Michal Křížek; Martin Markl

V roce 2013 získal Abelovovu cenu Pierre Deligne za fundamentální práce svazující algebru a geometrii

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 58 (2013), No. 4, 265–273

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/143720`

V roce 2013 získal Abelovovu cenu Pierre Deligne za fundamentální práce svazující algebru a geometrii

Michal Křížek, Martin Markl, Praha, Lawrence Somer, Washington, DC

1. Úvod

Dne 21. května 2013 získal Abelovu cenu za matematiku Pierre Deligne, emeritní profesor na Institute for Advanced Study v americkém Princetonu. Podle vyjádření výběrové komise ji získal *za své průkopnické práce v algebraické geometrii a jejich dopad na teorii čísel, teorii reprezentací a příbuzné obory. Deligneho účinné koncepty, skvělé myšlenky, silné výsledky a metody ovlivňují algebraickou geometrii, jakož i celou matematiku* (viz [23]). Deligne to komentoval slovy: *The nice thing about mathematics is doing mathematics. The prizes come in addition.* Cenu mu udělila Norská akademie věd, která byla založena již v roce 1857 a jejímž současným čestným předsedou je Jeho Veličenstvo norský král Harald V. Abelovy ceny se udělují od roku 2003. Jsou to vlastně takové matematické *nobelovky* spojené s finanční odměnou 1 milion amerických dolarů. O předchozích deseti cenách pojednává přehledová publikace [15].

Obr. 1. Pierre René Deligne

Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc., Matematický ústav AV ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: krizek@math.cas.cz, RNDr. Martin Markl, DrSc., Matematický ústav AV ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, a Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: markl@math.cas.cz, Prof. Lawrence Somer, Ph.D., Department of Mathematics, Catholic University of America, Washington, D.C. 20064, U.S.A., e-mail: somer@cua.edu

2. Stručný životopis

Pierre René Deligne se narodil 3. října 1944 v Bruselu. Když mu bylo 12 let, začal si číst univerzitní matematické učebnice svého staršího bratra. Na střední škole mu pak profesor matematiky půjčil několik svazků *Éléments de mathématique* od Nicolase Bourbakiho (což je pseudonym skupiny francouzských matematiků). To mladému Pierrovi navždy změnilo život. Jeho otec sice chtěl, aby se stal inženýrem, ale Pierre se rozhodl pro univerzitní studia matematiky. Na univerzitu v Bruselu nastoupil s ambicemi stát se středoškolským učitelem. Tam se však setkal s dalším budoucím nositelem Abelovy ceny Jacquesem Titsem, který jej přivedl k výzkumu v matematice. V roce 1966 získal Deligne titul B.A. Pod vedením Alexandera Grothendiecka obhájil v r. 1968 doktorskou dizertační práci. V témže roce začal spolupracovat na reprezentacích modulárních forem [6] s pozdějším prvním laureátem Abelovy ceny Jeanem-Pierrem Serrem, který se mj. zabýval analogiemi Weilových domněnek (viz kap. 5 a [20]). V roce 1970 byl Pierre Deligne přijat do Institut des Hautes Études Scientifiques v Bures-sur-Yvette nedaleko Paříže. V roce 1972 obhájil na Univerzitě Paris-Sud 11 velký doktorát (Doctorat d'État) v oblasti matematických věd.

P. Deligne se zasloužil o nalezení nových spojitostí mezi různými oblastmi matematiky, což vedlo k řadě důležitých objevů. Jeho největším přínosem je velkolepý důkaz Weilovy domněnky publikovaný v roce 1973. O pět let později za něj dostal Fieldsovu medaili a v roce 1988 ještě Crafoordovu cenu společně se svým bývalým školitelem Alexanderem Grothendieckem. Stručně řečeno, jde o důkaz analogie slavné Riemannovy hypotézy nad konečnými tělesy, jež v původní formulaci pro komplexní rovinu $\mathbb{C}$ doposud vyřešena nebyla (je to jeden ze sedmi problémů pro třetí tisíciletí [8]). Deligne získal také Cenu Henriho Poincarého v r. 1974, Balzanovu cenu v r. 2004 a prestižní Wolfovu cenu v r. 2008 společně s Phillipem Griffithsem a Davidem Mumfordem. V roce 2006 jej belgický král Albert II. jmenoval vikomtem. Pierre Deligne je čestným členem Moskevské matematické společnosti a Londýnské matematické společnosti. Je také čestným zahraničním členem Americké akademie věd a umění, Americké filozofické společnosti a Královské švédské akademie věd. Za své fundamentální objevy v matematice se dokonce dostal na belgické známky (viz obr. 2).

3. Rozřešení Ramanujanovy domněnky

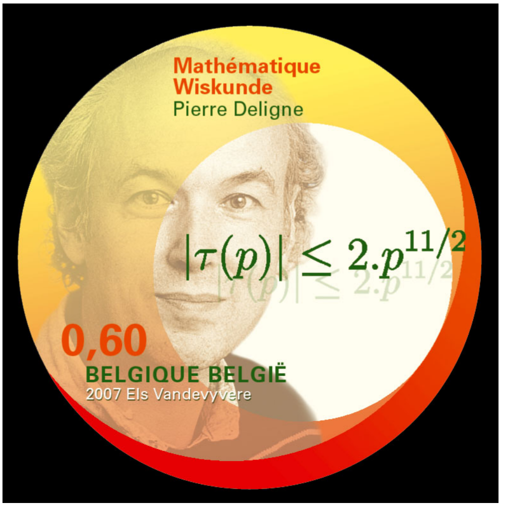
Deligne se poprvé proslavil důkazem Ramanujanovy (Ramanujanovy-Petersonovy) domněnky z teorie modulárních forem. Definujme koeficienty $\tau(n)$ pomocí vztahu

$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n, \tag{1}$$

kde $q\in\mathbb{C}$. Rovnost mezi nekonečným součinem vlevo a mocninnou řadou pravo je třeba chápat čistě formálně, protože jejich konvergence je vedlejší. Pro konkrétní přirozené číslo n je totiž koeficient $\tau(n)$ jednoznačně dán součtem jen konečně mnoha čísel.

V roce 1916 Srinivasa Ramanujan vyslovil domněnku (viz [19], s. 176), že pro libovolné prvočíslo p platí

$$|\tau(p)|\le 2p^{11/2},$$



Obr. 2. Pierre Deligne na belgické známce

kterou dokázal právě Deligne [4]. Koeficienty[1] $\tau(n)$ jsou hodnoty tzv. *Ramanujanovy τ-funkce.* Ramanujanovu domněnku lze zobecnit takto:

Pro přirozené číslo n je $|\tau(n)| \le d(n)n^{11/2}$, kde $d(n)$ označuje počet dělitelů čísla n.

Za q nyní zvolme komplexní číslo $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}z} \in \mathbb{C}$, kde $z = a + ib \in \mathbb{C}$ pro reálná $a, b \in \mathbb{R}$, to jest

$$q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)} = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}a-2\pi b} = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}a}\mathrm{e}^{-2\pi b}.$$

Vidíme, že absolutní hodnota $|q| = \mathrm{e}^{-2\pi b}$, protože $\left|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}a}\right| = 1$. Odtud plyne, že $|q| < 1$, kdykoliv je imaginární část z kladná. Podmínka $|q| < 1$ zajišťuje konvergenci nekonečného součinu v (1), který tak bude definován pro z z horní otevřené poloroviny komplexní roviny. Tuto funkci proměnné z označme $\Delta(z)$.

Funkce Δ je holomorfní a lze ji rozšířit na celou komplexní rovinu. Je periodická v tom smyslu, že platí

$$\Delta(z) = \Delta(z + 1) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

a navíc $\Delta(-1/z) = z^{12}\Delta(z)$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Jestliže roste imaginární část z do nekonečna, potom $\Delta(z)$ konverguje k nule. Uvedené vlastnosti znamenají, že Δ je modulární forma. Tento typ funkcí hraje významnou roli ve Wilesově důkazu Velké Fermatovy věty.

Záhadný exponent 24 ve vztahu (1) souvisí s Leechovou mřížkou nejhustšího uspořádání stejně velkých nadkoulí v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^{24}$ (podrobnosti viz [14]). Můžeme se ptát: Kolika různými způsoby můžeme náhodně zvolené přirozené číslo n napsat ve tvaru $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{24}^2$, kde $x_1, \ldots, x_{24}$ jsou celá čísla? Jinými slovy, kolik mřížových bodů s celočíselnými souřadnicemi leží na nadsféře o poloměru $\sqrt{n}$? Kolik mřížových bodů leží uvnitř této nadsféry? Odhady počtu mřížových bodů úzce souvisí s koeficienty $\tau(n)$ (viz [11], s. 6). Nejvyšší hustota stejně velkých nadkoulí je zatím známa jen v prostorech $\mathbb{R}^k$ pro $k = 1, 2, 3, 4, 8$ a 24.

[1] Celou řadu vztahů pro koeficienty $\tau(n)$ lze najít v monografii [17].

4. Riemannova hypotéza

Označme $\pi(n)$ počet prvočísel $p \leq n$. Pravděpodobnost, že $n \geq 2$ je prvočíslo, je zhruba rovna $1/\ln n$. Na základě této vlastnosti Carl Friedrich Gauss (1777–1855) předložil jako domněnku[2] prvočíselnou větu[3]

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n},$$

kde symbol $\approx$ označuje asymptotickou rovnost pro $n \to \infty$. Jedna z několika verzí slavné a dosud nerozřešené Riemannovy hypotézy tvrdí, že *pro každé $\varepsilon > 0$ je*

$$\pi(n) = \mathrm{Li}(n) + O(n^{1/2+\varepsilon}),$$

kde

$$\mathrm{Li}(n) = \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \quad (\textit{integrállogaritmus}).$$

Funkce $\mathrm{Li}(n)$ se přitom asymptoticky chová jako $n/\ln n$.

Připomeňme nyní stručně ekvivalentní verzi Riemannovy hypotézy. Pak zformulujeme její verzi nad konečnými tělesy (viz kap. 5), za jejíž vyřešení byl Deligne oceněn. Položme

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \tag{2}$$

kde suma konverguje pro libovolné komplexní číslo z takové, že $\mathrm{Re}(z) > 1$. Funkce ζ se nazývá *Riemannova ζ-funkce*. Platí, že $\zeta(1) = \infty$ (součet harmonické řady) a $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Nejprve dokážeme následující překvapivou rovnost obsahující na pravé straně součin přes všechna prvočísla $p \in P = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$,

$$\zeta(z) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-z}}. \tag{3}$$

Eulerova věta. *Definice* (2) *a* (3) *jsou ekvivalentní pro všechna komplexní čísla z taková, že* $\mathrm{Re}(z) > 1$.

Uveďme snadný, ale nádherný důkaz. Označíme-li i-té prvočíslo p_i, pak každé přirozené číslo n lze podle základní věty aritmetiky (viz [16], s. 51) jednoznačně vyjádřit součinem $p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \cdots$ s nezápornými celými exponenty $k_1, k_2, k_3, \dots$ Jinak řečeno, množinu $\mathbb{N}$ přirozených čísel je možné popsat konečnými součiny

$$\mathbb{N} = \left\{ p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \cdots \;\middle|\; k_1, k_2, k_3, \dots \text{ jsou nezáporná celá čísla} \right\}.$$

Podle vztahu pro součet geometrické řady platí pro každé $i = 1, 2, \dots$, že

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_i^z} \right)^j = \frac{1}{1 - p_i^{-z}}.$$

[2]Domněnku nezávisle dokázali v roce 1896 Jacques Hadamard (1865–1963) a Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866–1962).

[3]Lze však ukázat, že asymptotika $\pi(n) = n/\ln n + O(n/\ln^3 n)$ neplatí.

Vynásobíme-li mezi sebou tyto rovnice, dostaneme

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_i^{-z}} = \Big(1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{2^{2z}}+\cdots\Big)\Big(1+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{3^{2z}}+\cdots\Big)\cdots$$
$$\cdots\Big(1+\frac{1}{p_i^z}+\frac{1}{p_i^{2z}}+\cdots\Big)\cdots = \sum_{k_1,k_2,k_3,\ldots\geq 0} \frac{1}{(p_1^{k_1}p_2^{k_2}p_3^{k_3}\cdots)^z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z},$$

což je žádaná rovnost[4] výrazů (2) a (3). □

Německý matematik Bernhard Riemann (1826–1866) odvodil pro ζ-funkci další užitečný vztah

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\zeta(z) = \pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\Big(\frac{1-z}{2}\Big)\zeta(1-z), \tag{4}$$

který říká, jak se ζ-funkce chová při substituci z za $1-z$. Zde je Γ-funkce definována vztahem

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$

a je přirozeným rozšířením faktoriálu

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

do oboru komplexních čísel. Funkce $\zeta(1-z)$ na pravé straně (4) má pól pro $z=0$ a $\Gamma\big(\frac{1-z}{2}\big)$ má póly v bodech $z = 1,3,5,7,\ldots$ Protože levá strana (4) je v bodech $z = 3,5,7,\ldots$ konečná, platí

$$0 = \zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \cdots.$$

Tyto kořeny se nazývají *triviální*. Funkci ζ lze rozšířit na funkci meromorfní v komplexní rovině s pólem v bodě 1. *Riemannova hypotéza* tvrdí, že všechny netriviální kořeny tohoto rozšíření funkce ζ mají reálnou část rovnou $\frac{1}{2}$.

Rozřešení této hypotézy je dnes pokládáno za jeden z nejtěžších a nejdůležitějších problémů teorie čísel, neboť úzce souvisí s otázkou rozložení prvočísel (srov. (3)). Na jeho vyřešení byla vypsána odměna 1 000 000 dolarů (viz [8]).

5. Weilovy domněnky

P. Deligne se proslavil zejména rozřešením třetí Weilovy domněnky. Před její formulací připomeneme některé pojmy. *Charakteristika tělesa F* je nejmenší přirozené číslo q takové, že jednotka $1 \in F$ splňuje rovnici

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{q\text{-krát}} = 0.$$

Pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že F má *charakteristiku nula*. Je zřejmé, že konečná charakteristika je vždy prvočíslem. Příkladem těles charakteristiky 0 jsou

[4] Rovnost výrazů (2) a (3) je jedním z několika důvodů, proč 1 nezařazujeme mezi prvočísla. Dalším důvodem je požadavek na jednoznačnost rozkladu přirozeného čísla $n > 1$ na součin mocnin prvočísel.

reálná nebo komplexní čísla. Příkladem tělesa prvočíselné charakteristiky q je těleso $\mathbb{Z}_q$ celých čísel modulo q.

Je snadné dokázat, že konečné těleso prvočíselné charakteristiky q musí mít q^m prvků pro nějaké přirozené číslo m. Příkladem[5] je množina $\mathbb{F}_{q^m}$ kořenů polynomu $t^{q^m} - t$ v nějakém algebraickém rozšíření tělesa $\mathbb{Z}_q$. Ověřme, že $\mathbb{F}_{q^m}$ je těleso. Protože

$$t^{q^m} - t = t(t-1)(t^{q^m-2} + t^{q^m-3} + \cdots + t + 1),$$

0 i 1 náležejí do $\mathbb{F}_{q^m}$. Multiplikativní uzavřenost je zřejmá: pokud $a, b \in \mathbb{F}_{q^m}$, pak $a^{q^m} = a$, $b^{q^m} = b$, tedy $(ab)^{q^m} = a^{q^m} b^{q^m} = ab$, což znamená, že $ab \in \mathbb{F}_{q^m}$. Podobně ukážeme, že jestliže $a \in \mathbb{F}_{q^m}$, potom $a^{-1} \in \mathbb{F}_{q^m}$. Zbývá dokázat, že $a + b \in \mathbb{F}_{q^m}$ pro $a, b \in \mathbb{F}_{q^m}$. Podle binomické věty

$$(a+b)^{q^m} = \sum_{i=0}^{q^m} \binom{q^m}{i} a^i b^{q^m - i}.$$

Pokud $1 \le i \le q^m - 1$, pak

$$\binom{q^m}{i} = \frac{q^m}{i} \binom{q^m - 1}{i - 1}. \tag{5}$$

Vynásobíme-li tuto rovnost i, vidíme, že (srov. [16], s. 86)

$$q \quad \text{dělí} \quad \binom{q^m}{i},$$

protože oba binomické koeficienty v (5) jsou přirozená čísla a q^m nedělí i. Máme tedy $(a+b)^{q^m} = a^{q^m} + b^{q^m} = a + b$, a proto $a + b \in \mathbb{F}_{q^m}$. Těleso $\mathbb{F}_{q^m}$ se nazývá *Galoisovo konečné těleso* s q^m prvky. Lze ukázat, že všechna tělesa s q^m prvky jsou izomorfní s tímto tělesem.[6]

Afinní varieta se obvykle definuje jako množina řešení určitého systému polynomiálních rovnic (třeba $x^2 + y^2 = 1$) nad tělesem reálných či komplexních čísel. Stejně ovšem můžeme definovat variety i nad konečným tělesem F. Například dvojice $(4, 6)$ patří „kružnici“ $x^2 + y^2 = 1$ nad tělesem $\mathbb{F}_{17}$, protože $4^2 + 6^2 = 52$ dává zbytek 1 při dělení 17. Jiným příkladem je dvojice $(3, 3)$. Podobně je projektivní varieta množina řešení soustavy homogenních polynomiálních rovnic v projektivním prostoru.[7]

André Weil vyslovil v roce 1949 čtyři domněnky (viz [22] a [9]) o počtu bodů algebraických variet nad konečnými tělesy (jejich speciální případ formuloval již v roce 1924 Emil Artin [1]). Předpokládejme, že q je prvočíslo a X hladká (regulární) n-rozměrná projektivní varieta nad tělesem $\mathbb{F}_q$. V této situaci definujeme ζ-funkci variety X předpisem

$$\zeta(X, z) = \exp\Bigl(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m} (q^{-z})^m\Bigr), \tag{6}$$

---

[5]Příklad je motivován implikací: *Je-li q prvočíslo a $m, n \in \mathbb{N}$, pak q dělí $n^{q^m} - n$.* Případ $m = 1$ je Malá Fermatova věta [16]. Pro $m > 1$ lze použít indukci.

[6]Podobné tvrzení pro grupy neplatí [15], s. 43. Existuje např. 5 neizomorfních grup o $3^3 = 27$ prvcích, z nichž 3 jsou komutativní.

[7]Projektivní prostor je tvořen třídami ekvivalence vektorů $(x_0, \ldots, x_n) \in F^{\times(n+1)}$, přičemž ekvivalentní jsou vektory $(x_0, \ldots, x_n)$ a $(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)$ pro nenulové $\lambda \in F$.

ve kterém $z \in \mathbb{C}$ a N_m je počet bodů variety X nad rozšířením $\mathbb{F}_{q^m}$ tělesa $\mathbb{F}_q$. Weil předpověděl, že by ζ-funkce měly být racionální, že by měly splňovat jistou funkcionální rovnici a že by měly mít kořeny na přesně vymezených přímkách. *Weilovy domněnky* lze přesněji formulovat takto:

1. Racionalita. Funkce $\zeta(X, z)$ je racionální v proměnné $t = q^{-z}$ a má tvar

$$\zeta(X, z) = \frac{P_1(t)P_3(t)\cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\cdots P_{2n}(t)}, \tag{7}$$

kde $P_i(t)$ jsou polynomy s celočíselnými koeficienty, přičemž $P_0(t) = 1 - t$, $P_{2n}(t) = 1 - q^n t$. Racionalitu funkce (6) dokázal Bernard Dwork [10].

2. Funkcionální rovnice a Poincaréova dualita. Funkce ζ splňuje vztah

$$\zeta(X, n - z) = \pm q^{\frac{nE}{2} - Ez}\zeta(X, z),$$

kde E je Eulerova charakteristika variety X. Položíme-li $t = q^{-1}$, obdržíme funkcionální rovnici

$$\zeta(X, q^{-n}t^{-1}) = \pm q^{\frac{nE}{2}} t^E \zeta(X, z).$$

Z ní plyne, že substituce $t \mapsto 1/q^n t$ zaměňuje kořeny polynomu $P_i(t)$ za kořeny polynomu $P_{2n-i}(t)$. Tuto druhou domněnku dokázal Alexander Grothendieck [12].

3. Konečná verze Riemannovy hypotézy. Kořeny polynomu P_i vystupujícího v (7) leží na „kritické přímce" v rovině komplexních čísel z s reálnou částí $i/2$. Tuto třetí a zároveň nejtěžší domněnku dokázal právě Pierre Deligne [4] v roce 1974 (viz též [5]).

4. Bettiho čísla. Je-li X redukce modulo p regulární projektivní variety nad tělesem komplexních čísel, pak je stupeň polynomu P_i roven dimenzi i-té homologické grupy této variety, tedy jejímu i-tému Bettimu číslu β_i, viz [18], s. 731–732.

Jako příklad vezměme hladkou projektivní křivku X rodu g.[8] V souladu s Weilovou domněnkou

$$\zeta(X, z) = \frac{P(t)}{(1-t)(1-qt)},$$

kde $P(t)$ je polynom stupně $2g$. Konečná verze Riemannovy hypotézy říká, že kořeny polynomu $P(t)$ leží na přímce komplexních čísel s imaginární částí $1/2$. Podobnost s klasickou Riemannovou hypotézou je důsledkem mnohem hlubší souvislosti.

Připomeňme, že těleso algebraických čísel K je konečné rozšíření tělesa racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Každé takové K obsahuje okruh celých algebraických čísel $\mathcal{O}_K$ tvořený prvky $x \in K$ splňujícími rovnici

$$x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_k = 0$$

s nějakými celočíselnými koeficienty $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{Z}$. Snadno se přesvědčíme, že $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$, což zdůvodňuje názvosloví.

V popsané situaci Richard Dedekind definoval ζ-funkci vztahem

$$\zeta_K(z) = \sum N(I)^{-z},$$

[8] *Rod* (genus) g je polovina prvního Bettiho čísla β_1 variety X. Pro $g = 0$ je tedy X topologicky dvourozměrná sféra, pro $g = 1$ torus.

kde součet probíhá všechny ideály I okruhu $\mathcal{O}_K$ a $N(I)$ značí kardinalitu podílového okruhu $\mathcal{O}_K/I$. Podobně jako v klasickém případě (3) můžeme ζ-funkci vyjádřit také Eulerovým součinem

$$\zeta_K(z) = \prod \frac{1}{1 - N(\mathfrak{p})^{-z}}$$

přes všechny prvoideály $\mathfrak{p}$ okruhu $\mathcal{O}_K$. Doporučujeme jako cvičení ukázat, že pro $K = \mathbb{Q}$ dostáváme klasickou Riemannovu ζ-funkci z kapitoly 4. Artin si povšiml, že Dedekindovu definici lze použít i na okruh regulárních funkcí na varietě X. Vzorec (6) je přepis Dedekindovy definice do geometrického jazyka. Plné pochopení podstaty Weilových domněnek inspirovalo objev etálních kohomologií, jednoho z nejdůležitějších pojmů moderní algebraické geometrie.

6. Další Deligneovy výsledky

Databáze Mathematical Reviews obsahuje přes 100 Deligneových prací z nejrůznějších matematických oborů. Jeho záběr je opravdu široký: matematická teorie strun a supergravitace, spinory, hyperbolické funkce, homologická algebra, eliptické křivky, modulární formy, konečné grupy, ...

Deligne se snažil rozřešit několik dalších důležitých a těžkých problémů. Uveďme si několik typických příkladů. Deligne se např. zabýval Hodgeovou domněnkou, což je opět jeden ze sedmi problémů pro třetí tisíciletí [8].

Deligne ve své práci [3] také podstatně přispěl k rozřešení a zobecnění 21. Hilbertova problému o existenci diferenciálních rovnic s regulárními singulárními body. Použité důkazové techniky jsou popsány v [13]. Další přehledový článek o jeho příspěvcích k matematice nedávno napsal Gowers [11].

Na úplný závěr se zmiňme o domněnce, formulované Delignem v dopise [7] z roku 1993, k jejímuž důkazu přispěl český matematik. Domněnka říká, že struktura Gerstenhaberovy algebry na Hochschildových kohomologiích je generována akcí operády malých disků na kořetězcích. Zobecněním je problém charakterizace homotopického typu operády všech přirozených operací. Tento problém byl v [2] zcela vyřešen M. Bataninem a druhým autorem tohoto článku.

Poděkování. Tento článek byl podpořen projektem RVO 67985840 a grantem P201/12/G028. Autoři děkují prof. RNDr. Jaroslavu Hančlovi, CSc., doc. RNDr. Františku Katrnoškovi, CSc., a doc. RNDr. Martinu Klazarovi, Dr., za velmi cenné připomínky.

Literatura

[1] Artin, E.: *Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen II. Analytischer Teil.* Math. Z. *19* (1924), 207–246.

[2] Batanin, M., Markl, M.: *Crossed interval groups and operations on the Hochschild cohomology.* Vyjde v Journal of Noncommutative Geometry, 36 stran. Předběžná verze vystavena jako preprint `arXiv:0803.2249`.

[3] Deligne, P.: *Equations differentielles à points singuliers réguliers.* Lecture Notes in Mathematics 163. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[4] Deligne, P.: *La conjecture de Weil I.* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. *43* (1974), 273–307.

[5] Deligne, P.: *La conjecture de Weil II.* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. *52* (1980), 137–252.

[6] Deligne, P., Serre, J.-P.: *Formes modulaires de poids.* Ann. Sci. École Norm. Sup. *7* (1974), 507–530.

[7] Deligne, P.: *A letter to Stasheff, Gerstenhaber, May, Schechtman and Drinfel'd.* 1993.

[8] Devlin, K. J.: *The millenium problems: The seven greatest unsolved mathematical puzzles of our time.* Basic Books, New York, 2002; český překlad, Dokořán, Praha, 2005.

[9] Dieudonné, J.: *The Weil conjectures.* Math. Intelligencer *10* (1975), 7–21.

[10] Dwork, B.: *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety.* Amer. J. Math. *82* (1960), 631–648.

[11] Gowers, W. T.: *The work of Pierre Deligne.* Preprint 2013, 1–15.

[12] Grothendieck, A.: *Tores maximaux, groupe de Weil, sous-groupes de Cartan, centre réductif des schémas en groupes lissés et affines.* Sém. Géometrie Algébrique, Inst. Hautes Études Sci. 1963/64, Fasc. 4, Exposé 12, 69 pp.

[13] Katz, N. M.: *An overview of Deligne's work on Hilbert's twenty-first problem.* In: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, 1976, 537–557.

[14] Křížek, M., Somer, L.: *Abelova cena v roce 2008 udělena za objevy v teorii neabelovských grup.* PMFA *53* (2008), 177–187.

[15] Křížek, M., Somer, L., Markl, M., Kowalski, O., Pudlák, P., Vrkoč, I.: *Prvních deset Abelových cen za matematiku.* JČMF, Praha, 2013.

[16] Křížek, M., Somer, L., Šolcová, A.: *Kouzlo čísel: Od velkých objevů k aplikacím.* Edice Galileo, sv. 39. Academia, Praha, 2009, 2011.

[17] Moreno, C. J., Wagstaff, S. S.: *Sums of squares of integers.* Discrete Mathematics and its Applications. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

[18] Osserman, B.: *The Weil conjectures.* The Princeton Companion to Mathematics, T. Gowers (ed.). Princeton Univ. Press, 2008, 729–732.

[19] Ramanujan, S.: *On certain arithmetical functions.* Trans. Cambridge Phil. Soc. *XXII* (1916), 159–184.

[20] Serre, J.-P.: *Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil.* Ann. Math. *71* (1960), 392–394.

[21] Schroeder, M. R.: *Number theory in science and communication.* Springer, Berlin, 1984, 1986, 1997, 2006.

[22] Weil, A.: *Numbers of solutions of equations in finite fields.* Bull. Amer. Math. Soc. *55* (1949), 497–508.

[23] `http://www.abelprize.no`