Jiří Veselý

Euler z jiného zorného úhlu

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 58 (2013), No. 4, 301--310

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/143723`

# Euler z jiného zorného úhlu

*Jiří Veselý, Praha*

Málokomu se podařilo ovlivnit vývoj matematiky tak pronikavě, jako Leonhardu Eulerovi (1707–1783). Jeho život byl spjat se Švýcarskem, kde se narodil, studoval a pobýval až do roku 1727, s Německem, kde pobýval v letech 1741–1766 na dvoře císaře Fridricha II. Velikého, a s Ruskem, ve kterém strávil nejdelší část svého života (1727–1741 a 1766–1783) a kde je také v St. Petersburgu pochován.

Euler je nejznámější jako matematik a tato stránka naprosto převažuje nad jeho příspěvky k rozvoji dalších vědních disciplín, ty však vždy jsou (nebo dříve byly) spojeny s matematikou. Kromě přínosů k „čisté“ matematice se zabýval i aplikovanou matematikou (stavba lodí, balistika), fyzikou a astronomií, geografií, kartografií, teorií hudby, filozofií a teologií. A tak v roce 230. výročí jeho smrti bych rád připomenul jeho přínos ke kartografii a teorii hudby, které patří k těm matematice trochu vzdálenějším.

I v dnešní době jsou si matematika a hudba zdánlivě hodně vzdálené. V koncertních síních se sice často potkávají kolegové, kteří se matematikou živí a mnoho jich aktivně hudbu provozuje, nezřídka na špičkové úrovni, matematické pozadí hudby je však širší veřejnosti většinou jen málo známé. Zájemce o konstrukci stupnic a o důvody, proč jsou různorodé a jakými potřebami byl jejich vznik vyvolán, odkazujeme na článek [10], publikovaný v tomto časopise.[1] Tam se čtenář také dozví, že otázkami ladění a akustiky se zabývali již např. r. 1636 Mersenne, r. 1870 Helmholz nebo r. 1877 lord Rayleigh. Ale i v současné době se objevují práce, zabývající se strukturou hudebních skladeb, přičemž používaný matematický aparát rozhodně není jednoduchý.

Náhledem do Eneströmova seznamu Eulerových prací zjistíme, že již jeho druhá práce se týkala hudby, zabývala se totiž fyzikální podstatou zvuku; viz např. [16]. Hudební problematiky se však týkalo více Eulerových prací, a to:

- [E 002] *Dissertatio physica de sono* [*Fyzikální disertace o zvuku*] (1727),
- [E 033] *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae* [*Pokus o novou teorii hudby, vyložený co nejsrozumitelněji v souladu s elementárními principy harmonie*] (1739),
- [E 303] *Tentamen de sono campanarum* [*Pokus o vysvětlení zvuku zvonů*] (1766),
- [E 314] *Conjecture sur la raison de quelques dissonances generalement recues dans la musique* [*Domněnka o důvodu, proč jsou posunuté tóny obecně součástí hudby*] (1766),
- [E 315] *Du véritable caractère de la musique moderne* [*Opravdový charakter moderní hudby*] (1766),
- [E 457] *De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis* [*Základní pricipy harmonie v zrcadle hudby*] (1774).

[1] Ti, kteří si Pokroky neschovávají nebo je nemají po ruce, mohou případně využít URL adresu `http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/141111`

Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc., Matematický ústav UK, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín, e-mail: `jvesely@karlin.mff.cuni.cz`

(Letopočty udávají rok vydání prací.) Kromě toho obsahuje výklad o hudbě též známý Eulerův spis popularizačního charakteru [E 343] *Lettres a une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique & de philosophie* [*Dopisy německé princezně* (...)], což je soubor asi 200 dopisů neteři Fridricha II., princezně z Anhalt-Dessau; byly napsány francouzsky v letech 1760–63 a jejich soubor patřil k nejznámějším Eulerovým pracím. Hudbě je v Dopisech věnována jen asi desítka stránek. Z tohoto přehledu vidíme, že se hudba těšila Eulerovu zájmu po celý život, zejména však na konci jeho berlínského pobytu. Nejzávažnější z uvedených prací je [E 033], která obsahuje jednak výklad věcí v té době obecně známých, které dnes považujeme za základní, ale též zajímavou teorii akceptování hudby z hlediska příjemných pocitů, které v nás její poslech vyvolává. Nežli se pokusíme přiblížit podrobněji tuto Eulerovu práci, všimneme si problematiky vztahu matematiky a hudby v trochu obecnější rovině.

Velmi často se v souvislosti s matematikou užívá atributů abstraktní, racionální, chladná, vzdálená od reality, vzdálená citům (nemá duši); též se říká, že její vnitřní řád je hudbě vzdálený. O hudbě se naopak říkává, že je živá, plná emocí a citů, prostupuje denní život, že však nesporně obsahuje matematické aspekty. Dnes jde o obecně akceptovaný názor, neboť vzájemné souvislosti lze snadno dokumentovat, avšak v celé šíři je lze jen obtížně vyčerpávajícím způsobem postihnout. To však bylo známé i v předeulerovské době, což lze dokumentovat několika citáty. Pohled matematika nám zprostředkuje Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), který napsal: *Hudba je skrytý a nevědomý matematický problém duše.* Naproti tomu Jean-Philippe Rameau (1683–1764), který byl jedním z nejdůležitějších francouzských skladatelů a teoretiků hudby barokní éry, poznamenal o hudbě toto: *Musím přiznat, že teprve pomocí matematiky se staly moje myšlenky srozumitelné.* A konečně ještě jeden podstatně mladší názor, jehož autorem je Igor Stravinskij (1882–1971): *Hudba je daleko bližší matematice než literatuře – ne snad přímo matematice jako takové, ale dozajista něčemu, jako je matematické myšlení nebo matematické vztahy*; viz [7].

Již po staletí je známo, že souzvuk dvou tónů může být více či méně libozvučný a že je popisován jako konsonance (souzvuk, souznění) nebo disonance (nelibozvuk). Toto rozlišení má fyzikální pozadí: Obecně lze říci, že souzvuk dvou tónů je konsonantní, jsou-li jejich frekvence ve správném poměru. Využití tohoto principu bylo v různých dobách a v různých civilizacích či společenstvích různé. Tyto poměry frekvencí jsou pro *oktávu* $1:2$, pro *kvintu* $2:3$, pro *malou tercii* $5:6$ a pro *velkou tercii* $4:5$. *Kvartě* odpovídá poměr $3:4$, *velké sextě* $3:5$ atd. Euler v práci [E 033] šel mnohem dál: podle jeho teorie (kterou podle Johanna Bernoulliho (1667–1748) promýšlel od r. 1731; viz [3]) bylo možné přiřadit jakousi hodnotu či stupeň libozvučnosti podstatně složitějším souzvukům nebo i hudebním útvarům. V [E 033] píše: *Protože je na jedné straně těžké určit hranici mezi konsonancí a disonancí, a také na druhé straně proto, že je to v souladu s naším postupem* (...)*, budeme nazývat konsonance* [*souzvuk*] *jakýkoli zvuk vyvolaný současným zněním několika tónů.* Potlačil tak soudobé rozlišení mezi konsonancí a disonancí.

Euler nejprve definoval funkci $\mathrm{d}(n)$ pro $n \in \mathbb{N}$ takto: položíme $\mathrm{d}(1) = 1$ a dále, má-li $n \in \mathbb{N}$ prvočíselný rozklad $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$, položíme

$$\mathrm{d}(n) = \alpha_1(p_1 - 1) + \alpha_2(p_2 - 1) + \cdots + \alpha_m(p_m - 1) + 1\,.$$

Je-li $r = p/q$, najdeme nejprve nejmenší společný násobek $\mathrm{NSN}(p, q)$ čísel $p$, $q$ a pak určíme $\mathrm{d}(r) = \mathrm{d}(\mathrm{NSN}(p,q))$. Tak například pro velkou tercii (tj. poměr 4 : 5) dostaneme

$$\mathrm{NSN}(4,5) = 20\,,\ \mathrm{d}(20) = 2(2-1) + 1(5-1) + 1 = 7\,.$$

Spočteme-li nyní hodnoty d pro intervaly, pak pro každé prvočíslo $p$ je pro $r = 1/p$ hodnota $\mathrm{d}(r) = p$. Pro intervaly, se kterými jsme se již setkali, dostaneme výsledky shodné s tehdy soudobou zkušeností:[2] $\mathrm{d}(1/2) = 2$ (oktáva), $\mathrm{d}(2/3) = 4$ (kvinta), $\mathrm{d}(5/6) = 8$ (malá tercie), $\mathrm{d}(4/5) = 7$ (velká tercie), $\mathrm{d}(3/4) = 5$ (kvarta), $\mathrm{d}(3/5) = 7$ (velká sexta), $\mathrm{d}(4/7) = 9$ (septima) atd.

Podobně lze pracovat s akordy : frekvence odpovídající akordu *c-e-h* jsou v poměru 8 : 10 : 15, takže

$$\mathrm{NSN}(8,10,15) = 120\,,\ \mathrm{d}(120) = 3(2-1) + 1(3-1) + 1(5-1) + 1 = 10\,.$$

Pro prvočíslo 5 je $\mathrm{d}(5) = 5$, což je stejná hodnota, jakou jsme již dostali pro kvartu. Vidíme, že funkce d *není* prostá! Podobně interval *c-h* a akordy *c-e-h*, *c-g-h*, *c-e-g-h* by měly stejnou hodnotu d (stejnou konsonanci) a totéž platí např. pro dvojici akordů *g-h-d-f* a *g-a-h-c-d-e-f*, jejichž konsonance je 17. Funkce d také ignoruje inverze a opakování, rozlišuje však oktávy : je

$$\mathrm{d}(1/1) = 1\,,\ \mathrm{d}(2/1) = 2\,,\ \mathrm{d}(4/1) = 2(2-1) + 1 = 3\,.$$

Někdy se v souvislosti s historií matematiky a hudby cituje Leibnizův výrok: *V hudbě počítáme jen do pěti tak jako lidé, jejichž aritmetika končí u tří... Kdybychom byli důvtipnější, mohli bychom pokračovat k číslu sedm* (1712).[3] Funkce d neignoruje žádný poměr a Euler k tomu poznamenává: *Tyto důvody nás opravňují k přístupu k prvočíslu 7 a také vysvětlují oblibu septakordů* (...) *a z toho důvodu lze s ohledem na zesnulého pana Leibnize říci, že hudba se tak naučila nyní počítat do sedmi.* Z mnoha tabulek, které [E 033] obsahuje, vyčteme například, že d má tutéž hodnotu 8 pro tradiční konsonantní interval (malá tercie) a i pro tradiční disonantní interval, jemuž odpovídá poměr 8/9 (odpovídá *zvětšenému celému tónu*, někdy též pytagorejskému celému tónu),[4] nebo že septima má konsonanci d pouze o jeden stupeň vyšší, tj. 9.

Již jsme viděli na příkladech, že přidání dalšího tónu do akordu nemusí zvýšit jeho konsonanci. Intervaly odpovídající poměrům 2:3 a 1:6 mají stejnou konsonanci jako akord, ve kterém jsou frekvence v poměru 1:2:3:6. Euler dále zavádí pojem *úplného akordu*, k němuž nelze přidat žádnou další notu bez zvětšení jeho konsonance. Například k nejednoduššímu oblíbenému „libozvučnému“ akordu *c-e-g-c* odpovídá úplný akord (poměry frekvencí tónů jsou 1:2:3:4:5:6:10:12:15:20:30:60)

$$c_1\ c_2\ g_2\ c_3\ e_3\ g_3\ e_4\ g_4\ b_4\ e_5\ b_5\ b_6.$$

Euler soudí, že takový „plnější“ akord je příjemnější. Pokud začnete být v tomto okamžiku na pochybách, není to tak absurdní, těmto notám odpovídají vyšší harmonické, které při zahrání takového akordu rovněž slyšíme, ovšem v relativně malé intenzitě.

V další části výkladu se v páté kapitole Euler soustředil na sled akordů. Dává návod, jak nalézt konsonanci celého souboru akordů (teoreticky např. celé skladby). Zde

[2] Euler uvádí čísla v poměrech, podobně jako staří Řekové, vzestupně.

[3] Jde o známý citát z Leibnizova dopisu Christianu Goldbachovi (1690–1764), který byl publikován až r. 1734.

[4] Poměr 10/9 odpovídá *zmenšenému celému tónu* a interval mezi zmenšeným a zvětšeným celým tónem, který odpovídá poměru (10/9)/(9/8)=80/81, je tzv. *syntonické koma.*

postupuje analogicky, avšak některé kroky již musí upravovat. Tak např. akord s frekvencemi tónů v poměru $2:6:10$ už není ekvivalentní akordu s frekvencemi o poměru $1:3:5$ jako v předcházející části.

Již jsme se zmínili o tom, že se Euler zajímal o hudbu po celý život. Podívejme se na jeho názory z dnešního hlediska. Ty prošly určitým vývojem, ale základní přesvědčení o principech se neměnilo. Byl si vědom toho, že jedinci mají různý hudební vkus a schopnost ocenit hudbu, věřil však, že je nutno dbát na názor kvalifikovaných jedinců a že ten je závislý na jejich vnímání vnitřního *řádu* hudby. Rozeznával dvě odlišné situace: Známe-li podstatu zákonitosti, můžeme ji konfrontovat se skutečností a postřehnout tak nepřesnosti a odchylky, zatímco ve druhém případě srovnáváním reálných situací mohou povolaní dospět k oněm zákonitostem (a to je dle Eulerova názoru situace při analyzování hudby). U hudby se Euler soustředil zejména na výšku tonů, ne na jejich trvání či intenzitu. Toto pojetí sahá ostatně u intervalů až do antiky. Euler byl přesvědčen o síle matematického vidění světa a dával matematickému pojetí přednost před filozofií. Tam, kde by důslednost tohoto pohledu mohla být u hudby na obtíž, dokázal ji korigovat, aniž by zavrhoval základní princip. Tam, kde jeho předchůdci předkládali své závěry o poměru frekvencí bez odůvodňování, se Euler snaží své v principu stejné závěry zdůvodnit. To provází jeho cestu k určování *stupně akceptovatelnosti* či *příjemnosti*, kterou jsme se snažili čtenáři přiblížit.

Euler si byl také dobře vědom jisté nedokonalosti či tolerance lidského sluchu a dokázal je zahrnout do svých úvah. V pozdější práci [E 314] studuje akord $c$-$b$-$d$-$f$ a jemu odpovídající poměr frekvencí $36:45:54:64$. Bez v této sestavě nelibozvučného $f$ by byl NSN pro tento akord 60, takto je 8640. Sluch nám dovolí nahradit v poměru číslo 64 číslem 63 a dojdeme tak po zkrácení k poměru $4:5:6:7$. Tak se od NSN o hodnotě 8640 dostaneme k hodnotě 420 a místo konsonance 17 dostaneme 15. Euler k tomu dodává: *Snad je toto základ pravidla o přípravě a rozložení disonance, informující posluchače, že jde o týž zvuk, který může rozložen na dva jiné, které si nemusí představovat jako jeden zcela cizorodý zvuk.*

U většiny současníků nenalezl Euler pochopení pro své hudební teorie, dá se však říci, že v mnohých otázkách svoji dobu předběhl. Kromě odmítnutí dělení akordů na konsonantní a disonantní (disonanci chápal dynamicky, jako historicky se vyvíjející jev) a snahy o zrovnoprávnění septim mu lze připsat i zásluhu na modifikaci souznění: Třebaže nebyl nakloněn temperovanému ladění, nalezneme u něj v pozdějších pracích chápání akordů jako souznění tónů, které jsou z určitého úzkého frekvenčního pásma, tedy nejsou neměnné. Obecně lze říci, že oponentů, zejména z řad hudebních teoretiků, bylo více než těch, kteří chápali Eulerovy myšlenky v některých směrech za inspirující. To se do jisté míry v době pozdější sice měnilo, avšak nikoli podstatně.

Nevěnovali jsme se zdaleka všemu, co [E 033] obsahuje, spíše jsme provedli jen jakýsi náhled na způsob Eulerova postupu v případě práce s hudbou. Podrobnější informace může čtenář nalézt např. v [9]. Euler byl hluboce přesvědčen o schopnostech matematiky řešit problémy a případnou nedostatečnost přičítal tehdy málo rozvinuté teorii. Pokud zvážíme nárůst počtu prací, které jsou věnovány matematickým aspektům hudby a které využívají i poměrně náročný matematický aparát, bylo toto Eulerovo přesvědčení oprávněné.[5]

---

[5] Uveďme jeden citát, který s tímto Eulerovým přesvědčením koresponduje *For where mathematical reason did not suffice, for Euler began the kingdom of God* (Eduard Fueter, 1941).

Obraťme se nyní ke kartografii, nejprve v širších souvislostech. První mapy Ruska byly vytvořeny cizinci (např. Mercator (1548), Ortelius (1602), Merian (1640)), některé dílčí mapy asijské části jsou spojovány se Semjonem Uljanovičem Remezovem (asi 1642–asi po 1720). Mapy nebyly přesné, a tak dokonalejší zmapování se stalo jedním z úkolů, které byly podporovány reformátorem, předposledním carem z dynastie Romanovců, Petrem Aleksejevičem. Byl to pozdější Petr I. Veliký (1672–1725).

Během své první evropské cesty, kterou Petr podnikl v letech 1697–8 (trvala 15 měsíců), se seznámil s technickým pokrokem. Neváhal se osobně naučit některým řemeslným pracím, ale současně se setkával s významnými osobnostmi, s vědci, umělci a techniky, které pak zval do Ruska, aby zde pomohli s celkovou modernizací země.[6] Petrovy reformy pak zasáhly celou společnost. Modernizoval ekonomiku, utvářel nové formy politiky, reformoval vzdělávací systém, armádu, církev a přibližoval je západní Evropě. Výsledkem první evropské cesty bylo např. v lednu r. 1700 založení *Školy matematiky a navigace* v Moskvě, v jejímž čele byl Skot Henry Farquharson (1675–1739); r. 1715 byly vyšší třídy školy přemístěny do Petrohradu a fungovaly pod názvem *Námořní akademie*. V r. 1705 bylo v Rusku otevřeno první *gymnázium* a od r. 1714 vznikal v lokálních centrech další typ středních škol *s povinnou docházkou.*

Petr I. se při jedné ze svých evropských cest setkal s vynikajícím francouzským kartografem: Guillaume de L'Isle (1675–1726) se honosil titulem první královský kartograf. Na jeho doporučení přicestovali do Ruska r. 1725 Guillaumovi nevlastní bratři Joseph-Nicolas Delisle (1688–1768) a Louis Delisle de la Croyere (1687–1741); mimochodem, psaní těchto jmen velice kolísá. Měli se podílet na pracích, spojených s triangulací, měli zpřesnit zakreslení polohy velkých měst a vytvořit přesnější mapu celého Ruska. Byla též uzavřena dohoda o zdrojích, ke kterým měl Joseph-Nicolas práva. Joseph-Nicolas opustil r. 1747 Rusko, Louis zemřel na kurděje v Petropavlovsku na Kamčatce při návratu expedice ke břehům Ameriky. Jak popsané události souvisejí s Eulerem?

Po smrti Petra I. nastoupila na carský trůn jeho druhá manželka Kateřina I. Aleksejevna. Její původní jméno bylo Marta Helena Skowrońska (asi 1684–1727). Vládla pouze dva roky a po ní nastalo období nástupnických sporů. V té době v květnu r. 1727 přijel Euler do Petrohradu a byl jmenován adjunktem matematiky na Akademii, jejíž další existence byla minimálně po další tři roky nejistá. Od roku 1730, kdy byl Euler jmenován profesorem fyziky a též řádným členem Akademie, se situace podstatně zlepšila. O tři roky později přešel na katedru matematiky, kterou po šestiletém pobytu v Petrohradě opustil Daniel I. Bernoulli (1700–1782), protože získal místo v Basileji. Od roku 1739 vedl Euler v Akademii též *Oddělení geografie* – v této funkci ho vystřídal r. 1758 Michail Vasilijevič Lomonosov (1711–1765). Kartografií se však Euler zabýval již dříve, patrně cca od r. 1735.

Nejstarší celoruská mapa ruského původu je z r. 1734 a pochází od Ivana Kiriloviče Kirilova (1695–1737). Kirilov byl „Petrův člověk“: Od třinácti let navštěvoval moskevskou školu matematiky a navigace a o dvanáct let později již prováděl zeměměřičské práce spojené se založením lesa, který měl poskytovat materiál ke stavbě lodí. Od roku 1719 byl sekretářem senátu a od roku 1728 jeho vrchním sekretářem. V le-

[6] Pro nás je zajímavé to, že v r. 1711 navštívil Petr I. Karlovy Vary, kde pobýval déle než měsíc, a po roce se sem opět vrátil; tehdy se zde setkal s G. W. Leibnizem, který se stal jeho poradcem a podstatně ovlivnil vznik Petrohradské akademie. Možná, že návštěvy Petra I. jsou jednou z příčin, proč Rusové mají Karlovy Vary ve veliké oblibě.


Obr. 1.

tech 1720–34 byl v senátu odpovědný za topografické a kartografické práce. Plánoval vytvoření třídílného atlasu Ruského impéria o 360 mapách, ale tento záměr se nepodařilo realizovat. S Nicolasem Delislem se podstatně lišili v metodách práce, v jistém smyslu jako teoretici a praktici. Kirilov potřeboval konkrétní výsledky a „přílišná přesnost“ byla pro něj přítěží. Roku 1734 vydal atlas o cca 40 mapách; přesný počet vydání, náklad, složení map apod. nejsou známy; jeho součástí byla i zmíněná celoruská mapa.[7] Atlas byl později stažen v důsledku uplatňování práv J.-N. Delislea a nahrazen atlasem Akademie, který vyšel roku 1745 pod názvem *Atlas Rossijskoj*, obsahujícím 31 map.

Je známo, že se na něm podílel i Euler, a to nejen formálně z titulu zastávané funkce. J.-N. Delisle si s Eulerem v letech 1735–65 dopisoval (43 dopisů). Existuje domněnka, že k poškození Eulerova zraku a pozdější slepotě přispěla zraková námaha související s mapami, dnes ji však považujeme za neopodstatněnou.

Mapy zaměstnávaly Eulera i v době jeho německého pobytu (1741–1766): Pod jeho vedením byl připraven německou akademií školní Atlas světa *Atlas geographicus omnes orbis terrarum regiones in XLI tabulis*, který vyšel v latině a němčině poprvé roku 1753. Jako spolupracovníka si Euler pro tuto akci vybral geografa Johanna Christopha Rhode (1713–1786), mědirytiny provedl Nicolaus Friedrich Sauerbrey.[8] K atlasu napsal Euler desetistránkovou předmluvu.

Atlas byl velmi oblíben a dočkal se brzo dalších vydání. Ve vydání z roku 1760 bylo již 44 map a kromě latiny a němčiny byla použita i francouzština. Třetí vydání vyšlo roku 1777 a modernizované čtvrté vydání (nedatované) cca r. 1783. Ač obsahuje Eulerovu předmluvu, jeho jméno není uvedeno. Mapa s vyznačením magnetické deklinace je reprodukována na obr. 1. Při velkém zvětšení mapy Evropy na obr. 2

[7] Celkově bylo připraveno alespoň 37 map, zachovalo se jich patrně pouze 28; jsou však známy popisy celkem 41 zhotovených map. V roce 2008 vyšlo faksimile tohoto atlasu v nakladatelství Alfaret pod názvem *Atlas Vserossijskoj Imperii, Sobranije kart I. K. Kirilova.*

[8] Ačkoli jde o známého rytce map, není znám rok jeho narození. Zemřel *pravděpodobně* r. 1771.


Obr. 2.

na ní nalezneme např. Prahu, Brno a Olomouc. Do dneška je tento atlas hledaným sběratelským kouskem, který se prodává za cca 7–8 tisíc eur. Běžně se pro tento atlas užívá označení „Euler atlas“ a vyhledávač vám v mžiku nabídne další informace o jeho skladbě a i poměrně kvalitní reprodukce dalších map.

Ač byl Euler od roku 1766 prakticky slepý, zájem o mapy a kartografii ho neopustil. Napsal sérii článků, věnovaných zkreslení mapy a s ním spojeným problémům. Z pohledu některých (viz [23]) se tak zařadil mezi tvůrce teorie aproximace. Nejrůznější mapové projekce dávají při použití různé výsledky: Známe mapy podle kartografického zkreslení *délkojevné* (ekvidistantní), které nedeformují vzdálenosti podél určitého systému čar (netýká se všech délek), *plochojevné* (ekvivalentní), které zachovávají sice poměry ploch, ale silně zkreslují úhly, *úhlojevné* (konformní), které věrně zobrazují úhly, ale zkreslují plochy, a konečně *vyrovnávací* (kompenzační). Pro zobrazování velkých území, např. celých světadílů (a také Ruského impéria) se dodnes hodí různě modifikovaná kuželová projekce, která je historicky spojována s J.-N. Delislem. Pro zobrazování Ruska (a nejen jeho) se používá dodnes. Zhruba řečeno, promítá se na kuželovou plochu, jejíž osa rotace splývá se zemskou osou, vrchol kužele leží na ose „nad severním pólem“ a plocha seče zeměkouli ve dvou rovnoběžkách, ležících na severní polokouli. Zde je na místě upozornění, že termín *projekce* používáme v širším smyslu, než je v matematice obvyklé.

J.-N. Delisle se řídil pravidlem, že jako průsečnice (rovnoběžky) pro optimální zobrazení území mají být užity ty, které odpovídají 1/4 a 3/4 vzdálenosti od nejsevernějšího a nejjižnějšího bodu tohoto území. Anglický astronom a kartograf Arthur Robert Hinks (1873–1945) doporučoval (viz [13]) užití 1/7 a 6/7, kdežto američtí kartografové Charles Henry Deetz (1864–1921) a Oscar Sherman Adams (1874–1962) upřednostňovali 1/6 a 5/6 (viz [8]). Euler v sérii prací

[E 490] *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano* [*O reprezentaci sférické plochy v rovině*] (1777),

[E 491] *De proiectione geographica superficiei sphaericae* [*O geografické projekci sférické plochy*] (1777),

[E 492] *De proiectione geographica Delisliana in mappa generali Imperii Russici usitata* [*O Delisleově geografické projekci a jejím použití pro celkovou mapu Ruského impéria*] (1777)

nejprve dokázal, že ideální mapová projekce nezkreslující současně délky, úhly i plochy, neexistuje. Dokazoval to analyticky, s využitím „nekonečně malých", i když to bylo již tušeno ze známých vlastností sférických trojúhelníků (součet vnitřních úhlů není $2\pi$). V poslední z uvedených prací úspěšně řešil problém jisté optimalizace délkového zkreslení delisleovské kuželové projekce pro území Ruského impéria. Odůvodnil v ní, že optimální volba průsečnic odpovídá rovnoběžkám ležícím na $65^\circ\, 4'\, 11''$ a $43^\circ\, 59'\, 20''$. Práce [E 490]–[E 492] byly napsány již roku 1775, do tisku se však dostaly až roku 1777 a vyšly v *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* roku 1778, za sebou na str. 107–153. Práce byly známé spíše kartografům než matematikům, o čem svědčí např. zmínka v [13]. Významu poslední z těchto prací pro teorii aproximace je věnována úvodní část již zmíněné práce [23].

Výraz *optimální* je u nás poněkud zprofanován a je užíván špatně (např. u novinářů a politiků je velmi oblíben tvar „nejoptimálnější").[9] Vede nás však ke zpřesnění a k přirozené otázce, o jakou optimalizaci vlastně šlo. Při delisleovské projekci na kuželovou plochu stačí vzdálenosti odměřené na mapě „podél obrazů rovnoběžek" upravit podle měřítka mapy a získáme přesnou vzdálenost míst, pokud tato leží obě na jedné z výše zmíněných průsečnic/rovnoběžek; někdy bývají nazývány standardními rovnoběžkami. Vzdálenosti na ostatních rovnoběžkách jsou zkreslené, ale na každé rovnoběžce stejnoměrně, k získání skutečné vzdálenosti stačí „trochu poopravit měřítko mapy". Zkreslení ve směru poledníků je však nerovnoměrné.

Euler vlastně v [E 492] porovnal zkreslení vzdáleností mezi dvěma sousedními poledníky na „centrální" rovnoběžce mapy a na „extrémních" rovnoběžkách, které odpovídají zobrazení rovnoběžek na horním a dolním okraji mapy. Volil pak průsečnice tak, aby si tyto odchylky od skutečných hodnot byly (v absolutní hodnotě) rovny. V [13] je nazýváno toto řešení *eulerovská projekce*. Euler považoval svoje řešení pro zobrazení Ruského impéria za optimální a spočetl, že chyba v měření vzdálenosti po rovnoběžkách není (na jeden stupeň) větší než jedna versta (1067 m).[10]

V [13] jsou spočteny i případy s trochu odlišnými optimalizačními kritérii, ne však pro Rusko. Lze např. žádat, aby bylo na uvedených rovnoběžkách stejné zkreslení *měřítka* apod. Viz [13], str. 82–88.

Na závěr ještě několik poznámek. Úsilí cara Petra I. o podrobné zmapování Ruského impéria bylo patrně ovlivněno Leibnizem, který mu v dopise z r. 1716 psal: *Z vůle Vašeho carského Veličenstva by se mělo prozkoumat, zda lze Asii obeplout na severní straně či zda severní ledový příkrov je spojen s Amerikou, což se Angličanům a Holanďanům během jejich nebezpečných námořních expedicí nepodařilo zjistit*; viz [12]. Tato rada asi byla v pozadí dvou významných výprav Vituse Jonassena

[9] Jiný příklad: frekvence výskytu tvaru „potencionální".

[10] V [23] je Eulerův výpočet popsán podrobněji a uvádí se tam, že tato chyba byla 372 m na horním a 835 m na dolním okraji mapy (Euler zaokrouhloval).

Beringa (1681–1741) podniknutých v letech 1725 a 1741.[11] Nutno poznamenat, že geografické projekty Petrohradské akademie se těšily nejvýznamnější finanční podpoře.

Vztahy Eulera a J.-N. Delislea byly napjaté, Delisle dokonce prohlásil, že nepovede geografické oddělení Akademie, pokud bude Euler jeho členem. Když Euler oddělení převzal, práce šly mnohem rychleji kupředu. V roce 1733 prohlásil senát data získaná Behringem při první expedici za tajná, avšak později roku 1751 se zjistilo, že kopie všeho, co měl Delisle v Akademii k dispozici, odesílal do Francie. Navzdory tomu všemu byl Eulerův vztah k Delisleovi korektní a při případné kritice byl Euler velmi decentní. V [E 492] píše o delisleovské projekci: *Výhodou této projekce je, že úsečkám odpovídají oblouky hlavních kružnic, a tak vzdálenosti lze měřit podle mapy kružítkem bez podstatných chyb. Vzhledem k tomu byla této projekci dána při zhotovování mapy Ruského impéria přednost, i když při pečlivějším jejím studiu rozdíly proti skutečnosti nejsou malé.* Myslím, že je možné říci, že Eulerovy úvahy ovlivnily později i Vladimira Vladimiroviče Kavraiského (1884–1954) při tvorbě map SSSR (pro projekci, kterou navrhl v roce 1939, se ujalo mezinárodní označení *Kavrayskiy VII projection*).

Zdá se, že nemalá část Eulerových úvah o mapách směřovala spíše k teorii. Ve druhé práci je poměrně podrobně studována stereografická projekce. Euler vždy pracoval se zobrazením sféry na rovinu, i když v jeho době bylo známo, že země nemá přesně kulový tvar. Jako první na tuto možnost upozornil Issac Newton (1642–1727) ve svých *Principiích* [19] a tato teorie byla potvrzena francouzskými expedicemi ve třicátých letech 17. stol. Patrně byl Euler více motivován k vytváření teorie stereografické projekce než jejími kartografickými aplikacemi. Z tohoto hlediska Euler položil základ studia konformních zobrazení.

Na závěr bych chtěl zdůraznit, že ač je pro nás Euler především matematik, ovlivnil významně i další odvětví lidské činnosti, které souvisejí s matematikou, a že byl v některých směrech průkopníkem zcela nových myšlenek.

## Literatura


[1] Appleby, J. H.: *Mapping Russia: Farquharson, Delisle and the Royal Society.* Notes Rec. R. Soc. London *55* (2001), 191–204.

[2] Appleby, J. H.: *The founding of St. Petersburg in the context of the Royal Society's relationship with Russia.* Notes Rec. R. Soc. London *57 (3)* (2003), 273–284.

[3] Bailhache, P.: *La musique traduite en mathématiques: Leonhard Euler.* Communication au colloque du Centre François Viète: "Problèmes de traduction au XVIIIe siècle", 17 janvier 1997, Nantes, 1997. (Anglický překlad viz Joe Monzo, *Music translated into Mathematics: Leonhard Euler*, `http://www.tonalsoft.com/monzo/euler/euler-en.aspx`).

[4] Bailhache, P.: *Deux mathématiciens musiciens: Euler et d'Alembert.* Physis Riv. Internaz. Storia Sci. (N.S.) *32* (1995), 1–35.

[5] Barbour, J. M.: *Tuning and temperament: a historical survey.* Michigan State Press, East Lansing, 1951.

[6] Benson, D.: *Music: A mathematical offering.* Cambridge University Press, Cambridge, 2007.


[11] V ruských pramenech je někdy uváděn jako Ivan Ivanovič Bering. Jeho jméno nese úžina mezi Asií a Amerikou, ale i moře a ostrov v této lokalitě.

[7] Beránek, J.: *Matematické vztahy ve vědě, v reflexi o hudbě a v hudbě.* Dostupné z: `http://www.sciart-cz.eu/`

[8] Deetz, C. H., Adams O. S.: *Elements of map projection* (*with applications to map and chart construction*). U. S. Coast and Geodetic Survey, Government Printing Office, Washington, 1921.

[9] Gertsman, E. V.: *Euler and the history of certain musical-mathematical idea.* Euler and Modern Science, Vol. 4. Bogolyubov, N. N., Mikhaĭlov, G. K., Yushkevich, A. P. (eds.), The Mathematical Association of America, 2007, 335–347. (Původní ruský text byl publikován r. 1988.)

[10] Hall, R. W., Josić, K.: *Matematika hudebních nástrojů.* PMFA *47* (2002), 37–49. (Originál vyšel v Amer. Math. Monthly *108* (2001), 347–357.)

[11] Hartkleroad, L.: *The Math behind the music.* Cambridge University Press, New Delhi, 2006.

[12] Heine, G.: *Eulers contribution to Mathematical cartography.* Text přednášky přednesené 6. 9. 2009 na výroční konferenci MAA v Portlandu.

[13] Hinks, A. R.: *Map projections.* Cambridge University Press, Cambridge, 1912.

[14] Hong, D.: *Use of mathematics in music composition.* Extended essay v rámci International Baccalaureate, 10 str.

[15] Kak, S.: *The golden mean and the physics of aesthetics.* Ancient Indian Leaps into Mathematics, Yadav, B. S., Mohan, M. (eds), Birkhäuser/Springer, New York, 2011, 111–119.

[16] Klyve, D., Stemkoski, L.: *Euler archive.* `http://www.math.dartmouth.edu/~euler/`.

[17] Knobloch, E.: *Euler transgressing limits: The infinite and music theory.* Quaderns d'Historia de l'Enginyera *IX* (2008), 9–23.

[18] di Lorenzo, P.: *Mathematics and music: fatal* (*strange*) *attraction at first sight.* Applied and Industrial Mathematics in Italy, Ser. Adv. Math. Appl. Sci. *69*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, 305–314.

[19] Newton, I.: *Philosophia Naturalis Principia Mathematica.* London, 1687.

[20] Noskova, O. L.: *Ivan Kirilovič Kirilov i jego vklad v razvitie rossijskoj nauki.* Izvestija Samarskogo naučnogo centra Rossijskoj akaděmii nauk *13* (2011), 264–369.

[21] Red. kol.: *Ivan Kirilovič Kirilov – 320 let so dňa rožděnija.* Demoskop Weekly 399–400 (12/2009). Dostupné z: `http://demoscope.ru/weekly/`

[22] Snyder, J. P.: *Equidistant conic map projections.* Annals of the Association of American Geographers *68* (1978), 373–383.

[23] Steffens, K.-G.: *The history of approximation theory.* Birkhäuser, Boston, 2006.

[24] Tserlyuk-Askadskaya, S. S.: *Euler's music-theoretical manuscripts and the formation of his conception of the theory of music.* Euler and Modern Science, Vol. 4. Bogolyubov, N. N., Mikhaĭlov, G. K., Yushkevich, A. P. (eds.), The Mathematical Association of America, 2007, 349–360. (Původní ruský text byl publikován r. 1988.)

[25] Urban, G.: *Euler, Leonhard: Geographischer Atlas bestehend in 44 Land-Charten worauf alle Theile des Erd-Creyses vorgestellet werden.* Bibliothekssystem Universität Hamburg, 2011. Dostupné z: `http://www.sub.uni-hamburg.de/es/bibliotheken/presse-ausstellungen-und-veranstaltungen/ausstellungen-und-veranstaltungen/online-ausstellungen/expo-des-monats/februar-2011.html`

[26] Wright, D.: *Mathematics and music.* Mathematical World *28*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2009. (Aktuální verze ve formátu *.pdf je k dispozici na adrese `http://www.math.wustl.edu/ wright/Math109/00Book.pdf`)