Irena Sýkorová

Znali staří Indové řetězové zlomky?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 57 (2012), No. 4, 296–306

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/143215

Znali staří Indové řetězové zlomky?

Irena Sýkorová, Praha

1. Úvod

Matematika a zejména algebra byla ve středověké Indii velmi uznávaným vědním oborem a indičtí učenci dosáhli několika zajímavých výsledků, hlavně při řešení některých neurčitých rovnic v oboru celých nebo racionálních čísel. Algebraické metody byly velmi obdivovány a někteří matematici o nich hovořili téměř s náboženskou úctou.

V Indii používali jednoduchou symboliku odvozenou nejčastěji ze zkratek příslušných termínů, např. neznámá se nazývala tolik-kolik (*yāvat-tāvat*) a značila *yā*. Pokud bylo potřeba počítat s více neznámými, termín *yāvat-tāvat* označoval první z nich a pro ostatní se používaly většinou zkratky barev případně písmena abecedy.[1] Hlavní rozdíl mezi aritmetikou a algebrou však nebyl v používání symbolů, ale v tom, že při aritmetických výpočtech byly hodnoty symbolů dané, počítalo se s konkrétními čísly, zatímco v algebraických úlohách byly jejich hodnoty předem neznámé. Proto se někdy aritmetice říkalo věda o počítání se známými (*vyakta-gaṇita*) na rozdíl od algebry – vědy o počítání s neznámými (*avyakta-gaṇita*).

Indičtí matematici popsali některé pozoruhodné metody řešení neurčitých rovnic, ukážeme metodu hledání celočíselného řešení lineární rovnice o dvou neznámých

$$ax + c = by, \qquad a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Indický způsob řešení připomíná metodu využívající řetězové zlomky, pro čísla a a b platí

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots\, q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}} = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n], \tag{2}$$

kde $q_0 \in \mathbb{Z}$, $q_1, q_2, \dots, q_{n-1} \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

[1] Pojmenování neznámých podle barev pochází pravděpodobně z jejich původního značení barevnými kuličkami (*gulikā*) při počítání. Existuje domněnka, že i termín *yāvat-tāvat* původně označoval barvu, mohl snad být odvozen ze slova *yāvakastāvat*, kde *yāvaka* znamená červená, podle [7].

RNDr. Irena Sýkorová, Katedra matematiky, Vysoká škola ekonomická, Ekonomická 957, 148 00 Praha 4, e-mail: sykorova@vse.cz

Zlomek $\frac{a_k}{b_k} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k]$ se nazývá k-tý sblížený zlomek nebo také k-tý konvergent a přitom platí $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$. Libovolné řešení rovnice (1) s kladnými nesoudělnými koeficienty může být vyjádřeno ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
x &= (-1)^n b_{n-1} c + bt, \\
y &= (-1)^n a_{n-1} c + at, \qquad t \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Důkaz je možné nalézt například v [5]. Je vidět, že obecné řešení rovnice (1) je vyjádřeno pomocí čitatele a jmenovatele $(n-1)$-ního sblíženého zlomku $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$.

2. Neurčité lineární rovnice ve staré Indii

Prvním indickým učencem, který se zabýval řešením neurčitých rovnic, byl Āryabhaṭa I (asi 476 až 550). Popsal metodu řešení rovnice

$$ax + c = by, \qquad a,\ b,\ c \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

kde řešení hledal také v oboru přirozených čísel. Jeho následovník Bhāskara I (asi 600 až 680) ukázal, že stejná metoda může být použita i pro řešení rovnice

$$ax - c = by, \qquad a,\ b,\ c \in \mathbb{N},$$

a navíc, že řešení této rovnice vyplývá z řešení rovnice $ax - 1 = by$.

Tyto metody přejali i další autoři, v polovině 10. století Āryabhaṭa II (asi 920 až 1000) ukázal, že v některých případech lze řešení zjednodušit, a upozornil na případy, kdy metody selhávají.

Většina autorů při popisu rovnice ještě zdůraznila, že koeficienty a, b, c musí být nesoudělné, jinak by bylo možné rovnici zkrátit. Proto se v indických pravidlech často předpokládalo, že a, b a c jsou vzájemně různá prvočísla.[2]

Jedním typem úloh, které vedly na neurčitou rovnici prvního stupně, bylo nalézt přirozené číslo n, které po vydělení danými přirozenými čísly a_1, a_2 dává zbytky r_1, r_2. Tedy

$$n = a_1 x + r_1 = a_2 y + r_2,$$

neboli

$$a_2 y - a_1 x = r_1 - r_2, \quad \text{tj.} \quad a_2 y - a_1 x = \pm c.$$

Jiným typem úloh vedoucích na neurčitou rovnici prvního stupně byl problém nalézt takové přirozené číslo x, které vynásobené daným celým číslem a a zvětšené či zmenšené o jiné dané celé číslo c, je dělitelné třetím daným celým číslem b beze zbytku, tedy hledala se přirozená řešení rovnice

$$\frac{ax \pm c}{b} = y.$$

[2] Ve starých textech jsou uvedeny termíny *dṛḍha* – pevná, *niccheda* – nemající dělitele, *nirapavarta* – nerozložitelná, viz [3].

Analýza neurčitých rovnic prvního stupně se nazývala *kuṭṭaka*, *kuṭṭākāra*, *kuṭṭīkāra* nebo krátce *kuṭṭa*. Kořen těchto slov *kuṭṭ* znamená rozdrtit, rozmělnit či rozdrobit, název metody *kuṭṭaka* můžeme tedy přeložit jako rozdrobení. O tom, jak významné místo v indické algebře tato rovnice měla, svědčí i fakt, že termín *kuṭṭaka* či *kuṭṭaka-gaṇita* byl někdy používán pro celou algebru.[3]

V úloze prvního typu se koeficientům a_1, a_2 říkalo dělitelé (*bhāgahāra*, *bhājak*, *cheda*), čísla r_1, r_2 se nazývala zbytky (*agra*, *śeṣa*).

V úlohách druhého typu se konstantě b říkalo dělitel, konstantě c přidané číslo (*kṣepa*, *kṣepaka*) a konstantě a dělenec (*bhājya*). Neznámá x se nazývala násobitel (*guṇaka*, *guṇakāra*) a y podíl (*phala*). Mahāvīra (asi 800 až 870) někdy nazýval neznámou x číslo (*rāśi*) ve smyslu neznámé číslo, viz [12].

3. Rovnice s kladnými koeficienty

Āryabhaṭa I řešil úlohu prvního typu: nalézt číslo n, které po vydělení danými čísly a_1, a_2 dává zbytky r_1, r_2, viz [11]. Hledal řešení rovnice (4). Původní formulace však není příliš srozumitelná (sloky 32–33 ve druhé kapitole práce *Āryabhaṭīya*, viz [1], [8]). Později se řešením rovnice (1) zabývali i další indičtí matematikové, např. Bhāskara I (asi 600 až 680), Brahmagupta (asi 598 až 670), Mahāvīra, Āryabhaṭa II, Śrīpati (1019–1066), Bhāskara II (1114–1185), kteří se věnovali i některým speciálním případům, zejména rovnicím $ax - c = by$ a $ax \pm 1 = by$, podrobnější popis jejich metod je možné nalézt v [3], [10], [12], [6].

Staří Indové při řešení rovnice (4) využívali postup odpovídající Eukleidovu algoritmu pro hledání největšího společného dělitele čísel a a b. Jejich metoda počítala s celými čísly q_k, která byla vypočítána postupným dělením pro $a > b$:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1, \\ b &= r_1 q_1 + r_2, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_n. \end{aligned}$$

Jestliže $b > a$, pak $q_0 = 0$ a $r_1 = a$. Podíly, kterých je $n + 1$, můžeme zapsat ve tvaru $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$ a platí $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$. Ve staré Indii však pro další výpočet uvažovali jen prvních n podílů, tj.

$$\frac{a}{b} \approx \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}]. \tag{5}$$

Uvedeme pravidlo pro řešení rovnice $ax + c = by$ s přirozenými koeficienty a, b, c, které popsal Bhāskara II ve slokách 55–57 druhé kapitoly algebraické práce *Bījagaṇ*ita, viz [2] a [7]:

[3]Brahmagupta je autorem veršované astronomické práce *Brāhma-sphuta-siddhānta*, v níž 18. kapitola věnovaná algebře se jmenuje *Kuṭṭaka*, viz [2].

55-57/BiGa, ii

Děl vzájemně dělence [a] *a dělitele* [b], *které jsou již nesoudělné, dokud není zbytek dělení jednička. Zapiš postupně pod sebou podíly, pod nimi přidané číslo* [c] *a dolů nulu. Vynásob předposlední* [číslo] *číslem přímo nad ním a přičti poslední. Pak vynech poslední a opakuj tento postup, dokud nezůstane pouze dvojice čísel. Jestliže horní z nich vydělíme dělencem, zbytek je podíl. Jestliže dolní vydělíme dělitelem, zbytek je násobitel. Tento postup platí, jestliže počet podílů je sudý. Když je lichý, pak se nalezená čísla* [podíl a násobitel] *musí odečíst od dělence nebo dělitele. Tyto rozdíly budou skutečným podílem* [y] *a násobitelem* [x].

Další Bhāskarovo pravidlo ukazuje, jak je možné z jednoho řešení rovnice $ax+c = by$ nalézt další řešení této rovnice, viz [2]:

64/BiGa, ii

Násobitel [x] *a podíl* [y], *když se přičtou ke svým příslušným dělitelům vynásobeným libovolnými čísly, stanou se jinými* [řešeními].

Je-li tedy x_1 a y_1 řešení rovnice $ax+c = by$, pak další řešení této rovnice se nalezne podle vzorců:

$$x = x_1 + bt, \qquad y = y_1 + at, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Podle uvedené metody pak Bhāskara II řešil několik úloh, například viz [2]:

Příklad 1: *Jsi-li znalý zkoumání takových otázek, řekni mi přesně násobitele, kterým je sto vynásobeno, k tomuto součinu přičteno devadesát a ten součet bude dělitený šedesáti třemi beze zbytku.*

Bhāskara hledal řešení rovnice

$$\frac{100x+90}{63} = y, \qquad \text{resp.} \qquad 100x+90 = 63y. \tag{7}$$

V tomto příkladu byl dělenec $a = 100$, dělitel $b = 63$ a přidané číslo $c = 90$. Postupným dělením (Eukleidovým algoritmem) vypočítal autor sedm čísel, z nichž podle (5) pro další kroky použil jen prvních šest ($n = 6$ je sudé)

$$\frac{a}{b} = \frac{100}{63} = [1; 1, 1, 2, 2, 1, 3], \qquad \frac{a}{b} \approx \frac{a_5}{b_5} = [1; 1, 1, 2, 2, 1]. \tag{8}$$

Čísla získaná postupným dělením Bhāskara II zapsal pod sebe, pod ně připojil přidané číslo ($c = 90 = z_{-1}$), nulu ($0 = z_{-2}$) a postupně je zdola nahrazoval čísly vypočítanými podle vztahu uvedeného v pravidle,

$$z_j = q_{n-1-j} z_{j-1} + z_{j-2} \qquad \text{pro } j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{9}$$

odvození metody je uvedeno v odstavci 5. Jednotlivé kroky jsou uvedeny ve sloupcích tabulky 1. Ve staré Indii bylo zvykem čísla nepotřebná k dalšímu výpočtu mazat, proto na konci výpočtu zbyla pouze dvě.

Nejmenší kladné řešení rovnice získal pomocí zbytků dělení – „horní" číslo $z_5 = 2\,430$ vydělil dělencem 100 a „dolní" číslo $z_4 = 1\,530$ vydělil dělitelem 63:

$$2\,430 : 100 = 24\,(\text{zbytek } 30), \quad 1\,530 : 63 = 24\,(\text{zbytek } 18) \quad \Rightarrow \quad y = 30,\ x = 18.$$

z_5	$q_0 = 1$	1	1	1	1	1	2430
z_4	$q_1 = 1$	1	1	1	1	1530	1530
z_3	$q_2 = 1$	1	1	1	900	900	
z_2	$q_3 = 2$	2	2	630	630		
z_1	$q_4 = 2$	2	270	270			
z_0	$q_5 = 1$	90	90				
z_{-1}	$c = 90$	90					
z_{-2}	0						

Tabulka 1

K tomu autor poznamenal, že další řešení vypočítaná podle vztahu (6), tj.

$$x = 18 + 63t, \qquad y = 30 + 100t, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

jsou například $x = 81$, $y = 130$ nebo $x = 144$, $y = 230$ atd.

Bhāskara II také zdůraznil, že je možné postup hledání nejmenšího přirozeného řešení zjednodušit, pokud čísla a a c nebo b a c mají společného dělitele, protože po zkrácení se dostane rovnice s menšími koeficienty.

(i) Původní rovnice mohla být upravena zkrácením společným dělitelem koeficientů a a c

$$100x + 90 = 63y \quad \Rightarrow \quad 10x + 9 = 63u,$$

což odpovídá substituci $y = 10u$. Tuto rovnici autor vyřešil podle popsané metody a získal řešení $x = 18$ a $u = \frac{y}{10} = 3$, tedy $y = 30$.

(ii) Jiná možná úprava rovnice byla zkrácení společným dělitelem koeficientů b a c

$$100x + 90 = 63y \quad \Rightarrow \quad 100v + 10 = 7y,$$

což odpovídá substituci $x = 9v$. Výpočet byl opět rychlejší než u původní rovnice, řešením jsou $y = 30$ a $v = \frac{x}{9} = 2$, proto $x = 18$.

(iii) Další způsob byl kombinací předchozích dvou, původní rovnice se upravila do tvaru

$$100x + 90 = 63y \quad \Rightarrow \quad 10v + 1 = 7u,$$

kde $x = 9v$ a $y = 10u$. V tomto případě byl výpočet nejrychlejší, nejprve se vypočítalo $u = 3$ a $v = 2$, odtud $y = 10u = 30$ a $x = 9v = 18$.

Pomocí tohoto nejmenšího řešení bylo možné nalézt všechna řešení původní rovnice podle (10). Obecné odvození těchto metod provedl až v 16. století komentátor Kṛṣṇa.

Bhāskara II ve své práci *Līlāvatī* uvedl ještě jeden řešený příklad, kde počet podílů q_k byl lichý, viz [2].

Příklad 2: *Řekni mi, matematiku, násobitele, který když se vynásobí šedesáti a k součinu přičte šestnáct, součet bude dělitený třinácti beze zbytku.*

V tomto příkladu se řešila rovnice

$$\frac{60x+16}{13} = y. \tag{11}$$

Autor nejprve opět postupným dělením vypočítal podíly q_k, $k = 0, 1, \ldots, 5$, z nichž použil jen prvních pět ($n = 5$ je liché)

$$\frac{a}{b} = \frac{60}{13} = [4; 1, 1, 1, 1, 2], \qquad \frac{a}{b} \approx [4; 1, 1, 1, 1].$$

Tato čísla, přidané číslo ($c = 16$) a nulu pak zapsal pod sebe a postupně je nahrazoval

$$\begin{array}{c|cccccc}
z_4 & q_0 = 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 368 \\
z_3 & q_1 = 1 & 1 & 1 & 1 & 80 & 80 \\
z_2 & q_2 = 1 & 1 & 1 & 48 & 48 & \\
z_1 & q_3 = 1 & 1 & 32 & 32 & & \\
z_0 & q_4 = 1 & 16 & 16 & & & \\
z_{-1} & c = 16 & 16 & & & & \\
z_{-2} & 0 & & & & &
\end{array}$$

Po vydělení 368 : 60 a 80 : 13 dostal zbytky 8 a 2 . Protože však v tomto případě n bylo liché, bylo nutné (podle poslední části pravidla) ještě tyto zbytky odečíst od odpovídajících dělitelů, tj. $60 - 8 = 52$ a $13 - 2 = 11$, a proto nejmenší řešení bylo $y = 52$ a $x = 11$, obecné řešení podle (6) je

$$x = 11 + 13t, \qquad y = 52 + 60t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

4. Další typy rovnic

Rovnice s některými zápornými koeficienty. Bhāskara II také studoval rovnici (1) s některými koeficienty zápornými a uvedl pravidlo, podle něhož řešení rovnic (a, b, $c \in \mathbb{N}$)

$$ax - c = by, \quad \text{resp.} \quad -ax + c = by,$$

určil pomocí řešení rovnice $ax + c = by$, viz [2].

Je-li x_1 a y_1 nejmenší řešení rovnice $ax + c = by$ pro kladné konstanty a, b, c, pak

$$x_2 = b - x_1, \qquad y_2 = a - y_1 \tag{12}$$

je řešením rovnice $ax - c = by$. Takto vypočítaná čísla x_2 a y_2 však obecně nemusí být kladná, nejmenší přirozené řešení lze získat podle podle pravidla uvedeného ve sloce 64, tj. podle vzorců (6). Také platí, že

$$x_3 = b - x_1, \qquad y_3 = y_1 - a$$

je řešením rovnice $-ax + c = by$. Přirozené řešení této rovnice nemusí existovat, což autor patrně věděl, protože připojil poznámku, že pro záporné hodnoty koeficientů a

nebo b není možné najít řešení podle pravidla ze sloky 64. V řešených příkladech pak uvedl i záporné hodnoty, např. řešení rovnice $-60x + 3 = 13y$ stanovil $x = 2$, $y = -9$, viz [2].

Rovnice s absolutním členem rovným jedné. Indičtí učenci věnovali speciální pozornost rovnici

$$ax \pm 1 = by, \tag{13}$$

protože tato rovnice se často používala v astronomických výpočtech. Rovnici (13) nazývali *sthira-kuṭṭaka*. Gaṇeśa (16. stol.) vysvětlil, že v astronomických úlohách vedoucích na rovnici (1) jsou fyzikální podmínky často takové, že koeficienty a a b jsou neměnné a v rovnicích se mění pouze absolutní člen c. Pomocí řešení rovnice (13) bylo možné snadno získat řešení několika rovnic, které se odlišovaly jen absolutním členem, a nebylo nutné každou z těchto rovnic řešit zvlášť.

Je-li totiž x_1 a y_1 řešení rovnice $ax \pm 1 = by$, pak $x_2 = cx_1$ a $y_2 = cy_1$ je řešením rovnice $ax \pm c = by$. Nejmenší kladné celočíselné řešení x_0, y_0 se pak získalo jako zbytek dělení $x_2 : b$ a $y_2 : a$, tj.

$$x = x_2 + bt = bp + x_0 + bt = x_0 + b(p + t),$$
$$y = y_2 + at = ap + y_0 + at = y_0 + a(p + t).$$

Soustavy neurčitých rovnic prvního stupně. Mnoho úloh vedlo na soustavu lineárních rovnic, která obsahovala více neznámých než rovnic. Postupným sčítáním či odčítáním rovnic se eliminovaly jednotlivé neznámé, až se dospělo k jediné rovnici se dvěma nebo více neznámými. Pokud zbyly jen dvě neznámé, bylo možné užít metodu *kuṭṭaka*, v případě, že rovnice obsahovala více neznámých, nejprve se zvolila libovolná čísla za všechny z nich kromě dvou, viz [3] a [4].

Na podobné typy soustav vedly i ve středověku oblíbené úlohy o domácích zvířatech a také obecné úlohy o zbytcích, kde úkolem bylo nalézt přirozené číslo x, které postupně dělené čísly $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dává zbytky $r_1, r_2, \ldots, r_m$, tj. hledá se řešení soustavy rovnic s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_m, x$:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + r_1 &= x, \\ a_2x_2 + r_2 &= x, \\ &\vdots \\ a_mx_m + r_m &= x. \end{aligned}$$

Takovou soustavu[4] řešil už Āryabhaṭa I, po něm Bhāskara I, Brahmagupta a další. Řešila se postupně metodou *kuṭṭaka*, nejprve se uvažovaly pouze první dvě rovnice

$$a_1x_1 + r_1 = a_2x_2 + r_2,$$

odkud se vypočítala nejmenší hodnota $x_1 = w_1$ a libovolné $x_1 = w_1 + a_2t_1$, tedy

$$x = a_1x_1 + r_1 = (a_1w_1 + r_1) + a_1a_2t_1.$$

[4]Podobnou úlohou se zabývali i staří Číňané. Pokud jsou čísla $a_1, a_2, \ldots, a_m$ po dvojicích nesoudělná, lze pomocí čínské věty o zbytcích vyjádřit řešení explicitním vzorcem, viz [9].

Pak se k výrazu na pravé straně připojila třetí rovnice (nyní byly neznámé t_1, x_3)

$$a_1 a_2 t_1 + (a_1 w_1 + r_1) = a_3 x_3 + r_3,$$

ze které se opět metodou *kuṭṭaka* určila hodnota $t_1 = w_2 + a_3 t_2$ a dostala se rovnice

$$x = a_1 a_2 a_3 t_2 + (a_1 a_2 w_2 + a_1 w_1 + r_1).$$

Pak se přidala další rovnice a celý postup se opakoval do té doby, než byly všechny rovnice vyčerpány. Nakonec zbyla jen jedna lineární rovnice se dvěma neznámými, jejíž nejmenší kladné celočíselné řešení se nalezlo metodou *kuṭṭaka*.

Bhāskara I takto hledal číslo, které po vydělení čísly 2, 3, 4, 5, 6 vždy dá zbytek 1 a navíc je ještě dělitelné 7. Bhāskarovo řešení 721 však není nejmenším číslem vyhovujícím podmínkám, protože autor nevzal v úvahu, že mezi děliteli jsou dvojice soudělných čísel. Pozdější indičtí matematici nalezli hledané nejmenší číslo 301. Problému se soudělnými děliteli se věnoval Pṛthūdakasvāmī (asi 830 až 890) v komentáři Brahmaguptova díla, který ukázal, že je-li d společným dělitelem čísel a_1, a_2 a rozdíl $r_2 - r_1$ je také dělitelný číslem d, pak se musí vzít

$$x = a_1 w_1 + r_1 = (a_1 w_1 + r_1) + \frac{a_1 a_2}{d} t_1.$$

5. Souvislost s řetězovými zlomky

Abychom více přiblížili souvislost indické metody rozdrobení (*kuṭṭaka*) s řetězovými zlomky, připomeneme stručně některé jejich vlastnosti, všechna odvození a důkazy jsou například v [5].

1. Máme-li řetězový zlomek (2), tj. $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, \ldots, q_n]$, pak čitatele a jmenovatele k-tého sblíženého zlomku $\frac{a_k}{b_k}$ můžeme vypočítat rekurentně:

$$\begin{array}{llll} a_0 = q_0, & a_1 = q_0 q_1 + 1, & a_j = q_j a_{j-1} + a_{j-2} & \text{pro } j = 2, 3, \ldots, k, \\ b_0 = 1, & b_1 = q_1, & b_j = q_j b_{j-1} + b_{j-2} & \text{pro } j = 2, 3, \ldots, k. \end{array} \tag{14}$$

2. Pro zlomek $\frac{a}{b}$ platí

$$\frac{a}{b} = [q_0; q_1, \ldots, q_n] = [q_0; p] = q_0 + \frac{1}{p}, \qquad \text{kde } p = [q_1; q_2, \ldots, q_n]. \tag{15}$$

3. Pro jmenovatele sblížených zlomků platí

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} = [q_k; q_{k-1}, \ldots, q_1] \qquad \text{pro } k = 2, 3, \ldots, n. \tag{16}$$

Protože ve vyjádření obecného řešení (3) rovnice (1) se vyskytují čísla a_{n-1} a b_{n-1}, další úvahy budeme provádět, stejně jako staří Indové, pro zlomek $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$.

Víme, že $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = [q_0; q_1, \ldots, q_{n-1}]$ a podle (16) je

$$\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} = [q_{n-1}; q_{n-2}, \ldots, q_1]\,,$$

což jsou čísla uvedená v prvním sloupci Bhāskarovy tabulky, jsou zapsána odzadu od druhého řádku. Nyní budeme volit $c = 1$, tím mírně zjednodušíme Bhāskarovo pravidlo a do posledních dvou řádků připojíme čísla $z_{-2} = 0$ a $z_{-1} = 1$ (místo c). Když budeme počítat podle indické metody (9), získáme nejprve

$$z_0 = q_{n-1}, \quad z_1 = q_{n-1}q_{n-2} + 1,$$

pak pokračováním podle

$$z_j = q_{n-1-j}z_{j-1} + z_{j-2} \qquad \text{pro} \quad j = 2, 3, \ldots, n-2$$

dostaneme předposlední, tj. „dolní", číslo z_{n-2}. Tento výpočet odpovídá rekurentnímu vzorci pro čitatele v (14), tedy z_{n-2} je čitatelem zlomku $\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$, tj. $z_{n-2} = b_{n-1}$.

Protože je

$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = q_0 + \frac{r_{n-1}}{b_{n-1}},$$

kde r_{n-1} je zbytek po dělení $a_{n-1} : b_{n-1}$, podle (15) pro zlomek $\frac{b_{n-1}}{r_{n-1}}$ platí

$$\frac{b_{n-1}}{r_{n-1}} = [q_1; q_2, \ldots, q_{n-1}].$$

Využijeme-li ještě vztah pro jmenovatele (16) sblížených zlomků, je

$$\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = [q_{n-1}; q_{n-2}, \ldots, q_2].$$

To jsou opět čísla v prvním sloupci Bhāskarovy tabulky zapsána odzadu od třetího řádku a stejnou úvahou jako pro b_{n-1}, ověříme, že $z_{n-3} = r_{n-1}$.

Zbývá vypočítat ještě „horní" číslo, tj. provést poslední krok rekurentního vzorce pro $j = n - 1$:

$$z_{n-1} = q_0 z_{n-2} + z_{n-3} = q_0 b_{n-1} + r_{n-1} = a_{n-1}.$$

Ukázali jsme, že v našem zjednodušeném případě je „horní" číslo $z_{n-1} = a_{n-1}$ a „dolní" číslo $z_{n-2} = b_{n-1}$. Bhāskara II však volil $z_{-1} = c$, proto vypočítal čísla $z_{n-1} = a_{n-1}c$, $z_{n-2} = b_{n-1}c$. Protože hledal nejmenší přirozené řešení dané rovnice, musel ještě stanovit zbytky po dělení $a_{n-1}c : a$, $b_{n-1}c : b$.

Konkrétně pro rovnici $100x + 90 = 63y$ dostaneme podle (8), že $n = 6$, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{100}{63}$, $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{27}{17}$. Obecný tvar řešení (10) rovnice (7) může být vyjádřen ve tvaru (3) volbou $t = s + 24$,

$$\begin{aligned}
x &= 18 + 63t = 18 + 63(24 + s) = 1530 + 63s = (-1)^6 \cdot 17 \cdot 90 + 63s,\\
y &= 30 + 100t = 30 + 100(24 + s) = 2430 + 100s = (-1)^6 \cdot 27 \cdot 90 + 100s.
\end{aligned}$$

Je pravděpodobné, že uvedený postup výpočtu byl založen na následující úvaze. Máme-li rovnici (4), pak platí

$$y = \frac{ax + c}{b} = \left(q_0 + \frac{r_1}{b}\right)x + \frac{c}{b} = q_0 x + \frac{r_1 x + c}{b}.$$

Protože se hledalo celočíselné řešení, muselo být také $u_1 = \frac{r_1 x + c}{b}$ celé číslo a uvažovalo se podobným způsobem, tedy

$$x = \frac{bu_1 - c}{r_1} = q_1 u_1 + \frac{r_2 u_1 - c}{r_1},$$

kde $u_2 = \frac{r_2 u_1 - c}{r_1}$ bylo celé, a takto se pokračovalo dál, až se dospělo ke jmenovateli $r_n = 1$, tj. získal se výraz

$$u_{n-1} = q_n u_n + (-1)^n c, \tag{17}$$

kde se zvolilo nějaké celé číslo u_n (Bhāskara II volil $u_n = 0$) a zpětným dosazováním se pak vypočítaly neznámé x, y.

Pro rovnici (7) jednotlivé kroky odpovídají hodnotám z tabulky 1:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{100x + 90}{63} = x + \frac{37x + 90}{63} & &\Rightarrow & u_1 &= \frac{37x + 90}{63}\,,\\
x &= \frac{63u_1 - 90}{37} = u_1 + \frac{26u_1 - 90}{37} & &\Rightarrow & u_2 &= \frac{26u_1 - 90}{37}\,,\\
u_1 &= \frac{37u_2 + 90}{26} = u_2 + \frac{11u_2 + 90}{26} & &\Rightarrow & u_3 &= \frac{11u_1 + 90}{26}\,,\\
u_2 &= \frac{26u_3 - 90}{11} = 2u_3 + \frac{4u_3 - 90}{11} & &\Rightarrow & u_4 &= \frac{4u_3 - 90}{11}\,,\\
u_3 &= \frac{11u_4 + 90}{4} = 2u_4 + \frac{3u_4 + 90}{4} & &\Rightarrow & u_5 &= \frac{3u_4 + 90}{4}\,,\\
u_4 &= \frac{4u_5 - 90}{3} = u_5 + \frac{u_5 - 90}{3} & &\Rightarrow & u_6 &= \frac{u_5 - 90}{3}\,,\\
u_5 &= 3u_6 + 90\,.
\end{aligned}$$

Když se zvolí $u_6 = 0$ (hodnota z_{-2} Bhāskarovy tabulky), postupně se dopočítají hodnoty $u_5 = 90$ (z_{-1}), $u_4 = 90$ (z_0), $u_3 = 270$ (z_1), $u_2 = 630$ (z_2), $u_1 = 900$ (z_3), $x = 1\,530$ (z_4), $y = 2\,430$ (z_5).

Je možné, že i název metody *kuṭṭaka* – rozdrobení souvisí s tímto postupným dělením, zmenšováním koeficientů.

Ve druhém Bhāskarově příkladě (11) byl však počet podílů lichý ($n = 5$), proto v poslední rovnici podle (17) bylo třeba vzít absolutní člen s opačným znaménkem. To však Bhāskara II neprovedl, proto vypočítané hodnoty $x_1 = 2$ a $y_1 = 8$ byly řešením rovnice $60x - 16 = 13y$ a pro nalezení řešení původní rovnice $60x + 16 = 13y$ bylo třeba ještě tyto hodnoty *odečíst od dělence nebo dělitele*, tj. využít vztah (12).

6. Závěr

Metoda *kuṭṭaka* měla ve středověké indické matematice významné místo nejen pro časté použití v astronomických výpočtech, ale byla využívána v mnoha dalších úlohách. Kromě neurčitých lineárních rovnic staří indičtí učenci studovali i neurčité kvadratické rovnice, vynikajících výsledků dosáhli při řešení Pellovy rovnice, tj. rovnice $ax^2 + 1 = y^2$, kde $a \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}$ a $b \in \mathbb{Z}$, tomuto problému byl věnován článek [13]. Bhāskarova cyklická metoda na řešení Pellovy rovnice předpokládá znalost řešení neurčitých lineárních rovnic metodou *kuṭṭaka*.

Staré indické texty neobsahují žádné důkazy ani odvození popisovaných metod, správnost byla zřejmě ověřena pouze bohatými početními zkušenostmi. Řetězové zlomky v dnešní podobě známy nebyly, postupné „drobení“ koeficientů, tvar obecného řešení i rekurentní výpočet je však připomíná. Výhoda indického výpočtu čísel a_{n-1} a b_{n-1} je v tom, že obě hodnoty byly získány najednou, zatímco jejich stanovení podle vztahů (14) vyžaduje rekurence dvě.

I když staří Indové byli zručnými počtáři, výpočty s velkými čísly jim nedělaly problémy, přesto nezapomínali upozornit na možnosti zkrácení nebo úpravu dané rovnice, která vedla k výsledku rychleji a pohodlněji.

Poděkování. Článek byl podpořen grantem GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky.*

Literatura

[1] Clark, W. E.: *The Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa.* The University of Chicago Press, Chicago, 1930.

[2] Colebrooke, H. T.: *Algebra, with arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* John Murray, London, 1817.

[3] Datta, B., Singh, A. N.: *History of Hindu mathematics. Part I.* Molital Banarsidass, Lahore, 1935.

[4] Dickson, L. E.: *History of the theory of numbers. Vol. II Diophantine analysis.* AMS Chelsea Publishing, 1992.

[5] Chinčin, A. J.: *Řetězové zlomky.* Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

[6] Jha, V. N.: *Indeterminate analysis in the context of the Mahāsiddhānta of Āryabhaṭa II.* Indian J. Hist. Sci. *29* (4) (1994), 565–578.

[7] Juškevič, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku.* Academia, Praha, 1978.

[8] Kak, S. C.: *Computational aspects of the Aryabhata algoritm.* Indian J. Hist. Sci. *21* (1) (1986), 62–71.

[9] Křížek, M., Somer, L., Šolcová, A.: *Kouzlo čísel: od velkých objevů k aplikacím.* Academia, Praha, 2011.

[10] Majumdar, P. K.: *A rationale of Brāskara I's method of solving $ax \pm c = by$.* Indian J. Hist. Sci. *13* (1) (1978), 11–17.

[11] Plofker, K.: *Mathematics in India.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[12] Rangacarya, M.: *Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya with English translation and notes.* Government Press, Madras, 1912.

[13] Sýkorová, I.: *Pellova rovnice v indické matematice.* PMFA *56* (2011), 35–44.