J. Šimon

Opérations dérivées des treillis orthomodulaires (Part 2)

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 23 (1982), No. 1, 29--36

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/142480`

Opérations Dérivées Des Treillis Orthomodulaires (Part 2)

J. ŠIMON
Faculté pédagogique, Ostrava*)

Le 10 avril 1981

L'auteur étudie les propriétés des opérations spéciales, dérivées des opérations du treillis orthomodulaire.

Autor vyšetřuje vlastnosti dvou speciálních operací, odvozených z operací ortomodulárního svazu.

Автор занимается свойствами операций, которые выведены из операций ортомодулярной структуры.

Dans cet article, qui est la continuité de [5], on étudiera les propriétés des opérations spéciales, dérivées des opérations du treillis orthomodulaire $\mathscr{T} = (T, \vee, \wedge, ', 0, 1)$. On définit ces opérations par les formules

(1) $a + b = (a \vee b) \wedge (a' \vee b')$
(2) $a \,.\, b = (a \wedge b) \vee (a' \wedge b')$

pour tous les éléments $a, b \in \mathscr{T}$.

On dit que a commute avec b et on écrit $a\mathscr{C}b$, si et seulement si (a, b) est un couple d'éléments de $\mathscr{T}$ tel que

(3) $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b')$.

Les propriétés de la relation $\mathscr{C}$ sont décrites dans [3]; dans [2] on trouve le théorème de Foulis-Holland: les éléments $a, b, c \in \mathscr{T}$ constituent un triplet distributif, si l'un de ces élements commute avec les deux restants.

En première lieu, nous introduisons quelques propriétés des opérations (1) et (2), qui résultent imédiatement des définitions des opérations citées.

Lemme 1. Soient $a, b \in \mathscr{T}$. Alors

(i) $(a + b)' = a \,.\, b = a' \,.\, b'$, $(a \,.\, b)' = a + b = a' + b'$;
(ii) $a + b' = a' + b$, $a \,.\, b' = a' \,.\, b$;
(iii) $a + b = b + a$, $a \,.\, b = b \,.\, a$;

*) 701 03 Ostrava, Reální 5, Czechoslovakia.

(iv) $a + a' = 1, \ a \,.\, a' = 0$;
(v) $a + b = a \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow a \,.\, b = a'$;
(vi) $a + b = a' \Leftrightarrow b = 1 \Leftrightarrow a \,.\, b = a'$;
(vii) $a + b = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow a \,.\, b = 1$;
(viii) $aCb, aCc \Rightarrow aCb + c, \ aCb, aCc \Rightarrow aCb \,.\, c$;
(ix) $a \leqq b \Rightarrow a + b = a' \wedge b, \ a \leqq b \Rightarrow a \,.\, b = a \vee b'$.

Théorème 2. Pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathscr{T}$, les conditions suivantes sont équivalentes:

(A) $a\mathscr{C}b$;
(B) $(a + b)' = a' + b$;
(C) $(a \,.\, b)' = a' \,.\, b$.

Démonstration.

(A) $\Rightarrow$ (B): Soit $a\mathscr{C}b$, alors aussi $a\mathscr{C}b'$, $b\mathscr{C}a'$ et comme $a\mathscr{C}a'$, $a' \wedge b'Ca$, $a' \wedge b'Cb$, on obtient

$$(a + b)' = (a' \wedge b') \vee (a \wedge b) = ((a' \wedge b') \vee a) \wedge ((a' \wedge b') \vee b) = \\ = (a' \vee b) \wedge (a \vee b') = a' + b\,.$$

(B) $\Rightarrow$ (C): Si $(a + b)' = a' + b$, $(a \,.\, b)' = a + b = ((a + b)')' = (a' + b)' = a' \,.\, b$ d'après (i) du Lemme 1.

(C) $\Rightarrow$ (A): Si $(a \,.\, b)' = a' \,.\, b$, $(a \,.\, b') \,.\, (a' \,.\, b) = 1$ d'après (vii) du Lemme 1. Donc

$$a \wedge ((a \,.\, b)' \,.\, (a' \,.\, b)) = a\,,$$

ce qui donne en égard à (2)

$$a \wedge (((a \vee b) \wedge (a' \vee b') \wedge ((a' \wedge b) \vee (a \wedge b'))) \vee \\ \vee (((a \wedge b) \vee (a' \wedge b')) \wedge (a \vee b') \wedge (a' \vee b))) = a\,.$$

En conséquence,

$$a \wedge ((a' \wedge b) \vee (a \wedge b') \vee (a \wedge b) \vee (a' \wedge b')) = a\,.$$

Si nous transformons la dernière égalité, nous obtenons d'après le théorème de Foulis-Holland

$$(a \wedge ((a' \wedge b) \vee (a \wedge b'))) \vee (a \wedge ((a \wedge b) \vee (a' \wedge b'))) = a\,,$$

car $a\mathscr{C}(a' \wedge b) \vee (a \wedge b')$, $a\mathscr{C}(a \wedge b) \vee (a' \wedge b')$. L'application ultérieur du théorème de Foulis-Holland — $a\mathscr{C}a' \wedge b$, $a\mathscr{C}a \wedge b'$ — donne

$$(a \wedge b') \vee (a \wedge b) = a$$

et $a\mathscr{C}b$ d'après (3).

Théorème 3. Les conditions suivantes sont équivalentes pour tous les éléments $a, b \in \mathscr{T}$:

(A) $a\mathscr{C}b$;
(B) $a + (a + b) = b$;
(C) $a . (a . b) = b$.

Démonstration.

(A) $\Rightarrow$ (B): Si $a\mathscr{C}b$, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} a + (a + b) &= (a \vee (a + b)) \wedge (a' \vee (a + b)') = \\ &= (a \vee ((a \vee b) \wedge (a' \vee b'))) \wedge (a' \vee (a' \wedge b') \vee (a \wedge b)) = \\ &= (a \vee b) \wedge (a' \vee b) = ((a \vee b) \wedge a') \vee ((a \vee b) \wedge b) = \\ &= (b \wedge a') \vee b = b\,, \end{aligned}$$

car $a\mathscr{C}a \vee b$, $a\mathscr{C}a' \vee b'$, $a'\mathscr{C}a' \wedge b'$, $a'\mathscr{C}a \wedge b$, $a'\mathscr{C}a \vee b$, $b\mathscr{C}a \vee b$, $a'\mathscr{C}a$, $a'\mathscr{C}b$.
(B) $\Rightarrow$ (C): Soit $a + (a + b) = b$. De (i) et (ii) du Lemme 1 il découle

$$\begin{aligned} a . (a . b) &= a . (a' . b') = a . (a' + b')' = a' . (a' + b') = \\ &= (a' + (a' + b'))' = (b')' = b\,. \end{aligned}$$

(C) $\Rightarrow$ (A): Comme $a\mathscr{C}a \wedge b$, $a\mathscr{C}a' \wedge b'$, $a'\mathscr{C}a \vee b$, $b\mathscr{C}a \vee b$, il résulte de la supposition $a . (a . b) = b$:

$$\begin{aligned} (a \wedge ((a \wedge b) \vee (a' \wedge b'))) \vee (a' \wedge (a' \vee b') \wedge (a \vee b)) &= b\,, \\ (a \wedge b) \vee (a' \wedge (a \vee b)) &= b\,, \\ b \vee (a \wedge b) \vee (a' \wedge (a \vee b)) &= b\,, \\ b \vee (a' \wedge (a \vee b)) &= b\,, \\ (b \vee a') \wedge (b \vee a) &= b\,, \\ (b' \wedge a') \vee (b' \wedge a) &= b'\,. \end{aligned}$$

La dernière égalité dit que $b'\mathscr{C}a'$; vu les propriétés de la relation $\mathscr{C}$ on a aussi $a\mathscr{C}b$.

Théorème 4. Les éléments $a, b \in \mathscr{T}$ commutent is et seulement s'ils existent respectivement $c \in \mathscr{T}$, $d \in \mathscr{T}$ tels que respectivement $a + c = b$, $a . d = b$.

Démonstration.

Supposons que $a\mathscr{C}b$ pour $a, b \in \mathscr{T}$. Mettons $c = a + b$, $d = a . b$ – alors $a + (a + b) = b = a . (a . b)$ d'après le Théorème 3.

Supposons réciproquement qu'ils existent $c, d \in \mathscr{T}$ pour lesquels $a + c = b$, $a . d = b$. Comme $a\mathscr{C}a \vee c$, $a\mathscr{C}a' \vee c'$, $a\mathscr{C}a \wedge d$, $a\mathscr{C}a' \wedge d'$, on a aussi $a\mathscr{C}(a \vee c) \wedge \wedge (a' \vee c')$, $a\mathscr{C}(a \wedge d) \vee (a' \wedge d')$. Il en découle, par définition des opérations (1) et (2), que $a\mathscr{C}a + c$, $a\mathscr{C}a . d$. Par hypothèse, a commute avec b dans les deux cas.

Corollaire 5. Soient $a, b, c \in \mathscr{T}$ tels que $a\mathscr{C}c$, $b\mathscr{C}c$. Alors

(i) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$,
(ii) $a . c = b . c \Rightarrow a = b$.

Démonstration.

Nous allons montrer que la relation (i) est vérifiée. La démonstration dans le cas (ii) est analogique.

Si $a\mathscr{C}c$, $b\mathscr{C}c$ et $a + c = b + c$, ensuite $c + (c + a) = c + (c + b)$ et d'après le Théorème 3. $a = b$.

Aucune des opérations (1), (2) n'est pas associative. Le théorème suivant donne la condition pour que le triplet (a, b, c) soit associatif.

Théorème 6. Pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de $\mathscr{T}$ tels que $a\mathscr{C}b, a\mathscr{C}c, b\mathscr{C}c$ l'égalité

$$a + (b + c) = (a + b) + c \tag{4}$$

est satisfaite.

Démonstration.

Si les suppositions sont réalisées, une application répétée du théorème de Foulis-Holland donne

$$\begin{aligned}
a + (b + c) &= (a \vee ((b \vee c) \wedge (b' \vee c'))) \wedge (a' \vee (b' \wedge c') \vee (b \wedge c)) = \\
&= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b' \vee c') \wedge (((a' \vee b') \wedge (a' \vee c')) \vee \\
&\quad \vee (b \wedge c)) = \\
&= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b' \vee c') \wedge (((a' \vee b') \vee (b \wedge c) \wedge \\
&\quad \wedge ((a' \vee c') \vee (b \wedge c))) = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b' \vee c') \wedge \\
&\quad \wedge ((a' \vee b' \vee b) \wedge (a' \vee b' \vee c) \wedge (a' \vee c' \vee b) \wedge \\
&\quad \wedge (a' \vee c' \vee c)) = \\
&= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b' \vee c') \wedge (a' \vee b' \vee c) \wedge (a' \vee b \vee c') = \\
&= (a \vee b \vee c) \wedge (a' \vee b' \vee c) \wedge ((a \vee b' \vee c') \wedge (a \vee c' \vee a') \wedge \\
&\quad \wedge (a' \vee b \vee c') \wedge (b \vee b' \vee c') = \\
&= (a \vee b \vee c) \wedge (a' \vee b' \vee c) \wedge \\
&\quad \wedge (((a' \wedge b') \vee a \vee c') \wedge ((a' \wedge b') \vee b \vee c')) = \\
&= (a \vee b \vee c) \wedge (a' \vee b' \vee c) \wedge ((a' \wedge b') \vee \\
&\quad \vee ((a \vee c') \wedge (b \vee c')) = (((a \vee b) \wedge (a' \vee b')) \vee c) \wedge \\
&\quad \wedge ((a' \wedge b') \vee (a \wedge b) \vee c') = (a + b) + c\,.
\end{aligned}$$

Corollaire 7. Pour tout triplet d'éléments de $\mathscr{T}$ tels que $a\mathscr{C}c$, $b\mathscr{C}c$, $a\mathscr{C}b$ l'égalité

$$a\,.\,(b\,.\,c) = (a\,.\,b)\,.\,c$$

est satisfaite.

Il n'y a pas de nécessité à satisfaire respectivement $a\mathscr{C}b$, $a\mathscr{C}c$, $b\mathscr{C}c$, si l'égalité (4) est verifiée pour quelques éléments $a, b, c \in \mathscr{T}$.

Exemple 8. Soit $\mathscr{T}_2$ le treillis orthomodulaire libre ayant deux générateurs x, y. Prenons trois éléments $a, b, c \in \mathscr{T}_2$:

$$\begin{aligned} a &= (x \vee y) \wedge (x' \vee (x \wedge y)), \\ b &= (x' \vee y) \wedge (x \vee y'), \\ c &= (x' \vee y') \wedge (x \vee y') \wedge (y \vee (x' \wedge y') \vee (x \wedge y')). \end{aligned}$$

Nous prouvons par le calcul direct que

$$a + (b + c) = (x \vee y) \wedge (x' \vee y') = (a + b) + c ;$$

néanmoins, a ne commute pas avec c.

Le résultat intéressant est donné par

Théorème 9. Si l'opération respectivement (1), (2) est associative, a commute avec b pour tous les éléments $a, b \in \mathscr{T}$, c'est-à-dire $\mathscr{T}$ est un treillis booléien.

Démonstration.

Nous allons prouver le théorème pour l'opération (1). Supposons d'abord que (1) soit associative. Alors, pour tous les éléments $a, b \in \mathscr{T}$,

$$a + (a + b) = (a + a) + b = 0 + b = b .$$

En effet, $a \mathscr{C} b$ d'après le Théorème 3.

Notons, que le résultat énoncé dans le Théorème 9 est aussi dû à L. Beran (cf. [1]).

Nous ne pouvons pas omettre aucune des conditions $a \mathscr{C} b$, $a \mathscr{C} c$, $b \mathscr{C} c$ du Théorème 6. Montrons-le par

Exemple 10. Soit $\mathscr{T}_2$ le treillis orthomodulaire libre ayant deux générateurs x, y. Ici

$$x \mathscr{C} (x \vee y) \wedge (x' \vee y'), \quad (x \vee y) \wedge (x' \vee y') \mathscr{C} (x' \vee y') \wedge (y \vee (x' \wedge y')),$$

mais x ne commute pas avec $(x' \vee y') \wedge (y \vee (x' \wedge y'))$. En même temps

$$\begin{aligned} x + (((x' \vee y') \wedge (y \vee (x' \wedge y'))) + ((x \vee y) \wedge (x' \vee y'))) &= \\ = x + y' = (x' \vee y) \wedge (x \vee y'), & \\ (x + ((x' \vee y') \wedge (y \vee (x' \wedge y')))) + ((x \vee y) \wedge (x' \vee y')) &= \\ = 1 + ((x \vee y) \wedge (x' \vee y')) = (x \wedge y) \vee (x' \wedge y'). & \end{aligned}$$

Théorème 11. Pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathscr{T}$: $a \mathscr{C} b$ si et seulement si l'égalité

$$(a + b) \wedge a = a \wedge b'$$

est verifiée.

Démonstration.

Soit $a\mathscr{C}b$, alors $(a + b) \wedge a = (a \vee b) \wedge (a' \vee b') \wedge a = a \wedge (a' \vee b') =$ $= a \wedge b'$, car $a\mathscr{C}a'$, $a\mathscr{C}b'$.

Inversement, $(a + b) \wedge a = a \wedge b'$ implique

$$((a + b) \wedge a) \vee (a \wedge b) = (a \wedge b') \vee (a \wedge b)$$

et d'après le théorème de Foulis-Holland, $(a\mathscr{C}a \wedge b,\ a' \vee b'Ca \wedge b)$,

$$(a \vee (a \wedge b)) \wedge ((a \wedge b) \vee (a' \vee b')) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b').$$

La dernière égalité donne $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b')$. Or, $a\mathscr{C}b$ d'après (3). Voici la conséquence du Théorème 11, qui nous obtenons par dualité:

Corollaire 12. Les éléments $a, b \in \mathscr{T}$ commutent is et seulement si

$$(a \,.\, b) \vee a = a \vee b'.$$

Théorème 13. Pour tout couple (a, b) d'éléments du treillis $\mathscr{T}$ les conditions suivantes sont équivalentes:

(A) $a\mathscr{C}b$;
(B) $a \,.\, (a + b) = b'$;
(C) $a + (a \,.\, b) = b'$.

Démonstration.

(A) $\Rightarrow$ (B): Soit $a\mathscr{C}b$. Alors $a \,.\, (a + b) = (a + (a + b))' = b'$ d'après (i) du Lemme 1 et d'après le Théorème 3.

(B) $\Rightarrow$ (C): Si $a \,.\, (a + b) = b'$,

$$a + (a \,.\, b) = ((a \,.\, (a + b)')' = (a' \,.\, (a' + b'))' = ((b')')' = b'$$

d'après (i) et (ii) du Lemme 1.

(C) $\Rightarrow$ (A): Il découle de la supposition $a + (a \,.\, b) = b'$ que $(a \,.\, (a \,.\, b))' = b'$ et aussi $a \,.\, (a \,.\, b) = b$. En effet, $a\mathscr{C}b$ d'après le Théorème 3.

Théorème 14. Pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de $\mathscr{T}$ tels que $a\mathscr{C}c$, $b\mathscr{C}c$, les relations

(5) $$(a + b) \wedge c = (a \wedge c) + (b \wedge c),$$

(6) $$(a \,.\, b) \vee c = (a \vee c) \,.\, (b \vee c)$$

sont satisfaites.

Démonstration.

Puisque nous obtenons (6) de (5) par dualité, il suffit de démontrer (5). Par hypothèse $a\mathscr{C}c$, $b\mathscr{C}c$; il en résulte $a \wedge bCc$, $a \vee b\mathscr{C}c$ et aussi $(a \wedge c)\mathscr{C}(a' \vee b')$,

$(b \wedge c)\mathscr{C}(a' \vee b')$. En appliquant le théorème de Foulis-Holland, nous obtenons par le calcul direct

$$\begin{aligned}(a + b) \wedge c &= (a \vee b) \wedge (a' \vee b') \wedge c = ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \wedge (a' \vee b') = \\ &= ((a \wedge c) \wedge (a' \vee b')) \vee ((b \wedge c) \wedge (a' \vee b')) = \\ &= (a \wedge ((c \wedge a') \vee (c \wedge b')) \vee (b \wedge (c \wedge a') \vee (c \wedge b')) = \\ &= (a \wedge ((c \wedge a') \vee (c \wedge b') \vee (c \wedge c'))) \vee \\ &\quad \vee (b \wedge ((c \wedge a') \vee (c \wedge b') \vee (c \wedge c'))) = \\ &= ((a \wedge c) \wedge (a' \vee b' \vee c')) \vee ((b \wedge c) \wedge (a' \vee b' \vee c')) = \\ &= ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \wedge (a' \vee b' \vee c') = \\ &= ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \wedge ((a' \vee c') \vee (b' \vee c')) = (a \wedge c) + (b \wedge c).\end{aligned}$$

D'autre part, si (5) est satisfaite pour quelques éléments $a, b, c \in \mathscr{T}$, les propositions $a\mathscr{C}c$, $b\mathscr{C}c$ ne sont pas en général vraies.

Exemple 15. Soient

$$\begin{aligned}a &= x\,, \\ b &= (x' \vee y') \wedge (y \vee (x' \wedge y'))\,, \\ c &= x\end{aligned}$$

les éléments du treillis $\mathscr{T}_2$ (voir EX. 8). Alors

$$(a + b) \wedge c = x = (a \wedge c) + (b \wedge c)\,,$$

mais b ne commute pas avec c.

Théorème 16. Soient a, b les éléments de $\mathscr{T}$ tels que $a' \neq b$, $a\mathscr{C}b$. Alors $a + b \neq 1$.

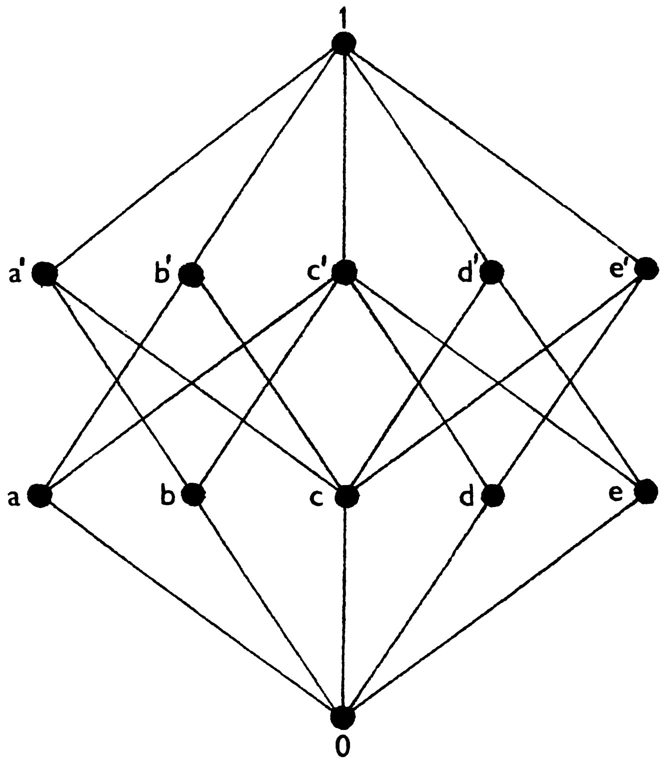
Démonstration.

Supposons que $a\mathscr{C}b$, $a' \neq b$ et $a + b = 1$. On a

$$\begin{aligned}a &= (a \wedge b) \vee (a \wedge b')\,, \\ a' &= (a' \vee b') \wedge (a' \vee b)\,, \\ a' \wedge (a \vee b) &= (a \vee b) \wedge (a' \vee b') \wedge (a' \vee b)\,, \\ a' \wedge b &= (a + b) \wedge (a' \vee b) = 1 \wedge (a' \vee b) = a' \vee b\,.\end{aligned}$$

La dernière égalité montre que $a' = b$ et le théorème est ainsi prouvé par absurde.

Remarque 17. Le Théorème 16 ne peut pas être inversé. Le treillis de la figure ci-dessus est orthomodulaire (voir [4]). Dans ce treillis $(a \wedge e) \vee (a \wedge e') \neq a$, c'est-à-dire a ne commute pas avec e, mais $a + e = (a \vee e) \wedge (a' \vee e') = c' \wedge 1 = c' \neq 1$.



Références

[1] Beran, L.: Some applications of Boolean skew-lattices. Studia Sci. Math. (A paraître).

[2] Birkhoff, G.: Lattice Theory. 3ème éd., New York, Publ. AMS 1967.

[3] Holland, S. S.: Distributivity and perspectivity in orthomodular lattices. Trans. Amer. Soc., *108* (1963), 66—87.

[4] Holland, S. S.: Current interest in orthomodular lattices. Trends in lattice theory. Ed. J. C. Abott, Van Nostrand, Princeton, N.Y. 1969.

[5] Šimon, J.: Opérations dérivées des treillis orthomodulaires (Part 1). Acta Univ. Carolin.-Math. Phys. *22*, No. 2, 7—14.