Martin Markl

Atiyahova-Singerova věta o indexu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 58 (2013), No. 1, 21–27

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/143255

Atiyahova-Singerova věta o indexu

Martin Markl, Praha

Michael F. Atiyah a Isador M. Singer obdrželi v roce 2004 Abelovu cenu za objev a důkaz věty o indexu. O udělení tohoto významného ocenění referoval článek [1]. Stále však čtenářům dlužíme popis výsledku, za nějž byla cena udělena.

Věta o indexu pojednává o eliptických diferenciálních operátorech. Zopakujme nejdříve základní definice. *Diferenciální operátor* na prostoru $\mathcal{C}(U)$ hladkých komplexních funkcí na otevřené podmnožině U eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ se souřadnicemi $(x_1, \dots, x_n)$ je operátor tvaru

$$D = \sum_{i_1,\dots,i_n \geq 0} F_{i_1,\dots,i_n}(x_1,\dots,x_n) \frac{\partial^{i_1+\dots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}, \tag{1}$$

kde pouze konečně mnoho koeficientů $F_{i_1,\dots,i_n} \in \mathcal{C}(U)$ je nenulových. Jinými slovy, D náleží okruhu $\mathcal{C}(U)[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}]$ polynomů v proměnných $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ s koeficienty v $\mathcal{C}(U)$. *Řád operátoru* D je číslo

$$\mathrm{rk}(D) := \max\{i_1 + \dots + i_n \mid F_{i_1,\dots,i_n} \neq 0\}.$$

Symbol operátoru D řádu k je polynom $\sigma(D) \in \mathcal{C}(U)[t_1,\dots,t_n]$ definovaný předpisem

$$\sigma(D)(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n) := \sum_{i_1+\dots+i_n=k} F_{i_1,\dots,i_n}(x_1,\dots,x_n) t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}.$$

Operátor D je *eliptický*, jestliže $\sigma(D)(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n) \neq 0$, kdykoliv $t_a \neq 0$ pro nějaké $a \in \{1,\dots,n\}$. Příkladem je laplacián

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \tag{2}$$

jehož symbol je $t_1^2 + \dots + t_n^2$. Naproti tomu vlnový operátor

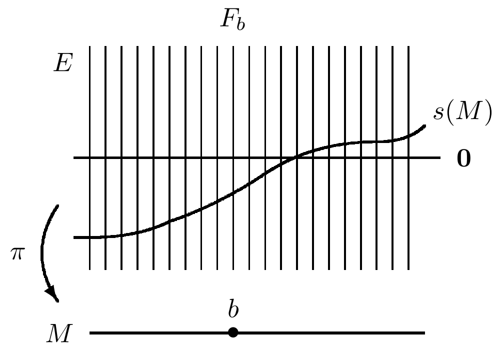
$$\Box := -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{3}$$

eliptický není.

Věta o indexu se ovšem týká obecnějších diferenciálních operátorů působících na řezech hladkých vektorových fibrací.[1] Opět připomeňme základní pojmy. *Komplexní vektorová fibrace* (krátce vektorová fibrace) je zobrazení topologických prostorů

[1] Anglicky *smooth vector bundle*.

RNDr. Martin Markl, DrSc., Matematický ústav AV ČR, v.v.i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `markl@math.cas.cz`



Obr. 1. Představa fibrace jako spojité rodiny vektorových prostorů

$\pi : E \to M$ takové, že $F_b := \pi^{-1}(b)$ (tzn. *fibr* nad bodem b) je pro každé $b \in M$ konečněrozměrný komplexní vektorový prostor. Dále požadujeme *lokální trivialitu*, tedy aby pro každý bod $b \in M$ existovalo otevřené okolí $U \ni b$, číslo k a homeomorfizmus

$$\phi : U \times \mathbb{C}^k \to \pi^{-1}(U)$$

takový, že

(i) $(\pi\phi)(x, v) = x$ pro každé $(x, v) \in U \times \mathbb{C}^k$ a

(ii) pro každé $x \in U$ je zobrazení $v \mapsto \phi(x, v)$ izomorfizmem komplexních vektorových prostorů $\mathbb{C}^k$ a F_x.

Podmínka (i) vyjadřuje komutativitu diagramu

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{C}^k \arrow[r, "\phi", "\cong"'] \arrow[d, "p_1"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, "="] & U \arrow[r, hook] & M \end{tikzcd} \tag{4}$$

v němž p_1 je projekce na první faktor. Prostory M, resp. E se nazývají *báze*, resp. *totální prostor* fibrace $\pi : E \to M$. Na zobrazení π budeme odkazovat jako na *fibrující zobrazení*.

Volně řečeno, vektorová fibrace je rodina vektorových prostorů $\{F_b\}_{b \in M}$ spojitě parametrizovaná bází M, což schematicky vyjadřuje obrázek 1. Příklad fibrace je samozřejmě projekce $p_1 : U \times \mathbb{C}^k \to U$ na otevřenou podmnožinu $U \subset \mathbb{R}^n$. Tato tzv. *triviální fibrace* má bázi U a totální prostor $U \times \mathbb{C}^k$.

Restrikce vektorové fibrace $\pi : E \to M$ na podmnožinu $U \subset M$ je vektorová fibrace $\pi : E|_U \to U$ s bází U a totálním prostorem $E|_U := \pi^{-1}(U)$. Diagram (4) říká, že restrikce vektorové fibrace na dostatečně malé otevřené podmnožiny báze jsou triviální.

Vektorová fibrace $\pi : E \to M$ je *hladká*, jestliže π je hladké zobrazení hladkých variet.[2] V dalším textu budeme hladkost předpokládat automaticky. *Řez* fibrace

[2] O hladkých varietách jsme pojednali např. v [2].

$\pi : E \to M$ je pravá inverze fibrujícího zobrazení, tedy hladké zobrazení $s : M \to E$, pro něž πs je identita. Řez s je určen svým grafem $s(M)$ vloženým do totálního prostoru E, viz opět obrázek 1. Množina $\Gamma(E, M)$ všech řezů je komplexní vektorový prostor s nulovým elementem $\mathbf{0}$, což je řez pro který $\mathbf{0}(b) := 0 \in F_b$ pro všechna $b \in M$. Součet $s' + s''$ řezů s' a s'' je definován ‚po fíbrech‘, tedy vzorcem $(s' + s'')(b) := s'(b) + s''(b)$, $b \in M$.

Snadno ověříme, že prostor řezů $\Gamma(U{\times}\mathbb{C}^k, U)$ triviální fibrace tvoří k-tice $(f_1, \dots, f_k)$ funkcí z $\mathcal{C}(U)$. Speciálně tedy $\Gamma(U{\times}\mathbb{C}, U) = \mathcal{C}(U)$. Operátory Δ a $\Box$ připomenuté v (2), resp. (3) můžeme nyní chápat jako lineární zobrazení $\Gamma(U{\times}\mathbb{C}, U) \to \Gamma(U{\times}\mathbb{C}, U)$.

Na vektorové fibrace lze ‚po fíbrech‘ aplikovat stejné operace jako na vektorové prostory. Každá vektorová fibrace $E \to M$ má proto svůj *duál* $E^* \to M$, jehož fíbr F_b^* nad $b \in M$ je lineární duál fíbru F_b původní fibrace.[3] Podobně můžeme utvořit *součet*

$$E' \oplus E'' \to B \tag{5}$$

fibrací $E' \to B$ a $E'' \to B$ se stejnou bází B. Fíbry součtu (5) tvoří přímé součty $F_b' \oplus F_b''$ fíbrů jednotlivých konstituentů.

Ve formulaci věty o indexu upotřebíme i následující konstrukci. Pro hladké zobrazení $p : B \to M$ a fibraci $\pi : E \to M$ definujeme *indukovanou* fibraci[4] $p^*E \to M$ fibrace π podél zobrazení p jako fibraci s totálním prostorem

$$p^*E := \big\{(b, e) \in B{\times}E \mid p(b) = \pi(e)\big\}.$$

Fibrující zobrazení $p^*E \to B$ je projekce na první faktor. Indukovaná fibrace tvoří komutativní diagram

$$\begin{tikzcd}
p^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\
M \arrow[r, "p"] & B
\end{tikzcd}$$

s obvyklou univerzální vlastností kategoriálních kartézských čtverců.

Vraťme se k definici diferenciálních operátorů v potřebné obecnosti. Uvažujme vektorové fibrace $\pi' : E' \to M$ a $\pi'' : E'' \to M$ nad stejnou bází. Diferenciální operátor je lineární zobrazení $D : \Gamma(E', M) \to \Gamma(E'', M)$ lokálně reprezentované maticí diferenciálních operátorů (1). Tím rozumíme toto. Víme, že vektorové fibrace jsou lokálně modelovány triviálními fibracemi. Restrikce prostorů řezů na dostatečně malé otevřené podmnožiny báze M jsou tedy tvořeny k-ticemi (resp. l-ticemi) hladkých komplexních funkcí z $\mathcal{C}(U)$ pro nějaká k a l. Vyžadujeme, aby na těchto restrikcích byl operátor D dán předpisem

$$D(f_1, \dots, f_k) = \Big(\sum_{1 \le i \le k} D_1^i(f_i), \dots, \sum_{1 \le i \le k} D_l^i(f_i) \Big),$$

[3] Pokud není třeba, vynecháváme symbol pro fibrující zobrazení.

[4] Anglicky *pullback*.

kde D^i_j jsou ‚klasické' diferenciální operátory jako v (1). Takový operátor D se nazývá eliptický, jestliže je příslušná matice symbolů

$$\left|\sigma(D^i_j)(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)\right|,\ 1\le i\le k,\ 1\le j\le l,$$

regulární, kdykoliv $(t_1,\dots,t_n)\neq(0,\dots,0)$. Elipticita nutně implikuje $k=l$.

Příklad 1. Pro $i=0,1,2,\dots$ označme $\wedge^i_{\mathbb{C}}(M)$ komplexifikovanou i-tou vnější (Grassmannovu) mocninu kotečné fibrace T^*M variety M.[5] Její řezy

$$\Omega^i(M):=\Gamma\big(\wedge^i_{\mathbb{C}}(M),M\big)$$

jsou (komplexní) *de Rhamovy formy* stupně i. Ty, spolu s *de Rhamovým diferenciálem* $d^i:\Omega^i(M)\to\Omega^{i+1}(M)$, tvoří (komplexifikovaný) de Rhamův komplex $(\Omega(M),d)$ variety M. Jeho kohomologie $H\big(\Omega(M),d\big)$ jsou shodné s kohomologiemi $H(M;\mathbb{C})$ variety M s komplexními koeficienty.

Pomocí Riemannovy metriky lze sestrojit operátor $d^{i^*}:\Omega^{i+1}(M)\to\Omega^i(M)$ *sdružený* k operátoru d^i. Operátory d^i a d^{i^*} jsou příklady diferenciálních operátorů na řezech fibrace $\wedge^i_{\mathbb{C}}(M)$ s hodnotami v řezech fibrace $\wedge^{i+1}_{\mathbb{C}}(M)$, resp. $\wedge^{i-1}_{\mathbb{C}}(M)$. Označme

$$E^{\mathrm{eve}}:=\bigoplus_{j\ge0}\wedge^{2j}_{\mathbb{C}}(M),\quad \text{resp. } E^{\mathrm{odd}}:=\bigoplus_{j\ge0}\wedge^{2j+1}_{\mathbb{C}}(M),$$

přímé součty sudých, resp. lichých vnějších mocnin kotečné fibrace. Operátory d^i a d^{i^*} se skládají do operátorů

$$d:=\sum_{j\ge0}d^{2j}:\Gamma(E^{\mathrm{eve}},M)\to\Gamma(E^{\mathrm{odd}},M)\ \text{ a }\ d^*:=\sum_{j\ge0}d^{2j+1^*}:\Gamma(E^{\mathrm{eve}},M)\to\Gamma(E^{\mathrm{odd}},M),$$

jejichž součet $D:=d+d^*:\Gamma(E^{\mathrm{eve}},M)\to\Gamma(E^{\mathrm{odd}},M)$ je eliptický diferenciální operátor.

Dále se soustředíme na vektorové fibrace nad *kompaktními orientovanými uzavřenými* varietami.[6] Ukazuje se, že eliptické operátory jsou *Fredholmovy*, tedy mají konečněrozměrná jádra i kojádra.[7] Můžeme tedy definovat *analytický index* operátoru D jako

$$Ind_A(D):=\dim Ker(D)-\dim coKer(D),\tag{6}$$

kde $Ker(D)$, resp. $coKer(D)$, značí jádro, resp. kojádro, lineárního zobrazení D.

Druhým pojmem figurujícím ve větě o indexu je *topologický index* operátoru D definovaný vzorcem

$$Ind_T(D):=ch(D)\mathscr{T}(M)[M].\tag{7}$$

Jeho úplné vysvětlení přesahuje možnosti tohoto článku, proto jenom naznačíme definice jednotlivých členů bez nároků na úplnou přesnost, na detaily odkazujeme čtenáře k [4]. Začněme s veličinou $ch(D)$.

[5] Velmi snadno se ověří, že $\wedge^i_{\mathbb{C}}(M)=0$ pro $i>\dim(M)$.
[6] Význam těchto pojmů i nádherný úvod do charakteristických tříd čtenář nalezne v [3].
[7] Kojádro lineárního zobrazení $L:A\to B$ je podíl $B/L(A)$.

Množina všech (nikoliv nutně hladkých) vektorových fibrací s danou bází B je komutativní pologrupa[8] $\mathcal{E}(B)$ s operací + danou součtem (5) a neutrálním prvkem 0 tvořeným triviální fibrací $B \times 0 \to B$ s fíbrem $0 = \mathbb{C}^0$. Jako každou komutativní pologrupu lze $\mathcal{E}(B)$ zúplnit Grothendieckovou konstrukcí do komutativní grupy $K(X)$. Tím získáme (komplexní) K*-grupu* prostoru X.

Hladká varieta M má *tečnou fibraci* $TM \to M$ a duální *kotečnou fibraci* $p : T^*M \to M$. V totálním prostoru kotečné fibrace vezměme podprostor $B(M) \subset T^*M$ vektorů délky nepřesahující 1 a sestrojme indukované fibrace

$$\begin{tikzcd} p^*E' \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ B(M) \arrow[r, "p"] & M \end{tikzcd} \quad \text{a} \quad \begin{tikzcd} p^*E'' \arrow[r] \arrow[d] & E'' \arrow[d, "\pi''"] \\ B(M) \arrow[r, "p"] & M. \end{tikzcd}$$

Ukazuje se, že symbol $\sigma(D)$ operátoru D lze interpretovat jako zobrazení

$$\sigma(D) : p^*E'|_{S(M)} \to p^*E''|_{S(M)} \tag{8}$$

restrikcí indukovaných fibrací p^*E' resp. p^*E'' na podprostor $S(M) \subset B(M)$ vektorů délky 1. Operátor D je eliptický právě když je toto zobrazení izomorfizmus. Indukované fibrace p^*E', resp. p^*E'' náleží pologrupě $\mathcal{E}\big(B(M)\big)$, můžeme proto vzít jejich rozdíl

$$p^*E' - p^*E'' \in K\big(B(M)\big).$$

Lze ukázat, že s použitím izomorfizmu (8) určí prvek $p^*E' - p^*E''$ *rozdílový element* $d(D) \in K\big(B(M)/S(M)\big)$ v K-grupě podílu $B(M)/S(M)$.

Uveďme následující posloupnost tvořenou standardními objekty algebraické topologie:

$$K\big(B(M)/S(M)\big) \xrightarrow{ch} H\big(B(M)/S(M); \mathbb{Q}\big) \xrightarrow{t} H(M; \mathbb{Q}). \tag{9}$$

První člen je již zmíněná K-grupa podílu $B(M)/S(M)$, druhý a třetí člen jsou racionální kohomologické okruhy podílu $B(M)/S(M)$, resp. variety M.

Zobrazení ch je *Chernův charakter*, což je určitý multiplikativní homomorfizmus z komplexní K-teorie do racionálních kohomologií definovaný s použitím Chernových tříd komplexních vektorových fibrací. Zobrazení t je *Thomův izomorfizmus* kotečné fibrace T^*M. Faktor $ch(D)$ v (7) je obraz prvku $d(D)$ kompozicí zobrazení v (9), tedy

$$ch(D) := t\big(ch(d(D))\big) \in H^*(M; \mathbb{Q}).$$

Symbol $\mathscr{T}(M)$ v (7) značí *Toddův rod* variety M, tedy mocninou řadu

$$\mathscr{T}(M) = 1 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2 + c_1^2}{12} + \frac{c_1 c_2}{24} + \frac{-c_1^4 + 4c_2c_1^2 + 3c_2^2 + c_3c_1 - c_4}{720} + \cdots \in H(M; \mathbb{Q}),$$

ve které $c_1, c_2, c_3, \ldots \in H^*(M; \mathbb{Q})$ jsou Chernovy třídy komplexifikované tečné fibrace variety M. Topologický index (7) je racionální číslo dané evaluací součinu

[8] To je množina s komutativní asociativní operací + a neutrálním prvkem 0.

$ch(D)\mathscr{T}(M) \in H(M;\mathbb{Q})$ na fundamentální třídě $[M]$ variety M. Povšimněme si, že pro danou varietu závisí pouze na symbolu $\sigma(D)$ operátoru D. Nyní již máme všechny potřebné definice.

Věta o indexu. *Analytický index eliptického diferenciálního operátoru na kompaktní hladké orientované varietě je roven jeho topologickemu indexu, tedy*

$$Ind_A(D) = Ind_T(D).$$

Hloubka věty je v porovnávání veličin rozdílného charakteru. Zatímco analytický index je celé číslo sestrojené prostředky funkcionální analýzy, topologický index je geometrická veličina. Okamžitý důsledek je, že $Ind_T(D)$ je také celé číslo, zatímco jeho definice říká pouze, že je to číslo racionální – povšimněmě si, že vzorec pro Toddův rod obsahuje racionální koeficienty![9] To je samo o sobě velice silný výsledek.

Ani analytický, ani topologický index nemusí být definován, pokud operátor D není eliptický. V takovém případě nemusí být rozdíl (6) definující $Ind_A(D)$ konečný a (protože (8) není izomorfizmus) nelze sestrojit ani rozdílový element $d(D)$ potřebný pro definici $Ind_T(D)$.

Příklad 2. Analytický index operátoru D z příkladu 1 je roven *Eulerově charakteristice* variety M, tedy

$$Ind_A(D) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim H^i(M,\mathbb{Q}).$$

Jeho topologický index získáme evaluací *Eulerovy třídy* $\chi(M)$ tečné fibrace variety M na její fundamentální třídě $[M]$,

$$Ind_T(D) = \chi(M)[M].$$

Věta o indexu pro operátor D vyjadřuje klasickou Gaussovu-Bonnetovu větu.

Příklad 3. Na varietě s komplexní strukturou můžeme místo operátoru D z předchozího příkladu vzít operátor $\overline{\partial}+\overline{\partial}^*$ působící na komplexních formách typu $(0,i)$. Věta o indexu v tomto případě vyústí v Riemannovu-Rochovu větu, viz [4, kapitola XIX].

Příklad 4. Jestliže U je orientovaný reálný n-rozměrný metrický vektorový prostor s ortonormální bází $e_1,\dots,e_n$, pak pro každé $i \in \{0,\dots,n\}$ předpis

$$\alpha^i(e_1\wedge\dots\wedge e_i) := \mathbf{i}^{\,i(i-1)+1}\cdot e_{i+1}\wedge\dots\wedge e_n \quad (\mathbf{i}\in\mathbb{C} \text{ je komplexní jednotka})$$

definuje lineární zobrazení $\alpha^i : \wedge^i_{\mathbb{C}}(U) \to \wedge^{n-i}_{\mathbb{C}}(U)$ komplexifikovaných vnějších mocnin. Tuto konstrukci můžeme aplikovat 'po fíbrech' na kotečnou fibraci n-rozměrné orientované Riemannovy variety M s indukovanou metrikou. Získáme zobrazení $\alpha^i : \wedge^i_{\mathbb{C}}(M) \to \wedge^{n-i}_{\mathbb{C}}(M)$ vnějších mocnin její kotečné fibrace. Jednotlivá zobrazení α^i můžeme složit do endomorfizmu

$$\alpha := \sum_{0\leq i\leq n}\alpha^i : \bigoplus_{0\leq i\leq n}\wedge^i_{\mathbb{C}}(M) \to \bigoplus_{0\leq i\leq n}\wedge^{n-i}_{\mathbb{C}}(M).$$

[9] Stejná poznámka platí i pro Chernův charakter, jež je v podstatě exponenciání funkcí Chernových tříd.

Označme E^+, resp. E^-, vlastní prostor endomorfizmu α s vlastní hodnotou $+1$, resp. -1. Součet $\sum_{0\le i\le n} d^i + d^{i^*}$ operátorů z příkladu 1 zobrazuje řezy $\Gamma(E^+, M)$ fibrace E^+ do řezů $\Gamma(E^-, M)$ fibrace E^-. Restrikce $D_M : \Gamma(E^+, M) \to \Gamma(E^-, M)$ tohoto součtu je eliptický diferenciální operátor.

Předpokládejme, že dimenze n variety M je násobek čtyř, tedy $n = 4k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Její $2k$-tá kohomologická grupa $H^{2k}(M, \mathbb{R})$ pak nese bilineární formu $(-,-)$ zadanou vzorcem

$$(\alpha, \beta) := (\alpha\beta)[M] \quad \text{pro} \quad \alpha, \beta \in H^{2k}(M, \mathbb{R}),$$

kde $[M]$ je fundamentální třída variety M a $\alpha\beta \in H^n(M, \mathbb{R})$ součin kohomologických tříd α a β. Signatura $\sigma(M)$ této formy se nazývá *signaturou variety* M. Ukazuje se, že analytický index operátoru D_M je roven signatuře variety M a jeho topologický index evaluaci $L(M)[M]$ jejího L-*rodu*

$$L(M) = 1 + \frac{p_1}{3} + \frac{7p_2 - p_1^2}{45} + \frac{62p_3 - 13p_1p_2 + 2q_1^3}{315} + \cdots,$$

kde $p_1, p_2, p_3, \ldots \in H^*(M, \mathbb{R})$ jsou Pontrjaginovy třídy variety M. Podle věty o indexu

$$\sigma(M) = L(M)[M].$$

Tato rovnost je známa jako *Hirzebruchova věta o signatuře*, viz [4, kapitola V].

Poděkování. Práce byla podpořena grantem GA ČR P201/12/G028 and RVO: 67985840. Autor dále děkuje doc. RNDr. Jiřímu Vanžurovi, CSc., za cenné připomínky k rukopisu článku.

Literatura

[1] *Atiyah a Singer získali Abelovu cenu za rok 2004.* PMFA *49* (2004), 265–267.

[2] Křížek, M., Markl, M.: *Abelovu cenu za rok 2011 získal John Milnor.* PMFA *56* (2011), 177–186.

[3] Milnor, J., Stasheff, J.: *Characteristic classes.* Ann. of Math. Stud. *76.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974.

[4] Palais, R. S.: *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem.* With contributions by M. F. Atiyah, A. Borel, E. E. Floyd, R. T. Seeley, W. Shih and R. Solovay. Ann. Math. Stud. *57.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.