoleny nekonečné meze (nejde o otvor v cloně). Dopadající vlna má reálnou amplitudu  $u[\xi] = 1$ . Integrál (13) je možno po zavedení úhlu difrakce  $x'/\zeta = \sin \theta$  psát jako

$$U'[k \sin \theta] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -ik \left( \frac{1}{3} a \xi^3 + (b + \sin \theta) \xi \right) \right] d\xi, \quad (14)$$

kde argument na levé straně je souhrnně vpraven do úhlu difrakce.

Řešením tohoto integrálu není žádná z běžných funkcí nebo jejich superpozice, ale tzv. *Airyova funkce* [2], [12], která je definována pro reálné hodnoty  $x$  jako nevlastní integrál

$$\text{Ai}[x] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left[ \frac{1}{3} t^3 + xt \right] dt. \quad (15)$$

Funkce  $\text{Ai}[x]$  vykazuje rychlé oscilace a konverguje, protože kladné a záporné části oscilací se navzájem ruší. Airyova funkce splňuje diferenciální rovnici

$$y'' - xy = 0. \quad (16)$$

Tato rovnice má dvě na sobě nezávislá řešení. Druhé řešení je Airyova funkce druhého druhu označovaná jako  $\text{Bi}[x]$ . Je definována jako řešení se stejnou amplitudou oscilací jako  $\text{Ai}[x]$ , když  $x$  jde do  $-\infty$ , a liší se o rozdíl fází  $\pi/2$ :

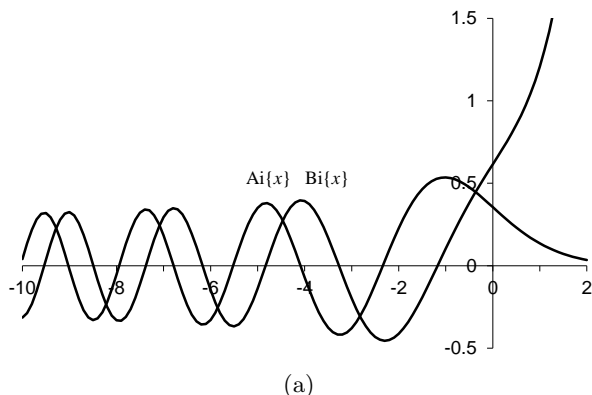
$$\text{Bi}[x] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \exp \left[ -\frac{1}{3} t^3 + xt \right] + \sin \left[ \frac{1}{3} t^3 + xt \right] \right) dt. \quad (17)$$

Průběhy obou funkcí v rozsahu  $x \in \langle -10, 2 \rangle$  jsou na obr. 7a. Modul Airyovy funkce  $|\text{Ai}[x]|^2$  reálné proměnné udává rozložení intenzity světla: v duze vznikají difrakční proužky (obr. 7b).

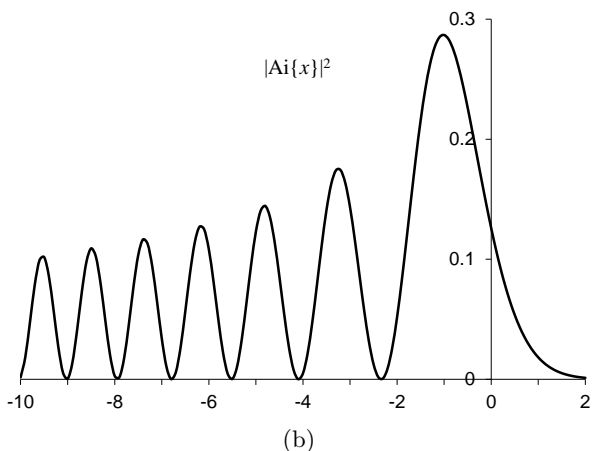
Vyznačují se tím, že se vzdalováním se od kaustické čáry se zaprvé postupně zmenšuje amplituda intenzity světla a zadruhé zmenšuje perioda proužků (roste jejich hustota).

Difrakční proužky jsou však v duze viditelné pouze zřídka a viditelnost je závislá na velikosti kapek. Většinou se proužky pro jednotlivé barvy tak překřičují, že se smazávají. Při velikosti kapek kolem  $25 \mu\text{m}$  a menších, které se vyskytují především v mlze, se duha jeví bílá.

Uvedená difrakce se týká skalárního přístupu, kdy se vzhledem k malým úhlům difrakce zanedbává vektorový charakter světla, a tedy jeho polarizace. Z numerického výpočtu vycházejícího přímo z Maxwellových rovnic se dojde k závěru, že uvedený výsledek difrakce se velmi dobře shoduje s polarizací kolmou k rovině dopadu. Polarizace v rovině dopadu je ztížena Brewsterovým úhlem, při kterém je odraz světla



(a)



(b)

Obr. 7. (a) Průběhy obou Airyových funkcí a (b) intenzita v difrakčních prouzcích duhy

nulový. Při difrakci se pak pro tuto polarizaci nevytvářejí kontrastní difrakční proužky nýbrž pouze mírná zvlnění s minimy v místech maxim pro difrakci s předchozí polarizací [5], [8].

Zajímavé je uplatnění Airyových funkcí v dnešní optice, kdy se vyšetřují optické svazky koherentního světla s různými příčnými průběhy komplexní amplitudy. Nejjednodušší je ovšem Gaussův svazek, který je základním vyzařovacím videm laserů. Rovinný svazek s Airyovým rozložením se vyznačuje především parabolickou trajektorií šíření. V literatuře jsou pro ilustraci uvedeny čtyři z řady nedávných prací publikovaných v zahraničních odborných časopisech [11], [3], [13], [14].

## Závěr

Zatímco paprsková optika poskytuje základní výklad tvorby atmosférické duhy, vlnový přístup podává podrobnější vysvětlení vzniku difrakčních proužků, které se někdy

v duze pozorují. Difrakční proužky se zhušťují se vzdáleností od okraje duhy a současně se zmenšuje jejich viditelnost. Jejich výskyt je závislý na velikosti kapek, ale tato závislost není v článku kvantitativně uvedena. Airyova funkce, která je výsledkem analýzy difrakčních proužků, má další uplatnění ve fyzice, jako je např. řešení chování částice v trojúhelníkové potenciální jámě. Má však také význam i v technice např. pro řešení úloh o stabilitě viskózních kapalin nebo šíření radiových vln či radiačním přenosu.

**Poděkování.** Autor děkuje odpovědnému redaktorovi za fyzikální část Pokroků doc. RNDr. Miloši Rotterovi, CSc., za upozornění na dvě práce, které autorovi nebyly známy [6], [1]. Poskytují další poznatky, které nejsou v článku obsaženy, zejména např. o závislosti periody Airyových difrakčních proužků na velikosti kapiček a podmínkách pro vznik duhy v bílé barvě.

## Dodatek I. Výpočet bodů úvratí

Hlavní duha

Vedlejší duha

Výpočet první derivace a její anulování

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( 2 \left( 2 \arcsin \left[ \frac{x}{n} \right] - \arcsin[x] \right) \right) & \frac{d\gamma_2}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( 180 - 2 \left( 3 \arcsin \left[ \frac{x}{n} \right] - \arcsin[x] \right) \right) \\ &= 2 \left( 2 \frac{1}{n \sqrt{1 - (x/n)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = 0, & &= -2 \left( 3 \frac{1}{n \sqrt{1 - (x/n)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = 0, \end{aligned}$$

kde  $x = y/r$

Úpravy rovnice

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x^2} - n \sqrt{1 - \left( \frac{x}{n} \right)^2} &= 0, & \sqrt[3]{1 - x^2} - n \sqrt{1 - \left( \frac{x}{n} \right)^2} &= 0, \\ 4(1 - x^2) - (n^2 - x^2) &= 0, & 9(1 - x^2) - (n^2 - x^2) &= 0, \\ 3x^2 + n^2 - 4 &= 0 & 8x^2 + n^2 - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Konečný vztah

$$\left( \frac{y}{r} \right)_{u1} = \pm \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \qquad \left( \frac{y}{r} \right)_{u2} = \pm \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}}$$

## Dodatek IIa. Průsečíky množiny paprsků s obvodem meridiálního řezu kulové kapky hlavní duhy

Vodorovný paprsek dopadající do bodu na kružnici  $(y/r)^2 + ((z/r) + 1)^2 = 1$  má souřadnice

$$\frac{y_1}{r} = \sin \alpha, \quad \frac{z_1}{r} = -1 - \cos \alpha,$$

kde  $\alpha$  je úhel dopadu a platí zákon lomu  $\sin \beta = (1/n) \sin \alpha$ .

Lomený paprsek protíná kružnici v bodě, jehož souřadnice jsou

$$y_2 = r \sin[180 - (\alpha + 180 - 2\beta)], \quad z_2 = r(-1 + \cos[180 - (\alpha + 180 - 2\beta)]),$$

tedy

$$\frac{y_2}{r} = \sin \left[ 2 \arcsin \left[ \frac{y}{rn} \right] - \arcsin \left[ \frac{y}{r} \right] \right], \quad \frac{z_2}{r} = -1 + \cos \left[ 2 \arcsin \left[ \frac{y}{rn} \right] - \arcsin \left[ \frac{y}{r} \right] \right].$$

Odražený paprsek protíná kružnici v bodě, jehož souřadnice jsou

$$y_3 = r \sin[270 - (\alpha + 2(180 - 2\beta))], \quad z_3 = r(-1 + \cos[270 - (\alpha + 2(180 - 2\beta))]),$$

tedy

$$\frac{y_3}{r} = -\cos \left[ 4 \arcsin \left[ \frac{y}{rn} \right] - \arcsin \left[ \frac{y}{r} \right] \right], \quad \frac{z_3}{r} = -1 + \sin \left[ 4 \arcsin \left[ \frac{y}{rn} \right] + \arcsin \left[ \frac{y}{r} \right] \right].$$

Prodloužený lomený paprsek protíná kružnici v bodě, jehož souřadnice jsou

$$y_4 = r \sin[90 - ((90 + 4\beta - \alpha) + (180 - 2\alpha))], \\ z_4 = r(-1 + \cos[90 - ((-90 + 4\beta - \alpha) + (180 - 2\alpha))]),$$

a tedy

$$\frac{y_4}{r} = \sin \left[ -4 \arcsin \left[ \frac{y}{rn} \right] + 3 \arcsin \left[ \frac{y}{r} \right] \right], \\ \frac{z_4}{r} = -1 + \cos \left[ -4 \arcsin \left[ \frac{y}{rn} \right] + 3 \arcsin \left[ \frac{y}{r} \right] \right].$$

## Dodatek IIb. Průsečíky množiny paprsků s obvodem meridiálního řezu kulové kapky vedlejší duhy

Vztahy až po první odraz včetně jsou stejné jako u hlavní duhy.

Znovu odražený paprsek protíná kružnici v bodě, jehož souřadnice jsou

$$y_4 = r \sin[360 - (\alpha + 3(180 - 2\beta))], \quad z_4 = r(-1 + \cos[360 - (\alpha + 3(180 - 2\beta))]),$$

tedy

$$\frac{y_4}{r} = -\sin \left[ 6 \arcsin \left[ \frac{y}{rn} \right] - \arcsin \left[ \frac{y}{r} \right] \right], \quad \frac{z_4}{r} = -1 - \cos \left[ 6 \arcsin \left[ \frac{y}{rn} \right] + \arcsin \left[ \frac{y}{r} \right] \right].$$

Prodloužený lomený paprsek protíná kružnici v bodě, jehož souřadnice jsou

$$y_5 = r \sin[360 - (\alpha + 3(180 - 2\beta)) + (180 - 2\alpha)],$$

$$z_5 = r(-1 + \cos[360 - (\alpha + 3(180 - 2\beta)) + (180 - 2\alpha)]),$$

a tedy

$$\frac{y_5}{r} = -\sin \left[ 6 \arcsin \left[ \frac{y}{rn} \right] - 3 \arcsin \left[ \frac{y}{r} \right] \right],$$

$$\frac{z_5}{r} = -1 - \cos \left[ 6 \arcsin \left[ \frac{y}{rn} \right] - 3 \arcsin \left[ \frac{y}{r} \right] \right].$$

## L i t e r a t u r a

- [1] ADAMS J. A.: *The mathematical physics of rainbows and glories*. Phys. Rep. 356 (4–5) (2002), 229–356.
- [2] AIRY, G. B.: *On the intensity of light in the neighborhood of a caustic*. Trans. Cambridge Philos. Soc. 6 (1838) 379–402.
- [3] BANDRES, M. A., GUTIÉRREZ-VEGA, J. C.: *Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems*. Optics Express 15 (25) (2007) 16719–16728.
- [4] BEDNÁŘ, J.: *Pozoruhodné jevy v atmosféře: atmosférická optika, akustika a elektrína*. Academia, Praha, 1989.
- [5] KHARE, V., NUSSENZWEIG, H. M.: *Theory of the rainbow*. Phys. Rev. Lett. 33 (16) (1974), 576–580.
- [6] LEE, R. L., JR.: *Mie theory, Airy theory, and the natural rainbow*. Appl. Optics 37 (9) (1998), 1506–1519.
- [7] LOCK, J. A., HOVENAC, E. A.: *Internal caustic structure of illuminated liquid droplets*. J. Opt. Soc. Amer. A8 (10) (1991), 1541–1553.
- [8] MOZSÉS NUSSENZWEIG, H.: *The theory of the rainbow*. Scientific American 236 (4) (1977), 116–127. (Český překlad: *Teorie duhy*. Čs. čas. fyz. A29 (1979), 567–586.)
- [9] MOZSÉS NUSSENZWEIG, H.: *Diffraction effects in semiclassical scattering*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [10] NYE, J. F.: *Natural focusing and fine structure of light*. IOP Publishing, Bristol, 1999. Chapter 6, Diffraction, 123–153.
- [11] SIVILOGLOU, G. A., CHRISTODOULIDES, D. N.: *Accelerating finite energy Airy beams*. Optics Lett. 32 (8) (2007), 979–981.
- [12] VALLÉE, O., SOARES, M.: *Airy functions and applications to physics*. Imperial College Press, London, 2004.
- [13] WANG, J., BU, J., WANG, M., YUAN, X.: *Generation of high quality Airy beams with blazed micro-optical cubic phase plates*. Appl. Optics 50 (36) (2011), 6627–6631.
- [14] ZAPATA-RODRIGUEZ, C. J., PASTOR, D., MIRET, J. J.: *Consideration on the electromagnetic flow in Airy beams based on the Guy phase*. Optics Express 20 (21) (2012), 23553–23580.