Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica

Osvald Demuth

О конструктивном интеграле Перрона

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 21 (1980), No. 1, 3--57

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/142445`

1980 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE — MATHEMATICA ET PHYSICA Vol. 21. No. 1. Pag. 3—57

О конструктивном интеграле Перрона

O. DEMUTH

Кафедра математической информатики, математико-физический факультет, Карлов университет, Прага*)

Статья поступила в редакцию 13 марта 1979 г.

Статья посвящена теории интеграла Перрона, построенной в рамках конструктивного направления в математике. В ней вводятся и исследуются два конструктивных аналога интеграла Перрона — $\mathfrak{P}$-интеграл и w$\mathfrak{P}$-интеграл. В отличие от классической математики $\mathfrak{P}$-интеграл является более общим чем узкий интеграл Данжуа. w$\mathfrak{P}$-интеграл является обобщением $\mathfrak{P}$-интеграла. Полученные результаты, касающиеся свойств соответствующих неопределенных интегралов, позволяют сформулировать дескриптивное определение введенных интегралов. Изучаются методы конструкции надфункций и подфункций.

On constructive Perron integral. — The Perron integral is studied from the point of view of the constructive direction in mathematics. There are distinct ways to define an analogy of the Perron integral here. We consider two of them (in a sense, the most natural ones), the so-called $\mathfrak{P}$-integral and w$\mathfrak{P}$-integral. Unlike in classical mathematics, the $\mathfrak{P}$-integral is more general than the Denjoy integral in the restricted sense. The w$\mathfrak{P}$-integral, in turn, is more general than the $\mathfrak{P}$-integral. Characterisations yielding descriptive definitions are given. Methods of major function construction based on partial data are presented.

O konstruktivním Perronově integrálu. — Článek je věnován teorii Perronova integrálu budované v rámci konstruktivní matematiky. Jsou v něm definovány a studovány dvě konstruktivní analogie Perronova integrálu — $\mathfrak{P}$-integrál a w$\mathfrak{P}$-integrál. Na rozdíl od klasické matematiky je $\mathfrak{P}$-integrál obecnější než úzký Denjoyův integrál. w$\mathfrak{P}$-integrál je zobecněním $\mathfrak{P}$-integrálu. Získané výsledky umožňují sformulovat deskriptivní definice zavedených integrálů. Dále jsou v článku zkoumány metody konstrukce nadfunkcí a podfunkcí.

В настоящей статье вводятся и исследуются два конструктивных аналога интеграла Перрона — $\mathfrak{P}$-интеграл и w$\mathfrak{P}$-интеграл. Производится сравнение этих интегралов с $\mathfrak{T}$-интегралом [20] и конструктивными интегралами Данжуа, дескриптивное определение которых содержится в [23] и основано на конструктивных аналогах обобщенно абсолютно непрерывных функций [22].

Оказывается, что $\mathfrak{P}$-интеграл занимает „среднее положение“ между узким интегралом Данжуа ($\mathfrak{D}_*$-интегралом) и $\mathfrak{D}'$-интегралом и не является расшире-

*) 118 00 Praha 1, Malostranské nám. 2/25, Czechoslovakia.

нием интеграла Ньютона. w$\mathfrak{P}$-интеграл является обобщением как $\mathfrak{P}$-интеграла так и (достаточно общего) частного случая интеграла Ньютона.

Соответствующие классические результаты содержатся, например, в монографиях С. Сакса [1] и И. П. Натансона [2].

§ 1. Определения и вспомогательные утверждения

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями, введенными в [5], [6], [20], [22] и [23], понятиями Π_1-чисел (Π_1Ч) и Π_2-чисел (Π_2Ч) из [17] и свойствами $(T_1)^*$ [14] и $(N)^*$ [15].

Буквы S и T служат переменными для слов в алфавите Ξ (см. [5], стр. 21), буквы k, l, m, n, p, q, s и t — переменными для натуральных чисел (НЧ), буквы i и j — переменными для целых чисел (ЦЧ), a, b, c и d — переменными для рациональных чисел (РЧ), для всякого НЧ n – $x^{[n]}$, $y^{[n]}$ и $z^{[n]}$ — с индексами или без них — являются переменными для $[n]$-конструктивных действительных чисел ($[n]$-КДЧ), а $\xi^{[n]}$ и $\eta^{[n]}$ – переменными для $[n]$-псевдочисел ($[n]$-ПЧ). Для всякого НЧ n – $\mathbf{D}^{[n]}$ (соотв. $\mathbf{\Pi}^{[n]}$) обозначает множество всех $[n]$-КДЧ (соотв. $[n]$-ПЧ), а $^*\mathbf{D}^{[n]}$ обозначает расширение $\mathbf{D}^{[n]}$ на $+\infty$ и $-\infty$ (см. [5], стр. 36, и [6], стр. 62).

Мы напомним, что слово P называется арифметическим действительным числом (АДЧ), если $\exists n(P \in \mathbf{D}^{[n]})$.

Согласно лемме 5.5 из [5] существуют всюду определенные [0]-отображения $Pseud$ и $Dupl$ такие, что

$$\forall n x^{[n+1]}(Pseud(x^{[n+1]}) \in \mathbf{\Pi}^{[n]} \mathbin{\&} Pseud(x^{[n+1]}) =$$
$$= x^{[n+1]}) \mathbin{\&} \forall n \xi^{[n]}(Dupl(\xi^{[n]}) \in \mathbf{D}^{[n+1]} \mathbin{\&} Dupl(\xi^{[n]}) = \xi^{[n]}) .$$

Итак, $[n+1]$-КДЧ и $[n]$-ПЧ отличаются только „кодировкой“. Этим обстоятельством мы будем пользоваться в следующем. В частности, мы предполагаем, что предикаты, связанные с $[m]$-дифференцируемостью и псевдодифференцируемостью [6], и понятия „содержится в $S_\sigma^{[m]}$-множестве“ и „почти всюду“ ([5], стр. 58) определены и для $[n]$-псевдочисел.

В большинстве случаев мы будем употреблять [0]-псевдочисла вместо [1]-КДЧ.

Мы будем пользоваться терминологией из [5] и [6]. В этой связи следует напомнить (см. [5], стр. 42), что конструктивные действительные числа (КДЧ) и [0]-КДЧ, псевдочисла (ПЧ) и [0]-ПЧ, функции и [0]-функции и т. д. отличаются только использованным способом „кодирования“, а конструктивные понятия — равномерная непрерывность, абсолютная непрерывность, сходимость и т. д. — эквивалентны соответствующим „[0]-понятиям“. В связи с этим мы будем (в отличие от [17]) говорить о [0]-Π_1-числах ([0]-Π_1Ч) и [0]-Π_2-числах ([0]-Π_2Ч) и посредством $\mathbf{\Pi}_1^{[0]}$ (соотв. $\mathbf{\Pi}_2^{[0]}$) мы обозначим множество всех [0]-Π_1Ч (соотв. [0]-Π_2Ч). Мы будем без дальнейших ссылок пользоваться тем, что согласно [17] выполнено $\forall\xi^{[0]}((\xi^{[0]}\in\mathbf{\Pi}_2^{[0]} \equiv \neg(\xi^{[0]}\in\mathbf{\Pi}_1^{[0]}))\,\&\,(\xi^{[0]}\in \in\mathbf{\Pi}_1^{[0]} \equiv \neg\neg\exists\eta^{[0]}(\eta^{[0]}\in\mathbf{\Pi}_1^{[0]}\,\&\,\xi^{[0]}=\eta^{[0]})))$ и что для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ верно $\xi^{[0]}\in\mathbf{\Pi}_2^{[0]}$.

Мы напомним, что

а) [n]-оператор $\mathscr{F}$ типа $(\mathbf{D}^{[n]}\to\mathbf{D}^{[n]})$ мы называем [n]-функцией, если выполнено $\forall x^{[n]}((x^{[n]}\leqq 0\supset\mathscr{F}(x^{[n]})=\mathscr{F}(0))\,\&\,(1\leqq x^{[n]}\supset\mathscr{F}(x^{[n]})=\mathscr{F}(1)))$;

б) если $\mathscr{F}$ псевдоравномерно непрерывная [0]-функция (в частности, [0]-функция квазислабо ограниченной вариации на $0\triangle 1$ — [6], стр. 63), то $Op[\mathscr{F}]$ [0]-отображение, которое для всякого НЧ n является [0]-оператором типов $(\mathbf{D}^{[n]}\to\mathbf{D}^{[n]})$ и $(\mathbf{\Pi}^{[n]}\to\mathbf{\Pi}^{[n]})$, удовлетворяет условию $\forall x^{[0]}(Op[\mathscr{F}](x^{[0]}) = \mathscr{F}(x^{[0]}))$ ([5], стр. 47) и, следовательно, ввиду теоремы 4.1 из [5] и замечания 1.6 из [6] выполнено

$$\forall n x^{[n]}\mathrm{L}^{[n]}(Op[\mathscr{F}](x^{[n]}),\mathscr{F},x^{[n]});$$

в) для любого АДЧ P посредством h_P обозначается [0]-отображение такое, что для любого АДЧ S выполнено $!h_P(S)\,\&\,h_P(S)=P\,.\max(\min(S,1),0)$;

г) множества ${}^{\Pi}\mathbf{S}^{[n]}$ и ${}^{\Pi}\mathbf{L}_1^{[n]}$ введены в [6] в качестве конструктивных аналогов пространства измеримых по Лебегу функций почти всюду конечных на сегменте $0\triangle 1$ и пространства интегрируемых по Лебегу на $0\triangle 1$ функций и в случае, что $n=0$, отвечают множествам $\mathbf{S}$ и $\mathbf{L}_1$ из [7];

д) понятия и обозначения, связанные с ограниченностью вариации, абсолютной непрерывностью и их обобщениями, введены в [6], стр. 63 и 85, и [22]; в частности, если $\mathscr{F}$ [0]-функция, то

$\alpha(\mathscr{F})$ обозначает: для всякого РЧ a [0]-функция $\mathscr{F}-h_a$ является [0]-функцией [0]-ограниченной вариации на $0\triangle 1$,

$\mathrm{AC}(\mathscr{F})$ обозначает: $\mathscr{F}$ [0]-абсолютно непрерывна на $0\triangle 1$;

е) $Д^{[m]}$ обозначает [m]-почти равномерную [m]-дифференцируемость (см. [6], стр. 69), а $Д^{ap}$ — конструктивный аналог аппроксимативной дифференцируемости почти всюду — введено в [22].

Обозначения. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, v [0]-КДЧ, H и Q [0]-сегменты, $\neg(0\in(\mathrm{Q})^0\vee 1\in(\mathrm{Q})^0)$, $\{L_n\}_{n=1}^{\tau}$ система неперекрывающихся [0]-сегментов такая, что $\neg\exists n(1\leqq n\leqq\tau\,\&\,(0\in(L_n)^0\vee 1\in(L_n)^0))$, а $\{H_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-сегментов. Тогда

1) мы посредством $\overline{\mathscr{H}}(\{H_k\}_k^{[0]})$ обозначим: $\{H_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность неперекрывающихся [0]-сегментов, $|H_k|\xrightarrow[k\to\infty]{[0]}0$ и $\neg\exists k(0\in(H_k)^0\vee 1\in(H_k)^0)$;

2) а) если $\overline{\mathscr{H}}(\{H_k\}_k^{[0]})$, то согласно замечанию 1.3 из [6] $[\mathscr{F}, \{H_k\}_k^{[0]}]$ [0]-функция такая, что

$\forall x^{[0]}(\neg\exists l(x^{[0]} \in (H_l)^0) \supset [\mathscr{F}, \{H_k\}_k^{[0]}](x^{[0]}) = \mathscr{F}(x^{[0]}))$ и для всякого НЧ $l - [\mathscr{F}, \{H_k\}_k^{[0]}]$ линейна на [0]-сегменте H_l;

б) $[\mathscr{F}, \{L_n\}_{n=1}^{\tau}]$ и $[\mathscr{F}, \mathrm{Q}]$ определяются аналогичным способом;

в) $\mathscr{F}^{[\mathrm{H}]}$ [0]-функция такая, что $\forall x^{[0]}(\mathscr{F}^{[\mathrm{H}]}(x^{[0]}) = \mathscr{F}(\max(\min(x^{[0]}, \text{Эп}(\mathrm{H})), \text{Эл}(\mathrm{H}))))$ (см. [5], стр. 41);

г) $\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{H}) \rightleftharpoons (\mathscr{F}(\text{Эп}(\mathrm{H})) - \mathscr{F}(\text{Эл}(\mathrm{H})))$;

3) $\mathrm{BVS}(v, \mathscr{F}, \mathrm{H})$ обозначает: $\neg\exists S(S \in \mathbf{B} \,\&\, W(\mathscr{F}, S, \mathrm{H}) > v)$ (см. [6], стр. 63), т. е. v является верхней границей вариационных сумм [0]-функции $\mathscr{F}$ на [0]-сегменте H;

4) если $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна, то $\langle\omega, \mathscr{F}\rangle$ [0]-отображение такое, что для всякого [0]-сегмента L верно $!\langle\omega, \mathscr{F}\rangle(L) \,\&\, \langle\omega, \mathscr{F}\rangle(L) \in \mathbf{D}^{[0]}$ и $\langle\omega, \mathscr{F}\rangle(L)$ — колебание $\mathscr{F}$ на L;

5) посредством $\bar{D}[\mathscr{F}]$ (соотв. $\underline{D}[\mathscr{F}]$) мы обозначим [4]-оператор типа $(\mathbf{\Pi}^{[0]} \to {}^*\mathbf{D}^{[3]})$ такой, что для всякого [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ выполнено: $\bar{D}[\mathscr{F}](\xi^{[0]})$ (соотв. $\underline{D}[\mathscr{F}](\xi^{[0]})$) является значением верхней (соотв. нижней) псевдопроизводной [0]-функции $\mathscr{F}$ в (точке) $\xi^{[0]}$ (см. [6], стр. 67).

Замечание 1.1. Пусть S_1 и S_2 слова такие, что $\forall i\ (1 \leqq i \leqq 2 \supset \neg\neg\exists n(\mathrm{S}_i \in {}^*\mathbf{D}^{[n]} \vee \mathrm{S}_i \in \mathbf{\Pi}^{[n]}))$, и пусть π один из знаков $=, <, \leqq, \geqq, >$. Тогда согласно [5], стр. 37, и [6], стр. 62, выполнено $\mathrm{S}_1\, \pi\, \mathrm{S}_2 \equiv \neg\neg(\mathrm{S}_1\, \pi\, \mathrm{S}_2)$. Ввиду этого можно отношение $\mathrm{S}_1\, \pi\, \mathrm{S}_2$ доказывать „разбором случаев". Этим обстоятельством мы будем (без дальнейших ссылок) пользоваться в следующем.

Определения. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция.

1) Мы скажем, что $\mathscr{F}$ обладает свойством $\bar{\alpha}$, и будем писать $\bar{\alpha}(\mathscr{F})$, если существуют [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{G}_0$ и [0]-сингулярная [0]-функция $\mathscr{G}_1$ (см. [6], стр. 94) такие, что $\mathscr{F} = \mathscr{G}_0 + \mathscr{G}_1$.

2) Если $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна и $\{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-последовательностей [0]-сегментов, то мы

а) посредством $\bar{\alpha}\mathrm{G}_*(\mathscr{F}, \{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]})$ обозначим: выполнено $\mathscr{Y}(\{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]})$ (см. [22], стр. 474) и для всякого НЧ m верно $\bar{\alpha}([\mathscr{F}, \{H_n^m\}_n^{[0]}])$ и ряд $\sum_n \langle\omega, \mathscr{F}\rangle(H_n^m)$ [0]-сходится;

б) посредством $\mathrm{VwBg}_{\bigcirc}(\mathscr{F}, \{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]})$ обозначим: выполнено $\mathscr{Y}(\{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]})$ и для всякого НЧ $m - [\mathscr{F}, \{H_n^m\}_n^{[0]}]$ [0]-функция [0]-слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ и ряд $\sum_n \langle\omega, \mathscr{F}\rangle(H_n^m)$ псевдосходится.

3) Мы скажем, что $\mathscr{F}$ [0]-функция типа $\bar{\alpha}\mathrm{G}_*$, и будем писать $\bar{\alpha}\mathrm{G}_*(\mathscr{F})$, если $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна и существует [0]-последовательность $S_\sigma^{[0]}$-множеств $\{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ такая, что $\bar{\alpha}\mathrm{G}_*(\mathscr{F}, \{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]})$.

4) Мы скажем, что $\mathscr{F}$ [0]-функция типа $\mathrm{VwBg}_{\bigcirc}$, и будем писать $\mathrm{VwBg}_{\bigcirc}(\mathscr{F})$, если $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна и существует [0]-последовательность [0]-последовательностей [0]-сегментов $\{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ такая, что $\mathrm{VwBg}_{\bigcirc}(\mathscr{F}, \{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]})$.

Замечание 1.2. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция. Тогда

1) ввиду теоремы 6.10 из [3] если $\mathscr{F}$ [0]-функция [0]-органиченной вариации на $0 \triangle 1$, т. е. если выполнено $\exists y^{[0]}\, \mathrm{Var}(y^{[0]}, \mathscr{F}, 0 \triangle 1)$, то $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна;

2) согласно замечанию 1 из [22]

$$\alpha(\mathscr{F}) \equiv (\exists y^{[0]}\, \mathrm{Var}(y^{[0]}, \mathscr{F}, 0 \triangle 1)\,\&\, \text{Д}^{[0]}(\mathscr{F})) \quad \text{и}$$
$$\mathrm{AC}(\mathscr{F}) \equiv (\alpha(\mathscr{F})\,\&\, \mathscr{A}(\mathscr{F})) \equiv (\alpha(\mathscr{F})\,\&\, \mathscr{A}_{kl}(\mathscr{F}))\,;$$

3) а) согласно следствию 2 теоремы 1 из [12] выполнено $\bar{\alpha}(\mathscr{F})$ в том и только том случае, если $\exists y^{[0]}\, \mathrm{Var}\,(y^{[0]}, \mathscr{F}, 0 \triangle 1)$ и существует $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathbf{L}_1^{[0]}$ такое, что $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$;

б) ввиду 2) и а) и теоремы 5 из [22] верно

$$(\mathrm{AC}(\mathscr{F}) \supset \bar{\alpha}(\mathscr{F}))\,\&\,(\bar{\alpha}(\mathscr{F}) \supset \alpha(\mathscr{F}))\,\&\,(\mathrm{AC}(\mathscr{F}) \supset \mathrm{ACG}_*(\mathscr{F}))\,\&$$
$$(\mathrm{ACG}_*(\mathscr{F}) \supset \bar{\alpha}\mathrm{G}_*(\mathscr{F}))\,\&\,(\bar{\alpha}\mathrm{G}_*(\mathscr{F}) \supset \alpha\mathrm{G}_*(\mathscr{F}))\,\&\,(\alpha\mathrm{G}_*(\mathscr{F}) \supset \text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}))$$

(ср. замечание 7 из [12]);

4) если $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F})$, то согласно теореме 2.4 из [6] существует $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{S}^{[0]}$ такое, что $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$ и, следовательно, ввиду теорем 2 и 4 из [20] и леммы 3 из [22] верно $\text{Д}^{ap}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$;

5) если для $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{S}^{[0]}$ верно $\mathrm{AC}(\mathscr{F})\,\&\,\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$, то согласно теореме 2.9 из [6] и следствию теоремы 6 из [7]

а) $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ является интегрируемым по Лебегу (**L**-интегрируемым) на $0 \triangle 1$ [23],

б) $\mathscr{F}$ является неубывающей (соотв. постоянной) [0]-функцией в том и только том случае, если $0 \leqq \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ (соотв. $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} = 0$).

Мы заметим, что для функций типа $\bar{\alpha}\mathrm{G}_*$ верен аналог теоремы 4 из [22]. На основании названной теоремы можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1.1. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция и пусть для T, $\mathrm{T} \doteqdot \mathrm{AC} \vee \mathrm{T} \doteqdot \bar{\alpha} \vee \mathrm{T} \doteqdot \alpha$, верно $\mathrm{TG}_*(\mathscr{F})$. Тогда существуют [0]-последовательность $S_\sigma^{[0]}$-множеств $\{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ и [0]-последовательность НЧ $\{\mathrm{q}_m\}_m^{[0]}$ такие, что $\mathrm{TG}_*(\mathscr{F}, \{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]})$ и для всякого НЧ m выполнено: мера $\{H_n^m\}_n^{[0]}$ меньше чем 2^{-m}, ряд $\sum\limits_n \langle \omega, \mathscr{F} \rangle\, (H_n^m)$ [0]-сходится к [0]-КДЧ меньшему чем 2^{-m}, $\{H_n^m\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность рациональных сегментов и

$$\forall n(\exists p(H_n^{m+1} \subseteq H_p^m)\,\&\,(\mathrm{q}_m < n \supset \exists l(H_l^{m+1} \doteqdot H_n^m)))\,.$$

На основании теоремы 2 и леммы 7 из [16] верно следующее утверждение.

Лемма 1.2. Пусть ψ неубывающая [0]-функция, $\alpha(\psi)$, и $\mathscr{G}$ [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция. Тогда $\alpha(\mathscr{G} * \psi)$.

Замечание 1.3. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция. Тогда

1) если $\mathscr{F}$ обладает свойством (N)*, то согласно теореме 3 из [15] и теореме 11 из [17] $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна и $\forall \xi^{[0]}(\xi^{[0]} \in \Pi_1^{[0]} \supset Op[\mathscr{F}](\xi^{[0]}) \in \in \Pi_1^{[0]})$;

2) если $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция, $Д^{[0]}(\mathscr{F})$, и не может не существовать [0]-последовательность [0]-ПЧ $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ такая, что $\forall \xi^{[0]}(\neg \exists k(\xi^{[0]} = \xi_k) \,\&\, \xi^{[0]} \in \Pi_1^{[0]} \supset Op[\mathscr{F}](\xi^{[0]}) \in \Pi_1^{[0]})$, то ввиду теоремы 9 из [20] $\mathscr{F}$ обладает свойством (N)*, ибо для всякого (регулярного) [0]-покрытия (см. [5], стр. 52) Φ выполнено $\neg\neg\exists \xi^{[0]}(\xi^{[0]} \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg\exists m(\xi^{[0]} \in \Phi_m) \,\&\, \&\, \neg\exists k(\xi^{[0]} = \xi_k))$;

3) если выполнено $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ (см. [22], стр. 472), то $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна, для всякого $S_\sigma^{[0]}$-множества $\{H_n\}_n^{[0]}$ ряд $\sum\limits_n \langle \omega, \mathscr{F} \rangle (H_n)$ [0]-сходится и ввиду замечания 1 из [14] и теоремы 4 из [15] $\mathscr{F}$ обладает свойством (N)*.

Обозначение. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, а $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ. Тогда мы определим

$$\mathscr{N}(\mathscr{F}) \rightleftharpoons \forall \xi^{[0]}(\xi^{[0]} \in \Pi_1^{[0]} \supset \exists \eta^{[0]}(\mathrm{L}_{\ell\ell}(\eta^{[0]}, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \,\&\, \eta^{[0]} \in \Pi_1^{[0]})),$$

$$\mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]}) \rightleftharpoons \forall \xi^{[0]}(\xi^{[0]} \in \Pi_1^{[0]} \,\&\, \neg\exists k(\xi^{[0]} = \xi_k) \supset$$
$$\supset \exists \eta^{[0]}(\mathrm{L}_{\ell\ell}(\eta^{[0]}, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \,\&\, \eta^{[0]} \in \Pi_1^{[0]})).$$

Следует заметить, что 1) для любой псевдоравномерно непрерывной [0]-функции $\mathscr{F}$ верно $\mathscr{N}(\mathscr{F}) \equiv \forall \xi^{[0]}(\xi^{[0]} \in \Pi_1^{[0]} \supset Op[\mathscr{F}](\xi^{[0]}) \in \Pi_1^{[0]})$,

2) ввиду леммы 3 из [23] выполнено $\forall \xi^{[0]} x^{[0]}(\xi^{[0]} \in \Pi_1^{[0]} \supset x^{[0]} \,.\, \xi^{[0]} \in \Pi_1^{[0]})$ и, таким образом, для любых [0]-функции $\mathscr{F}$, [0]-последовательности [0]-ПЧ $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ и [0]-КДЧ v имеет место $(\mathscr{N}(\mathscr{F}) \supset \mathscr{N}(v \,.\, \mathscr{F})) \,\&\, (\mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]}) \supset \supset \mathscr{N}(v \,.\, \mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]}))$.

Ввиду замечаний 1.2 и 1.3 и теоремы 7 из [15] верно следующее утверждение.

Лемма 1.3. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ. Тогда $\mathrm{AC}(\mathscr{F}) \equiv (\alpha(\mathscr{F}) \,\&\, \mathscr{N}(\mathscr{F})) \equiv (\alpha(\mathscr{F}) \,\&\, \mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]})) \equiv (\exists y^{[0]} \mathrm{Var}(y^{[0]}, \mathscr{F}, 0 \triangle 1) \,\&\, Д^{[0]}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathscr{N}(\mathscr{F}))$.

Замечание 1.4. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция. Тогда ввиду теорем 5.4 и 6.4 из [3] существуют неубывающие и, следовательно,

$[0]$-равномерно непрерывные $[0]$-функции ${}^{\langle +\rangle}\mathscr{F}$ и ${}^{\langle -\rangle}\mathscr{F}$ такие, что $\forall x^{[0]}((0 < x^{[0]} \leqq 1 \supset \mathrm{Sup}({}^{\langle +\rangle}\mathscr{F}(x^{[0]}), \wedge y^{[0]}(\neg\neg\exists z^{[0]}(z^{[0]} \in 0 \triangle x^{[0]} \,\&\, \mathscr{F}(z^{[0]}) = y^{[0]})))) \,\&\, (0 \leqq x^{[0]} < 1 \supset \mathrm{Inf}({}^{\langle -\rangle}\mathscr{F}(x^{[0]}), \wedge y^{[0]}(\neg\neg\exists z^{[0]}(z^{[0]} \in x^{[0]} \triangle 1 \,\&\, \mathscr{F}(z^{[0]}) = y^{[0]})))))$.

Исходя от определения $[0]$-абсолютной непрерывности легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1.4. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ $[0]$-функция. Тогда $[0]$-функции ${}^{\langle +\rangle}\mathscr{F}$ и ${}^{\langle -\rangle}\mathscr{F}$ $[0]$-абсолютно непрерывны на $0 \triangle 1$.

Теорема 1.1. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-равномерно непрерывная $[0]$-функция. Тогда верно

1) $\mathscr{N}(\mathscr{F}) \supset \mathscr{N}({}^{\langle +\rangle}\mathscr{F}) \,\&\, \mathscr{N}({}^{\langle -\rangle}\mathscr{F})$,

2) $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}) \supset \text{Д}^{[0]}({}^{\langle +\rangle}\mathscr{F}) \,\&\, \text{Д}^{[0]}({}^{\langle -\rangle}\mathscr{F})$

и, следовательно,

а) $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathscr{N}(\mathscr{F}) \supset \mathrm{AC}({}^{\langle +\rangle}\mathscr{F}) \,\&\, \mathrm{AC}({}^{\langle -\rangle}\mathscr{F})$,

б) $\mathfrak{T}(\mathscr{F}) \supset \mathfrak{T}({}^{\langle +\rangle}\mathscr{F}) \,\&\, \mathfrak{T}({}^{\langle -\rangle}\mathscr{F}) \,\&\, \mathrm{AC}({}^{\langle +\rangle}\mathscr{F}) \,\&\, \mathrm{AC}({}^{\langle -\rangle}\mathscr{F})$.

Доказательство. Теорема является непосредственным следствием лемм 1.3 и 1.4 и теоремы 4 и следствия 1 теоремы 10 из [20].

Пример 1.1. Существует $[0]$-функция $\mathscr{F}$ такая, что

$$\forall x^{[0]} D^{[0]}(\mathscr{F}, x^{[0]}) \,\&\, \forall \xi^{[0]} D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \xi^{[0]}) \,\&\, \mathrm{ACG}_{\bigcirc}(\mathscr{F}) \,\&\, \neg\text{Д}^{[0]}({}^{\langle +\rangle}\mathscr{F})$$

и, следовательно, ввиду [22]

$$\text{Д}^{ak}(\mathscr{F}) \,\&\, \neg\text{Д}^{ak}({}^{\langle +\rangle}\mathscr{F}) \,\&\, \neg\mathrm{WAGG}({}^{\langle +\rangle}\mathscr{F}).$$

На основании теорем 2.2 и 2.4 и замечания 2.3 из [6], замечания 2 из [13] и замечания 1.2 легко доказать следующее утверждение.

Теорема 1.2. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-функция, $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F})$. Тогда существуют $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{S}^{[0]}$, $[0]$-последовательность $S_\sigma^{[0]}$-множеств $\{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$, $[0]$-последовательность $[0]$-равномерно непрерывных $[0]$-функций $\{g_m\}_m^{[0]}$ и $[0]$-последовательность НЧ $\{\mathrm{q}_p\}_p^{[0]}$ такие, что для всякого НЧ m

1) мера $\{H_n^m\}_n^{[0]}$ меньше чем 2^{-m}, $\{H_n^m\}_n^{[0]}$ $[0]$-последовательность дизъюнктных $[0]$-сегментов, содержащихся в $0 \triangle 1$,

$$\text{Эл}(H_0^m) = 0 \,\&\, \text{Эп}(H_1^m) = 1 \,\&\, \forall a(0 < a < 1 \supset \exists n(a \in (H_n^m)^0)) \,\& \tag{1}$$
$$\forall k\, \exists n\, \forall x^{[0]}(x^{[0]} \in H_k^{m+1} \,\&\, 0 < x^{[0]} < 1 \supset x^{[0]} \in (H_n^m)^0);$$

2) для всякого АДЧ P такого, что $0 < P < 1 \,\&\, \neg\exists n(P \in (H_n^m)^0)$, верно $\mathrm{P}^{[0]}(Op[g_m](P), \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}, P) \,\&\, \forall pab(m \leqq p \,\&\, a < P < b \,\&\, b - a < 2^{-q_p} \supset$ $\supset |\Delta(\mathscr{F}, a \bigtriangleup b) - Op[g_m](P) \,.\, (b - a)| \leqq 2^{-p} \,.\, |a \bigtriangleup b|)$ и, следовательно, $D^{[0]}(Op[g_m](P), \mathscr{F}, P)$;

3) $\mathrm{AC}([\mathscr{F}, \{H_n^m\}_n^{[0]}])$ и в случае, что $\mathscr{F}$ $[0]$-равномерно непрерывна, ряд $\sum_n \langle \omega, \mathscr{F} \rangle (H_n^m)$ $[0]$-сходится.

Обозначения. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-функция, $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, а k НЧ. Тогда мы будем писать

1) $\mathrm{der}^{[k]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$, если для почти всех $[k]$-КДЧ $x^{[k]}$ из $0 \bigtriangleup 1$ верно $\exists y^{[k]}(\mathrm{P}^{[k]}(y^{[k]}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}, x^{[k]}) \,\&\, D^{[k]}(y^{[k]}, \mathscr{F}, x^{[k]}))$;

2) $\mathrm{der}^{[k]}(\mathscr{F})$, если существует $\{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$ такое, что $\mathrm{der}^{[k]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]})$.

Замечание 1.5. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-функция, $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, $\{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, а k и t НЧ. Тогда согласно релятивизации теоремы 1.2 и замечанию 2.3 и теоремам 1.9 и 1.10 из [6]

а) $(\text{Д}^{[k]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \supset \mathrm{der}^{[k+t]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})) \,\&\, (\mathrm{der}^{[k+t]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \,\&\, \text{Д}^{[k]}(\mathscr{F}) \supset$ $\supset \text{Д}^{[k]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})) \,\&\, (\mathrm{der}^{[k]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \supset (\mathrm{der}^{[k]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]}) \equiv \{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]} = \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}))$,

б) если $0 < k$ и для почти всех $[k]$-КДЧ $x^{[k]}$ из $0 \bigtriangleup 1$ выполнено $\neg\neg\exists y^{[k]}(\mathrm{P}_{\ell\ell}(y^{[k]}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}, x^{[k]}) \,\&\, D_{\ell\ell}(y^{[k]}, \mathscr{F}, x^{[k]}))$, то верно $\mathrm{der}^{[k]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$;

в) если $\text{Д}^{a\ell}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$ и для почти всех $[0]$-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \bigtriangleup 1$ верно $\neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \,\&\, \overline{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}))$, то $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$;

г) если $\text{Д}^{a\ell}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \,\&\, \neg\neg\exists m\, \mathrm{BVS}(m, \mathscr{F}, 0 \bigtriangleup 1)$, то ввиду в) и упомянутой выше теореме 1.9 из [6] выполнено $\text{Д}^{[1]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \,\&\, \mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$.

Ввиду результатов и доказательств из [21] видно, что верно следующее утверждение.

Теорема 1.3. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-равномерно непрерывная $[0]$-функция, а p НЧ. Тогда существует неубывающая $[0]$-функция $\mathscr{G}$ такая, что $\mathscr{G}(0) = 0 \,\&\, \mathscr{G}(1) <$ $< 2^{-p}$ и для всякого АДЧ P из $0 \bigtriangledown 1$ выполнено $\neg D_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}, P) \supset$ $\supset \neg\neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, P) \,\&\, \overline{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, P) \vee D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, P))$.

Верно следующее усиление теоремы 1.6 из [6].

Теорема 1.4. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-функция. Тогда верно $\text{Д}^{[1]}(\mathscr{F})$ в том и только том случае, если существует НЧ m такое, что $2 \leqq m$ и выполнено одно из следующих условий:

а) $\text{Д}^{[m]}(\mathscr{F})$,

б) для почти всех $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$ (из $0 \bigtriangleup 1$) верно ${}^{*}D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, x^{[m]})$,

в) для почти всех $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$ (из $0 \bigtriangleup 1$) $\mathscr{F}$ конечно псевдодифференцируема в точке $x^{[m]}$.

Доказательство. Легко убедиться в том, что верна соответствующая модификация теоремы 1.3 из [6].

Лемма 1.5. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$ и k НЧ, $2 \leqq k$. Тогда $\mathrm{der}^{[k]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \supset \text{Д}^{[1]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \mathbin{\&} \mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$.

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием теоремы 1.4 и замечания 1.5.

Замечание 1.6. Согласно примеру 1.4 из [6] существует [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{F}$ такая, что

$$\forall x^{[0]} D^{[0]}(\mathscr{F}, x^{[0]}) \mathbin{\&} \forall x^{[1]} D^{[1]}(\mathscr{F}, x^{[1]}) \mathbin{\&} \mathrm{der}^{[0]}(\mathscr{F}) \mathbin{\&} \mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}) \mathbin{\&} \neg \text{Д}^{[1]}(\mathscr{F}).$$

Легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1.6. Пусть k НЧ, $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_1$ [0]-функции, $\{\mathrm{F}_{0,n}\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$ и $\{\mathrm{F}_{1,n}\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, $\{H_n\}_n^{[0]}$ $S_\sigma^{[0]}$-множество, Н [0]-сегмент и v [0]-КДЧ такие, что $\overline{\mathscr{H}}(\{H_n\}_n^{[0]}) \mathbin{\&} \forall i\ (0 \leqq i \leqq 1 \supset \mathrm{der}^{[k]}(\mathscr{F}_i, \{\mathrm{F}_{i,n}\}_n^{[0]}))$. Тогда

1) $\mathrm{der}^{[k]}(v \,.\, \mathscr{F}_0, v \,.\, \{\mathrm{F}_{0,n}\}_n^{[0]}) \mathbin{\&} \mathrm{der}^{[k]}(\mathscr{F}_0 + \mathscr{F}_1, \{\mathrm{F}_{0,n}\}_n^{[0]} + \{\mathrm{F}_{1,n}\}_n^{[0]}) \mathbin{\&} \mathrm{der}^{[k]}([\mathscr{F}_0, \{H_n\}_n^{[0]}]) \mathbin{\&} \mathrm{der}^{[k]}((\mathscr{F}_0)^{[\mathrm{H}]})$,

2) если $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_1$ [0]-измеримые (см. [6], стр. 93) [0]-функции, то $\mathrm{der}^{[k]}(|\mathscr{F}_0|)$, $\mathrm{der}^{[k]}(\mathscr{F}_0 \,.\, \mathscr{F}_1)$ и $(\exists m(|\mathscr{F}_0| \geqq 2^{-m}) \supset \mathrm{der}^{[k]}(1/\mathscr{F}_0))$.

Пример 1.2. Существуют псевдоравномерно непрерывные [0]-функции $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_1$ такие, что

а) $\forall i\ (0 \leqq i \leqq 1 \supset \forall x^{[0]} D^{[0]}(\mathscr{F}_i, x^{[0]}) \mathbin{\&} \forall x^{[1]} D^{[1]}(\mathscr{F}_i, x^{[1]}) \mathbin{\&} \mathrm{der}^{[0]}(\mathscr{F}_i) \mathbin{\&} \mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}_i) \mathbin{\&} \text{Д}^{[1]}(\mathscr{F}_i)) \mathbin{\&} 1 \leqq \mathscr{F}_0$,

б) $\forall j\ (0 \leqq j \leqq 1 \supset \neg \mathrm{der}^{[j]}(h_1 \,.\, \mathscr{F}_0) \mathbin{\&} \neg\, \mathrm{der}^{[j]}(1/\mathscr{F}_0) \mathbin{\&} \neg\, \mathrm{der}^{[j]}(|\mathscr{F}_1|))$ и, следовательно, $\neg \text{Д}^{a\ell}(\mathscr{F}_0) \mathbin{\&} \neg \text{Д}^{a\ell}(\mathscr{F}_1)$.

Пример 1.3. Существуют [0]-равномерно непрерывная [0]-функкиия $\mathscr{F}$ [0]-слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ и [0]-последовательность рациональных сегментов $\{H_n\}_n^{[0]}$ такие, что $\text{Д}^{a\ell}(\mathscr{F}) \mathbin{\&} \forall x^{[0]} D^{[0]}(\mathscr{F}, x^{[0]}) \mathbin{\&} \forall \xi^{[0]} D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \xi^{[0]}) \mathbin{\&} \mathrm{der}^{[0]}(\mathscr{F}) \mathbin{\&} \mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}) \mathbin{\&} \text{Д}^{[1]}(\mathscr{F}) \mathbin{\&} \overline{\mathscr{H}}(\{H_n\}_n^{[0]}) \mathbin{\&} \neg\, \mathrm{der}^{[0]}([\mathscr{F}, \{H_n\}_n^{[0]}]) \mathbin{\&} \neg\, \mathrm{der}^{[1]}([\mathscr{F}, \{H_n\}_n^{[0]}]) \mathbin{\&} \neg \text{Д}^{a\ell}([\mathscr{F}, \{H_n\}_n^{[0]}])$ и, следовательно, $\neg \text{Д}^{[0]}(\mathscr{F})$ (см. теорему 2 из [20]).

Пример 1.4. Существует [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{F}$ [0]-слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ такая, что $\forall x^{[0]} D^{[0]}(\mathscr{F}, x^{[0]}) \mathbin{\&} \forall \xi^{[0]} D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \xi^{[0]}) \mathbin{\&} \mathrm{der}^{[0]}(\mathscr{F}) \mathbin{\&} \mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}) \mathbin{\&} \neg \text{Д}^{a\ell}(\mathscr{F})$.

Ввиду замечания 1 и теоремы 14 из [22], теорем 2.2–2.4 и замечания 2.3 из [6] и теоремы 1.2 верно следующее утверждение.

Лемма 1.7. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-функция, $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{S}^{[0]}$, g возрастающая на $0 \triangle 1$ $[0]$-функция, $g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1 \,\&\, \mathrm{AC}(g) \,\&\, \mathrm{AC}(g^{-1})$. Тогда существует $\{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{S}^{[0]}$ такое, что для всякого НЧ m верно

а) для почти всех $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$ из $0 \triangle 1$ выполнено $\exists y^{[m]} z^{[m]}(\mathrm{P}^{[m]}(y^{[m]}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}, Op[g]\,(x^{[m]})) \,\&\, D^{[0]}(z^{[m]}, g, x^{[m]}) \,\&\, \mathrm{P}^{[m]}(y^{[m]} \,.\, z^{[m]}, \{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]}, x^{[m]}))$,

б) $(\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \equiv \text{Д}^{[0]}(\mathscr{F} * g, \{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]})) \,\&\, (\text{Д}^{a\not{h}}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \equiv \text{Д}^{a\not{h}}(\mathscr{F} * g, \{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]})) \,\&\, (\mathrm{der}^{[m]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \equiv \mathrm{der}^{[m]}(\mathscr{F} * g, \{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]}))$.

Ввиду леммы 5 из [22], теоремы 3 из [18] и леммы 1.6 легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1.8. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-равномерно непрерывная $[0]$-фунция и $\{H_m\}_m^{[0]}$ $S_\sigma^{[0]}$-множество такие, что $\mathscr{H}(\{H_m\}_m^{[0]}) \,\&\, \forall x^{[0]}(|\mathscr{F}(x^{[0]})| > 0 \supset \exists m(x^{[0]} \in (H_m)^0))$ и ряд $\sum\limits_m \langle \omega, \mathscr{F} \rangle (H_m)$ псевдосходится. Тогда $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}) \equiv \forall m\, \mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}^{[H_m]})$.

Лемма 1.9. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-функция квазислабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ и $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{S}^{[0]}$ такие, что $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$. Тогда существуют $[1]$-КДЧ w и $\{\mathrm{G}_n\}_n^{[1]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{L}_1^{[1]}$ такие, что $\mathrm{Var}\,(w, \mathscr{F}, 0 \triangle 1) \,\&\, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} = \{\mathrm{G}_n\}_n^{[1]} \,\&\, \text{Д}^{[1]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \,\&\, \int_0^1 |\{\mathrm{G}_n\}_n^{[1]}| \leqq w$ и, следовательно, $\int_0^1 \overline{\omega}(\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \leqq w$.

Доказательство. Согласно предположению леммы, теоремам 1.9 и 2.4 из [6], замечанию 1.5 и релятивизациям теоремы 2 из [20] и теоремы 6.8 из [3] выполнено $\text{Д}^{[1]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$ и существуют неубывающая $[1]$-функция $\mathscr{G}$ и $\{\mathrm{H}_n\}_n^{[1]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{S}^{[1]}$ такие, что

$$\forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} \leqq 1 \supset \mathrm{Var}\,(\mathscr{G}(x^{[0]}), \mathscr{F}, 0 \triangle x^{[0]})) \,\&\, \text{Д}^{[1]}(\mathscr{G}, \{\mathrm{H}_n\}_n^{[1]}) \tag{2}$$

и, следовательно,

$$|\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}| \leqq \{\mathrm{H}_n\}_n^{[1]}\,. \tag{3}$$

1) Пусть m НЧ. Согласно релятивизациям леммы 1 из [7] и замечания 1.2 и лемме 2.1 и теореме 2.9 из [6] выполнено.

$$\{\lambda_0(\mathrm{F}_{n+m+1}, m)\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{L}_1^{[0]} \,\&\, \{\lambda_0(\mathrm{H}_{n+m+1}, m)\}_n^{[1]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{L}_1^{[1]}$$

и существует $[1]$-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ $[1]$-функция $\mathscr{K}$ такая, что $\text{Д}^{[1]}(\mathscr{K}, \{\lambda_0(\mathrm{H}_{n+m+1}, m)\}_n^{[1]}) \,\&\, \forall a(0 < a \leqq 1 \supset \mathscr{K}(a) = \int_0^a \{\lambda_0(\mathrm{H}_{n+m+1}, m)\}_n^{[1]})$ и, следовательно, $\forall x^{[1]} y^{[1]}(x^{[1]} < y^{[1]} \supset 0 \leqq \Delta(\mathscr{K}, x^{[1]} \triangle y^{[1]}) \leqq m.|x^{[1]} \triangle y^{[1]}|)$. Ввиду этого, (2), (3) и релятивизации теоремы 1.11 из [6] $\mathscr{G} - \mathscr{K}$ неубывающая $[1]$-функция и $\int_0^1 |\{\lambda_0(\mathrm{F}_{n+m+1}, m)\}_n^{[0]}| \leqq \Delta(\mathscr{K}, 0 \triangle 1) \leqq \Delta(\mathscr{G}, 0 \triangle 1)$.

2) Ввиду 1) и замечания 2.5 из [6] существует $\{\mathrm{G}_n\}_n^{[1]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{L}_1^{[1]}$ такое, что $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} = \{\mathrm{G}_n\}_n^{[1]}$, $\int_0^1 |\{\mathrm{G}_n\}_n^{[1]}| \leqq \Delta(\mathscr{G}, 0 \triangle 1)$ и, следовательно, $\text{Д}^{[1]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{G}_n\}_n^{[1]})$ и $\int_0^1 \overline{\omega}(\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) = \int_0^1 \overline{\omega}(\{\mathrm{G}_n\}_n^{[1]}) \leqq \int_0^1 |\{\mathrm{G}_n\}_n^{[1]}| \leqq \Delta(\mathscr{G}, 0 \triangle 1)$ ($\overline{\omega}$ введено в [6], стр. 87).

Теорема 1.5. Пусть $\{\mathscr{F}_m\}_m^{[0]}$ $[0]$-последовательность $[0]$-функций и $\{\{F_{m,n}\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ $[0]$-последовательность элементов множества ${}^{\mathrm{n}}S^{[0]}$, для которых выполнено

$$\forall mk(\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}_m, \{F_{m,n}\}_n^{[0]}) \,\&\, \mathrm{BVS}(2^{-m}, \mathscr{F}_m - \mathscr{F}_{m+k}, 0 \triangle 1)).$$

Тогда существуют $[0]$-функция $\mathscr{F}$ и $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}S^{[0]}$ такие, что $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$ и

$$\forall m(\mathrm{BVS}(2^{-m}, \mathscr{F}_m - \mathscr{F}, 0 \triangle 1) \,\&\, \varrho_S(\{F_{m,n}\}_n^{[0]} \boxplus \{F_n\}_n^{[0]}) \leqq 2^{-m}) \tag{4}$$

и, следовательно, $\{\{F_{m,n}\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ $[0]$-почти равномерно $[0]$-сходится к $\{F_n\}_n^{[0]}$.

Доказательство. Согласно предположению теоремы, леммам 1.6 и 1.9, определению ϱ_S и теореме 2.1 из [6] выполнено

$$\begin{aligned}\forall mk(&\text{Д}^{[1]}(\mathscr{F}_m - \mathscr{F}_{m+k}, \{F_{m,n}\}_n^{[0]} - \{F_{m+k,n}\}_n^{[0]}) \,\&\\ &\&\, \varrho_S(\{F_{m,n}\}_n^{[0]} \boxplus \{F_{m+k,n}\}_n^{[0]}) \leqq 2^{-m})\end{aligned} \tag{5}$$

и существуют $[0]$-функция $\mathscr{F}$ и $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}S^{[0]}$ такие, что (4) и, следовательно, $\{\{F_{m,n}\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ $[0]$-почти равномерно $[0]$-сходится к $\{F_n\}_n^{[0]}$ (теорема 2.5 из [6]).

Ввиду (4) и теорем 1.9 и 2.4 из [6] существует $\{G_n\}_n^{[1]} \in {}^{\mathrm{n}}S^{[1]}$ такое, что

$$\text{Д}^{[1]}(\mathscr{F}_1 - \mathscr{F}, \{G_n\}_n^{[1]}). \tag{6}$$

Мы на основании (4), (5) и релятивизаций замечания 1.5 и леммы 1.9 получаем

$$\forall m(\varrho_S(\{F_{1,n}\}_n^{[0]} - \{F_{m,n}\}_n^{[0]} \boxplus \{G_n\}_n^{[1]}) \leqq 2^{-m})$$

и, следовательно, $\{G_n\}_n^{[1]} = \{F_{1,n}\}_n^{[0]} - \{F_n\}_n^{[0]}$ и ввиду $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}_1, \{F_{1,n}\}_n^{[0]})$, (6), замечания 1.5 и леммы 1.6 верно $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$.

На основании части 4 замечания 1.2, леммы 3 из [22], замечания 1.5, леммы 1.9, теоремы 8 из [23], теоремы 2.5 из [6] и следствия 2 теоремы 4 из [20] мы получаем следующее утверждение.

Теорема 1.6. Пусть $\{\mathscr{F}_m\}_m^{[0]}$ $[0]$-последовательность $[0]$-равномерно непрерывных $[0]$-функций и $\{\{F_{m,n}\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ $[0]$-последовательность элементов множества ${}^{\mathrm{n}}S^{[0]}$ такие, что $\forall mk((\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}_m, \{F_{m,n}\}_n^{[0]}) \vee \text{Д}^{a\text{-}k}(\mathscr{F}_m, \{F_{m,n}\}_n^{[0]})) \,\&$ $\&\, \mathrm{BVS}(2^{-m}, \mathscr{F}_m - \mathscr{F}_{m+k}, 0 \triangle 1))$. Тогда существуют $[0]$-равномерно непрерывная $[0]$-функция $\mathscr{F}$ и $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}S^{[0]}$ такие, что

а) $\text{Д}^{a\text{-}k}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$, (4) и, следовательно, $\{\{F_{m,n}\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ $[0]$-почти равномерно $[0]$-сходится к $\{F_n\}_n^{[0]}$,

б) выполнено $\forall m \text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}_m, \{F_{m,n}\}_n^{[0]}) \supset \text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$.

На основании леммы 1.9 и релятивизации следствия 2 теоремы 1 из [12] можно доказать следующие утверждения.

Теорема 1.7. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция квазислабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$, $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F})$. Тогда существуют [1]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [1]-функция $\mathscr{G}_0$ и [1]-сингулярная [1]-функция $\mathscr{G}_1$ такие, что $\forall x^{[0]}(\mathscr{F}(x^{[0]}) = \mathscr{G}_0(x^{[0]}) + \mathscr{G}_1(x^{[0]}))$.

Теорема 1.8. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция квазислабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ такие, что $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]})$. Тогда $\mathscr{F}$ [1]-абсолютно непрерывна на $0 \triangle 1$ и, следовательно, выполнено $\mathscr{A}_{\ell\ell}(\mathscr{F})$ (см. [22] и теорему 1 из [18]).

Замечание 1.7. Ввиду теоремы 2.9 и леммы 5.5 из [5] для любой [1]-последовательности [0]-ПЧ $\{\xi_k\}_k^{[1]}$ существует [0]-последовательность [0]-ПЧ $\{\eta_k\}_k^{[0]}$ такая, что $\forall k(\eta_k = \xi_k)$.

Замечание 1.8. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\alpha(\mathscr{F})$. Тогда согласно лемме 1 и замечанию 2 из [10], лемме 1 из [11] и следствию 1 теоремы 1 из [12] для всякого [0]-КДЧ y [0]-функция $(\mathscr{F} - h_{\mathrm{y}})$ является [0]-функцией [0]-ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ и существуют неубывающие [0]-функции $V\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle$, $V^+\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle$ и $V^-\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle$, обладающие свойством α, и [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{F}_{\{|\mathrm{y}|\}}$ такие, что

а) $V\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle(0) = V^+\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle(0) = V^-\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle(0) = 0$ и для всякого [0]-сегмента H [0]-КДЧ $\Delta(V\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle, \mathrm{H})$ (соотв. $\Delta(V^+\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle, \mathrm{H})$, соотв. $\Delta(V^-\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle, \mathrm{H})$) является вариацией (соотв. положительной вариацией, соотв. отрицательной вариацией) [0]-функции $(\mathscr{F} - h_{\mathrm{y}})$ на [0]-сегменте H,

б) выполнено $\mathscr{F} = \mathscr{F}(0) + h_{\mathrm{y}} + V^+\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle - V^-\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle \,\&\, V\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle = V^+\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle + V^-\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle \,\&\, \mathscr{F}_{\{|\mathrm{y}|\}} = \mathscr{F} - V^+\langle \mathscr{F}, |\mathrm{y}|\rangle + V^-\langle \mathscr{F}, -|\mathrm{y}|\rangle$,

в) если $\mathrm{AC}(\mathscr{F})$, то согласно теореме 2 из [20] и б) $V\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle$, $V^+\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle$ и $V^-\langle \mathscr{F}, \mathrm{y}\rangle$ [0]-абсолютно непрерывные на $0 \triangle 1$ [0]-функции и $V^+\langle \mathscr{F}, n\rangle(1) \xrightarrow[n\to\infty]{[0]} 0$ и $V^-\langle \mathscr{F}, -n\rangle(1) \xrightarrow[n\to\infty]{[0]} 0$ (лемма 1 из [11]).

На основании леммы 1 из [11] и замечания 1.8 легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1.10. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\alpha(\mathscr{F})$, а z [0]-КДЧ. Тогда выполнено

$$V\langle \mathscr{F}, 0\rangle = V\langle \mathscr{F}_{\{|\mathrm{z}|\}}, 0\rangle + V^+\langle \mathscr{F}, |\mathrm{z}|\rangle + V^-\langle \mathscr{F}, -|\mathrm{z}|\rangle \quad \text{и}$$

$$V\langle \mathscr{F}, \mathrm{z}\rangle = V\langle \mathscr{F}, 0\rangle - V\langle \mathscr{F}_{\{|\mathrm{z}|\}}, 0\rangle + V\langle \mathscr{F}_{\{|\mathrm{z}|\}}, \mathrm{z}\rangle\,.$$

Замечание 1.9. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция [0]-ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ и $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{L}_1^{[0]}$ такие, что

$$\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})\,. \tag{7}$$

Тогда согласно следствию 2 теоремы 1 из [12] и теоремам 1 и 2, лемме 1 и замечанию 4 из [11] существуют неубывающие [0]-сингулярные [0]-функции $\mathscr{F}_{\{+\}}$ и $\mathscr{F}_{\{-\}}$ такие, что

а) $\mathscr{F}_{\{+\}}(0) = \mathscr{F}_{\{-\}}(0) = 0$, $\mathrm{AC}(V^+\langle\mathscr{F}, 0\rangle) \equiv \forall x^{[0]}(\mathscr{F}_{\{+\}}(x^{[0]}) = 0)$,

$$\mathrm{AC}(V^-\langle\mathscr{F}, 0\rangle) \equiv \forall x^{[0]}(\mathscr{F}_{\{-\}}(x^{[0]}) = 0),$$

б) $(\mathscr{F}_{\{+\}} - \mathscr{F}_{\{-\}})$ и $(\mathscr{F}_{\{+\}} + \mathscr{F}_{\{-\}})$ [0]-сингулярные [0]-функции, $\mathrm{AC}(\mathscr{F} - \mathscr{F}_{\{+\}} + \mathscr{F}_{\{-\}})$ и на основании леммы 1.10 имеет место $V\langle\mathscr{F}, 0\rangle = V\langle\mathscr{F} - \mathscr{F}_{\{+\}} + \mathscr{F}_{\{-\}}, 0\rangle + \mathscr{F}_{\{+\}} + \mathscr{F}_{\{-\}}$;

в) ввиду б), (7), следствия теоремы 2 и замечаний 1 и 3 из [12] выполнено $Д^{[0]}(V\langle\mathscr{F}, 0\rangle, |\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}|)$.

Обозначения. Мы дополним обозначения, введенные в [6], § 2.

1) Пусть i_0 НЧ такое, что $\forall m([\![\langle \mathrm{i}_0\rangle^{[0]}]\!]\,(m) \mathrel{\dot{=}} 0\gamma\, 1\delta\, 1)$. (Тогда $\beta \mathrm{i}_0 0 \in \mathrm{L}_1^{[0]}$.) Для любых НЧ p, $\beta kp \in \mathrm{S}^{[p]}$ и $[p]$-КДЧ z мы посредством $\beta kp - \mathrm{z}$ обозначим $\beta kp - \mathrm{z}\,.\,\beta \mathrm{i}_0 0$, а посредством $\{[\![\langle k\rangle^{[p]}]\!]\,(m)\}_m^{[p]} - \mathrm{z}$ представителя $\beta kp - \mathrm{z}$ (см. [6], стр. 86).

2) Пусть a РЧ, $0 \leqq a$, а F рациональный ступенчатый остов ([6], стр. 85–86). Тогда мы определим $\lambda_0(\mathrm{F}, a) \rightleftharpoons (a \cdot_0 \lambda_0(1/a \cdot_0 \mathrm{F}, 1))$, если $0 < a$, а $\lambda_0(\mathrm{F}, a) \rightleftharpoons \lambda_0(\mathrm{F}, 0)$, если $a = 0$.

Легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1.11. Пусть p НЧ, $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[p]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[p]}$, z $[p]$-КДЧ, a РЧ и m НЧ, $0 \leqq a \leqq m$. Тогда

а) если $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[p]} \in {}^{\Pi}\mathrm{L}_1^{[p]}$, то $(\{\mathrm{F}_n\}_n^{[p]} - \mathrm{z}) \in {}^{\Pi}\mathrm{L}_1^{[p]}$;

б) $\{\lambda_0(\mathrm{F}_{n+m+1}, a)\}_n^{[p]} \in {}^{\Pi}\mathrm{L}_1^{[p]}$.

Теорема 1.9. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция [0]-ограниченной вариации на $0 \triangle 1$, а $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$ такое, что $Д^{[0]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$. Тогда выполнено

а) $Д^{[0]}(V\langle\mathscr{F}, 0\rangle, |\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}|)$ и, следовательно, для всякого [0]-КДЧ z:

$$Д^{[0]}(V\langle\mathscr{F}, \mathrm{z}\rangle, |\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} - \mathrm{z}|),$$

$$Д^{[0]}(V^+\langle\mathscr{F}, \mathrm{z}\rangle, (\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} - \mathrm{z})^+),$$

$$Д^{[0]}(V^-\langle\mathscr{F}, \mathrm{z}\rangle, (\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} - \mathrm{z})^-);$$

б) для любых РЧ a и НЧ m, $0 \leqq a \leqq m$,

$$\{\lambda_0(\mathrm{F}_{n+m+1}, a)\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{L}_1^{[0]}\,\&$$

$$\&\,\forall x^{[0]}\left(0 < x^{[0]} \leqq 1 \supset \mathscr{F}_{\{a\}}(x^{[0]}) = \mathscr{F}(0) + \int_0^{x^{[0]}} \{\lambda_0(\mathrm{F}_{n+m+1}, a)\}_n^{[0]}\right). \qquad (8)$$

Доказательство. а) Согласно замечанию 1.5, лемме 1.9, релятивизации замечания 1.9 и теореме 2 из [20] верно $Д^{[1]}(V\langle \mathscr{F}, 0\rangle, |\{F_n\}_n^{[0]}|)$ & $Д^{[0]}(V\langle \mathscr{F}, 0\rangle)$. Но тогда, очевидно, $Д^{[0]}(V\langle \mathscr{F}, 0\rangle, |\{F_n\}_n^{[0]}|)$ (см. теорему 2.4 и замечание 2.3 из [6]).

б) Пусть a РЧ и m НЧ такие, что $0 \leqq a \leqq m$. Тогда согласно а), замечанию 1.8 и лемме 1.11 выполнено

$$Д^{[0]}(\mathscr{F}_{\{a\}}, \{\lambda_0(F_{n+m+1}, a)\}_n^{[0]})\ \&\ AC(\mathscr{F}_{\{a\}})\ \&\ \{\lambda_0(F_{n+m+1}, a)\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}L_1^{[0]}$$

и, следовательно, ввиду леммы 2.1 и теоремы 2.9 из [6] и части 5 замечания 1.2 верно (8).

Теорема 1.10. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция [0]-ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ и $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ такие, что $der^{[1]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$. Тогда $Д^{[0]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$.

Доказательство. Ввиду замечаний 1.2 и 1.5 нам достаточно доказать $\alpha(\mathscr{F})$.

Пусть a РЧ, m НЧ, а v и w [0]-КДЧ такие, что $|a| \leqq m$ & $\mathrm{Var}\,(v, \mathscr{F}, 0 \triangle 1)$ & & $w = (v - \int_0^1 |\{\lambda_0(F_{n+m+1}, |a|)\}_n^{[0]}| + \int_0^1 |\{\lambda_0(F_{n+m+1}, |a|)\}_n^{[0]} - a|)$.

Согласно нашим предположениям, замечанию 1.2 и лемме 1.9 существует [1]-функция $\mathscr{G}$ такая, что $\forall x^{[0]}(\mathscr{G}(x^{[0]}) = \mathscr{F}(x^{[0]}))$ & $Д^{[1]}(\mathscr{G}, \{F_n\}_n^{[0]})$ & $\mathrm{Var}\,(v, \mathscr{G}, 0 \triangle 1)$.

Но тогда ввиду релятивизаций замечаний 1.2 и 1.8, леммы 1.10 и теоремы 1.9 и релятивизации замечания 3 из [12] верно $\mathrm{Var}\,(w, \mathscr{G} - h_a, 0 \triangle 1)$ и, следовательно, $\mathrm{Var}\,(w, \mathscr{F} - h_a, 0 \triangle 1)$.

Следствие. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ. Тогда

$$AC(\mathscr{F}) \equiv (\exists y^{[0]}\,\mathrm{Var}\,(y^{[0]}, \mathscr{F}, 0 \triangle 1)\ \&\ der^{[1]}(\mathscr{F})\ \&\ \mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]}))\,.$$

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием теоремы 1.10, леммы 1.3 и замечания 1.5.

Пример 1.5. Существует неубывающая [0]-функция $\mathscr{F}$ такая, что $\Delta(\mathscr{F}, 0 \triangle 1) = 1$ & $der^{[0]}(\mathscr{F}, \{0\gamma 1\delta 0\}_n^{[0]})$ & $\mathscr{N}(\mathscr{F})$ & $\mathscr{A}_{\ell\ell}(\mathscr{F})$ и, следовательно, ввиду теоремы 1.9 из [6], теоремы 1.10, леммы 1.3 и замечаний 1.2 и 1.5 $Д^{[1]}(\mathscr{F})$ & & $\neg Д^{[0]}(\mathscr{F})$ & $\neg\, der^{[1]}(\mathscr{F})$.

Пример 1.6. Существуют возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{F}$ и [0]-измеримая [0]-функция f такие, что

а) $\forall x^{[0]} D^{[0]}(f(x^{[0]}), \mathscr{F}, x^{[0]})$ & $\forall \xi^{[0]} D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \xi^{[0]})$ & $\mathscr{A}_{\ell\ell}(\mathscr{F})$ и, следовательно, $Д^{[1]}(\mathscr{F})$ & $der^{[0]}(\mathscr{F})$ & $\mathscr{N}(\mathscr{F})$, б) $\mathscr{F}$ не является $[0]$-абсолютно непрерывной на $0 \triangle 1$ и, таким образом, $\neg\, \mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F})$.

Лемма 1.12. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-функция, $\alpha(\mathscr{F})$, а ξ $[0]$-ПЧ. Тогда

$$\neg(Op[V^-\langle\mathscr{F},0\rangle](\xi)\in\Pi_2^{[0]}\ \&\ Op[V^+\langle\mathscr{F},0\rangle](\xi)\in\Pi_2^{[0]})\ \&$$
$$\&\ (\xi\in\Pi_1^{[0]}\ \&\ Op[V^-\langle\mathscr{F},0\rangle](\xi)\in\Pi_2^{[0]}\supset Op[\mathscr{F}](\xi)\in\Pi_2^{[0]}\ \&$$
$$\&\ Op[V\langle\mathscr{F},0\rangle](\xi)\in\Pi_2^{[0]}\ \&\ D_{\ell\ell}(+\infty, V^-\langle\mathscr{F},0\rangle,\xi)\ \&$$
$$\&\ D_{\ell\ell}(+\infty, V\langle\mathscr{F},0\rangle,\xi)\ \&\ D_{\ell\ell}(-\infty,\mathscr{F},\xi)).$$

Доказательство. Существуют возрастающая $[0]$-последовательность НЧ $\{q_m\}_m^{[0]}$ и $[0]$-последовательность систем НЧ $\{\{k_i^m\}_{i=1}^{2^{q_m}}\}_m^{[0]}$ такие, что для всякого НЧ m выполнено $\Delta(V\langle\mathscr{F},0\rangle, 0\triangle 1) - 2^{-m-1} < \sum_{i=1}^{2^{q_m}} |\Delta(\mathscr{F},(i-1)\,.\,2^{-q_m}\triangle i\,.\,2^{-q_m})|\ \&\ \forall i\,(1\leqq i\leqq 2^{q_m}\supset 0\leqq k_i^m\leqq 2\ \&\ (k_i^m=0\supset|\Delta(\mathscr{F},(i-1)\,.\,2^{-q_m}\triangle i\,.\,2^{-q_m})| < 2^{-m-1}\,.\,2^{-q_m})\ \&\ (1\leqq k_i^m\supset 0<(-1)^{k_i^m}.\,\Delta(\mathscr{F},(i-1)\,.\,2^{-q_m}\triangle i\,.\,2^{-q_m})))$ и, следовательно, $\sum_{k_i^m=0}\Delta(V\langle\mathscr{F},0\rangle,(i-1)\,.\,2^{-q_m}\triangle i\,.\,2^{-q_m}) + \sum_{k_i^m=1}\Delta(V^+\langle\mathscr{F},0\rangle,(i-1)\,.\,2^{-q_m}\triangle i\,.\,2^{-q_m}) + \sum_{k_i^m=2}\Delta(V^-\langle\mathscr{F},0\rangle,(i-1)\,.\,2^{-q_m}\triangle i\,.\,2^{-q_m}) < 2^{-m}$.

Пусть ξ $[0]$-ПЧ такое, что $Op[V^-\langle\mathscr{F},0\rangle](\xi)\in\Pi_2^{[0]}$. Тогда ввиду следствия 2 теоремы 5 из [17] имеет место $\neg\neg\exists n\,\forall m(n\leqq m\supset\neg\neg\exists i\,(1\leqq i\leqq 2^{q_m}\ \&\ k_i^m = 1\ \&\ \xi\in(i-1)\,.\,2^{-q_m}\triangle i\,.\,2^{-q_m}))$ и, следовательно, $Op[V^+\langle\mathscr{F},0\rangle](\xi)\in\Pi_1^{[0]}$.

Пусть, дополнительно, $\xi\in\Pi_1^{[0]}$. Тогда ввиду $V\langle\mathscr{F},0\rangle = V^+\langle\mathscr{F},0\rangle + V^-\langle\mathscr{F},0\rangle$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}(0) + V^+\langle\mathscr{F},0\rangle - V^-\langle\mathscr{F},0\rangle$ и леммы 3 из [23] выполнено требуемое.

Следствие. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-функция $[0]$-ограниченной вариации на $0\triangle 1$ и $\{F_n\}_n^{[0]}\in{}^{\Pi}S^{[0]}$ такие, что $\neg\exists\xi^{[0]}D_{\ell\ell}(-\infty,\mathscr{F},\xi^{[0]})\ \&\ Д^{[0]}(\mathscr{F},\{F_n\}_n^{[0]})$. Тогда $\mathrm{AC}(V^-\langle\mathscr{F},0\rangle)$ и, следовательно, элемент $(\{F_n\}_n^{[0]})^-$ является интегрируемым по Лебегу на $0\triangle 1$.

Доказательство. Ввиду леммы 1.12, замечания 1.8, леммы 1.3 и теоремы 1.9 верно $\mathrm{AC}(V^-\langle\mathscr{F},0\rangle)\ \&\ Д^{[0]}(V^-\langle\mathscr{F},0\rangle,(\{F_n\}_n^{[0]})^-)$. Для завершения доказательства достаточно использовать часть 5 замечания 1.2.

Лемма 1.13. Пусть $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ $[0]$-функции, ψ возрастающая на $0\triangle 1$ $[0]$-функция, $\psi(0)=0\ \&\ \psi(1)=1$, $\{H_n\}_n^{[0]}$ $[0]$-последовательность $[0]$-сегментов, $\mathscr{H}(\{H_n\}_n^{[0]})$, z $[0]$-КДЧ, p НЧ, а ξ $[0]$-ПЧ. Тогда

1) $\underline{D}[\mathscr{F}_1](\xi)\geqq z\ \&\ \underline{D}[\mathscr{F}_2](\xi)\geqq z\supset\underline{D}\,[\min(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2)](\xi)\geqq z$;

2) $0 < z \,\&\, (D_{\ell\ell}(+\infty, \psi, \xi) \vee \xi = 0 \,\&\, \underline{D}^{+}_{\ell\ell}(+\infty, \psi, \xi) \vee \xi = 1 \,\&\, \underline{D}^{-}_{\ell\ell}(+\infty, \psi, \xi)) \supset (\underline{D}[\mathscr{F}_1 + z \,.\, \psi](\xi) > -\infty \supset \underline{D}[\mathscr{F}_1 * \psi^{-1}](Op[\psi](\xi)) \geqq -z) \,\&\, (\bar{D}[\mathscr{F}_1 + z \,.\, \psi](\xi) > -\infty \supset \bar{D}[\mathscr{F}_1 * \psi^{-1}](Op[\psi](\xi)) \geqq -z)$;

3) $D_{\ell\ell}(0, \mathscr{F}_1 * \psi^{-1}, Op[\psi](\xi)) \supset \underline{D}[\mathscr{F}_1 + (1/2^p) \,.\, \psi](\xi) \geqq 0 \,\&\, \bar{D}[\mathscr{F}_1 - (1/2^p) \,.\, \psi](\xi) \leqq 0$;

4) $\neg \exists n(\xi \in H_n) \supset \bar{D}[\mathscr{F}_1](\xi) \geqq \bar{D}[[\mathscr{F}_1, \{H_n\}_n^{[0]}]](\xi)$.

Лемма 1.14. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция,

$$\bar{\alpha}G_*(\mathscr{F}) \,\&\, \neg \exists \xi^{[0]} D_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \,. \tag{9}$$

Тогда существуют [0]-функция $\mathscr{G}$, $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ и $\{G_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ такие, что $Д^{[0]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}) \,\&\, ACG_*(\mathscr{G}) \,\&\, Д^{[0]}(\mathscr{G}, \{G_n\}_n^{[0]}) \,\&\, \{F_n\}_n^{[0]} \leqq \{G_n\}_n^{[0]}$.

Доказательство. Мы для $\mathscr{F}$ и $T \doteqdot \bar{\alpha}$ используем лемму 1.1 и построим [0]-последовательность $S_\sigma^{[0]}$-множеств $\{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ и [0]-последовательность НЧ $\{q_m\}_m^{[0]}$, обладающие свойствами, описанными в названной лемме. Согласно замечанию 1.2 существует $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ такое, что $Д^{[0]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$.

Пусть m НЧ. Тогда $\bar{\alpha}([\mathscr{F}, \{H_n^m\}_n^{[0]}])$ и ряд $\sum_n \langle \omega, \mathscr{F} \rangle (H_n^m)$ [0]-сходится и ввиду (9), леммы 1.13 и леммы 1.4 из [6] выполнено $\neg \exists \xi^{[0]} \underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, [\mathscr{F}, \{H_n^m\}_n^{[0]}], \xi^{[0]})$. Согласно замечаниям 1.2 и 1.9 и следствию леммы 1.12 существуют [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{G}_m$ и неубывающая [0]-сингулярная [0]-функция $\mathscr{K}_m$ такие, что $\mathscr{K}_m(0) = 0 \,\&\, [\mathscr{F}, \{H_n^m\}_n^{[0]}] = \mathscr{G}_m + \mathscr{K}_m$ и, следовательно,

$$\forall n x^{[0]}(x^{[0]} \in H_n^m \supset \mathscr{K}_m(x^{[0]}) = \mathscr{K}_m(Эл(H_n^m))) \,\&\, \forall n(\langle \omega, \mathscr{F} \rangle (H_n^m) = \\ = \langle \omega, \mathscr{F} - \mathscr{K}_m \rangle (H_n^m)) \,.$$

Для всякого НЧ m мы построим возрастающую систему РЧ $\{a_i^m\}_{i=0}^{\tau_m}$ и [0]-функцию φ_{m+1} такие, что

$$a_0^m = 0 \,\&\, a_{\tau_m}^m = 1 \,\&\, \forall n(n \leqq q_m \supset \exists ij(0 \leqq i < j \leqq \tau_m \,\&\, Эл(H_n^m) = a_i^m \,\& \\ \& \, Эп(H_n^m) = a_j^m)) \,\&\, \varphi_{m+1} = [\mathscr{K}_{m+1}, \{a_{j-1}^m \triangle a_j^m\}_{j=1}^{\tau_m}] \,\& \\ \& \, |\varphi_{m+1} - \mathscr{K}_{m+1}| < 2^{-m-q_m} \,;$$

мы заметим, что φ_{m+1} является неубывающей [0]-абсолютно непрерывной на $0 \triangle 1$ [0]-функцией.

Существует [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{G}$ такая, что

$$\mathscr{G} = \mathscr{F} - \mathscr{K}_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{q_m} (\varphi_{m+1} - \mathscr{K}_{m+1})^{[H_n{}^m]} \,.$$

Для всякого НЧ p выполнено

$$\mathscr{G} = \mathscr{F} - \mathscr{K}_p + \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{q_m} ((\varphi_{m+1})^{[H_n{}^m]} - \varphi_{m+1}(\text{Эл}(H_n^m))) +$$
$$+ \sum_{m=p}^{\infty} \sum_{n=0}^{q_m} (\varphi_{m+1} - \mathscr{K}_{m+1})^{[H_n{}^m]}$$

и, следовательно,

а) $[\mathscr{G}, \{H_n^p\}_n^{[0]}] = \mathscr{G}_p + [\sum_{m=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{q_m} ((\varphi_{m+1})^{[H_n{}^m]} - \varphi_{m+1}(\text{Эл}(H_n^m))), \{H_l^p\}_l^{[0]}]$ и, таким образом, $\mathrm{AC}([\mathscr{G}, \{H_n^p\}_n^{[0]}])$ и

б) ряд $\sum_n \langle \omega, \mathscr{G} \rangle (H_n^p)$ [0]-сходится.

Итак, верно $\mathrm{ACG}_*(\mathscr{G}, \{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]})$ и согласно теореме 5 из [22] имеет место $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{G})$. Таким образом, существует $\{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{S}^{[0]}$, для которого выполнено $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{G}, \{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]})$. Ввиду свойств [0]-сингулярных [0]-функций (см. [6], стр. 94) и отмеченных выше свойств [0]-функций $\mathscr{G}$ и φ_{m+1}, $0 \leqq m$, ясно, что $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \leqq \{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]}$.

Ввиду теоремы 4.1 из [5], замечания 2 из [13] и теоремы 8 из [23] легко доказать следующие утверждения.

Лемма 1.15. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\{v_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-КДЧ, а p НЧ. Тогда существует неубывающая [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{G}$ такая, что $\mathscr{G}(0) = 0 \,\&\, \mathscr{G}(1) < 2^{-p} \,\&\, \underline{D}^+_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}, 0) \,\&\, \underline{D}^-_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}, 1) \,\&\, \underline{D}^+_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F} + \mathscr{G}, 0) \,\&\, \underline{D}^-_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F} + \mathscr{G}, 1) \,\&\, \forall k(0 < v_k < 1 \supset D^{[0]}(+\infty, \mathscr{G}, v_k) \,\&\, D^{[0]}(+\infty, \mathscr{F} + \mathscr{G}, v_k))$.

Лемма 1.16. Пусть p НЧ и $\{\mathfrak{H}_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность $S_\sigma^{[0]}$-множеств такая, что для всякого НЧ k мера $\mathfrak{H}_k$ меньше чем 2^{-k}. Тогда существует неубывающая [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{G}$ такая, что $\mathscr{G}(0) = 0 \,\&\, \mathscr{G}(1) < 2^{-p} \,\&\, \underline{D}^+_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}, 0) \,\&\, \underline{D}^-_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}, 1) \,\&\, \forall n x^{[n]}(0 < x^{[n]} < 1 \,\&\, \forall k(x^{[n]} \in \mathfrak{H}_k) \supset D^{[n]}(+\infty, \mathscr{G}, x^{[n]}))$.

С помощью леммы 1.15 можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1.17. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция и q НЧ. Тогда существуют [0]-последовательность [0]-сегментов $\{K_n^q\}_n^{[0]}$ и неубывающая [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{G}_q$ такие, что

$$\mathscr{H}(\{K_n^q\}_n^{[0]}) \,\&\, \forall n \xi^{[0]}(\xi^{[0]} \in 0 \triangle 1 \,\&\, \xi^{[0]} \in K_n^q \supset$$
$$\supset \neg\neg\exists ab(a < \xi^{[0]} < b \,\&\, \Delta(\mathscr{F}, a \triangle b) < -q \,.\, |a \triangle b|)) \,\&\, \mathscr{G}_q(0) = 0\,, \quad (10)$$

$[\mathscr{F} + \mathscr{G}_q, \{K_n^q\}_n^{[0]}]$ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция и

$$\forall n x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangle 1 \,\&\, x^{[0]} \in (K_n^q)^0 \supset \mathscr{F}(\text{Эл}(K_n^q)) + \mathscr{G}_q(\text{Эл}(K_n^q)) <$$
$$< \mathscr{F}(x^{[0]}) + \mathscr{G}_q(x^{[0]}) < \mathscr{F}(\text{Эп}(K_n^q)) + \mathscr{G}_q(\text{Эп}(K_n^q)))\,. \quad (11)$$

Пример 1.7. Существуют [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{F}$, $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ и [0]-измеримая [0]-функция f такие, что $\forall x^{[0]} D^{[0]}(f(x^{[0]}), \mathscr{F}, x^{[0]})\&$ $\& \forall \xi^{[0]} D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \xi^{[0]}) \& Д^{a\ell}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}) \& \forall i(0 \leqq i \leqq 1 \supset \mathrm{der}^{[i]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}))$ и вместе с тем $\neg \mathrm{WACG}_{\bigcirc}(\mathscr{F})$. Согласно теореме 16 из [22] выполнено $\mathrm{ACG}(\mathscr{F})$.

На основании леммы 1.17, теоремы 2 из [20] и теоремы 9 из [22] легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1.18. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция такая, что $\neg \exists \xi^{[0]}(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \& \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}))$. Тогда

а) выполнено $\mathrm{VwBg}_{\bigcirc}(\mathscr{F})$,

б) для любой монотонной [0]-функции ψ верно

$$\mathrm{VwBg}_{\bigcirc}(\mathscr{F} + \psi) \& (Д^{[0]}(\mathscr{F} + \psi) \supset \mathrm{W\alpha G}_{\bigcirc}(\mathscr{F} + \psi)),$$

При помощи результатов из [22] и теоремы 2 из [20] можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1.19. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция, $Д^{a\ell}(\mathscr{F})$, а q НЧ. Тогда существуют $S_\sigma^{[0]}$-множество $\{K_n^q\}_n^{[0]}$ и неубывающая [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{G}_q$ такие, что (10), $[\mathscr{F} + \mathscr{G}_q, \{K_n^q\}_n^{[0]}]$ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция и $\alpha([\mathscr{F} + \mathscr{G}_q, \{K_n^q\}_n^{[0]}]) \& \alpha([\mathscr{F}, \{K_n^q\}_n^{[0]}])$.

Теорема 1.11. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ такие, что $(Д^{a\ell}(\mathscr{F}) \& \mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]}) \vee \mathfrak{T}(\mathscr{F}))$, а q НЧ. Тогда существует неубывающая [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{G}$ такая, что $\mathscr{G}(0) = 0 \& \mathscr{G}(1) < 2^{-q-1} \& Д^{[0]}(\mathscr{G}) \& Д^{a\ell}(\mathscr{F} + \mathscr{G}) \&$ $\& \forall \xi^{[0]}(\bar{D}[\mathscr{F} + \mathscr{G}](\xi^{[0]}) > -\infty)$.

Доказательство. Ввиду определения свойства $\mathfrak{T}$ [20] и леммы 3 из [22] имеет место $\mathfrak{T}(\mathscr{F}) \supset Д^{a\ell}(\mathscr{F})$.

Согласно лемме 1.19 существует [0]-последовательность $S_\sigma^{[0]}$-множеств $\{\{K_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ такая, что для всякого НЧ m выполнено

$$\mathscr{H}(\{K_n^m\}_n^{[0]}) \& \forall n \xi^{[0]}(\xi^{[0]} \in 0 \triangle 1 \& \xi^{[0]} \in K_n^m \supset \neg\neg \exists ab(a < \xi^{[0]} < b \&$$

$$\& \Delta(\mathscr{F}, a \triangle b) > m \,.\, |a \triangle b|)) \& \alpha([\mathscr{F}, \{K_n^m\}_n^{[0]}]), \tag{12}$$

ввиду $(\mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]}) \vee \mathfrak{T}(\mathscr{F}))$ верно

$$(\mathscr{N}([\mathscr{F}, \{K_n^m\}_n^{[0]}], \{\xi_k\}_k^{[0]}) \vee \mathfrak{T}([\mathscr{F}, \{K_n^m\}_n^{[0]}]))$$

и, таким образом, $\mathrm{AC}([\mathscr{F}, \{K_n^m\}_n^{[0]}])$ (см. лемму 1.3 и теорему 3 и следствие 1 теоремы 10 из [20]).

Мы построим $[0]$-последовательность НЧ $\{\mathrm{p}_m\}_m^{[0]}$ такую, что для всякого НЧ m верно

$$V^-\langle[\mathscr{F}, \{K_n^m\}_n^{[0]}], -\mathrm{p}_m\rangle < 2^{-q-m-2}$$

(см. замечание 1.8). Существует неубывающая $[0]$-функция $\mathscr{G}$, для которой выполнено

$$\mathscr{G} = \sum_{m=0}^{\infty} V^-\langle[\mathscr{F}, \{K_n^m\}_n^{[0]}], -\mathrm{p}_m\rangle$$

и, следовательно, $\mathscr{G}(0) = 0 \,\&\, \mathscr{G}(1) < 2^{-q-1}$ и ввиду теоремы 8 из [23], замечания 1.8, леммы 1.3 и леммы 3 из [22] верно $\mathrm{AC}(\mathscr{G}) \,\&\, \text{Д}^{[0]}(\mathscr{G}) \,\&\, \text{Д}^{a\ell}(\mathscr{F} + \mathscr{G})$.

Пусть ξ $[0]$-ПЧ.

а) Если $\bar{D}[\mathscr{F}](\xi) > -\infty$, то – очевидно – верно $\bar{D}[\mathscr{F} + \mathscr{G}](\xi) > -\infty$.

б) Пусть $\bar{D}[\mathscr{F}](\xi) = -\infty$. Тогда $\xi \in 0 \triangle 1$ и ввиду того, что для всякого НЧ m верно (12), не может не существовать НЧ k такое, что

$$\neg\exists n(\xi \in K_n^k)\,. \tag{13}$$

Пусть k НЧ, для которого верно (13). Мы обозначим $\varphi \rightleftharpoons [\mathscr{F}, \{K_n^k\}_n^{[0]}]$. Тогда $[V^-\langle\varphi, -\mathrm{p}_k\rangle, \{K_n^k\}_n^{[0]}] = V^-\langle\varphi, -\mathrm{p}_k\rangle$ и согласно лемме 1.4 из [6] и лемме 1.13 выполнено $\bar{D}[\mathscr{F} + \mathscr{G}](\xi) \geqq \bar{D}[\varphi + V^-\langle\varphi, -\mathrm{p}_k\rangle](\xi)$. На основании леммы 1 из [11], леммы 1.4 из [6] и замечания 1.8 имеет место

$$\begin{gathered}\bar{D}[V^-\langle\varphi, 0\rangle - V^-\langle\varphi, -\mathrm{p}_k\rangle](\xi) \leqq \mathrm{p}_k\,,\\ \bar{D}[\varphi + V^-\langle\varphi, -\mathrm{p}_k\rangle](\xi) =\\ \bar{D}[V^+\langle\varphi, 0\rangle - V^-\langle\varphi, 0\rangle + V^-\langle\varphi, -\mathrm{p}_k\rangle](\xi) \geqq\\ -\underline{D}[V^-\langle\varphi, 0\rangle - V^-\langle\varphi, -\mathrm{p}_k\rangle](\xi) \geqq -\mathrm{p}_k\end{gathered}$$

и, таким образом, верно $\bar{D}[\mathscr{F} + \mathscr{G}](\xi) \geqq -\mathrm{p}_k$.

Лемма 1.20. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-равномерно непрерывная $[0]$-функция, φ_0 неубывающая $[0]$-функция и p НЧ. Тогда существует неубывающая $[0]$-функция φ_1 такая, что

$$\begin{gathered}\varphi_1(0) = 0 \,\&\, \varphi_1(1) < 2^{-p} \,\&\, \forall\xi^{[0]}(\underline{D}[\mathscr{F} + \varphi_0](\xi^{[0]}) > -\infty \,\&\\ \&\, \bar{D}[\mathscr{F}](\xi^{[0]}) > -\infty \supset \underline{D}[\mathscr{F} + \varphi_1](\xi^{[0]}) > -\infty)\,.\end{gathered}$$

Доказательство. Мы используем теорему 1.3 и построим неубывающую $[0]$-функцию $\mathscr{G}_0$ такую, что

$$\forall\xi^{[0]}(0 < \xi^{[0]} < 1 \,\&\, \underline{D}[\mathscr{G}_0](\xi^{[0]}) < +\infty \supset D_{\ell\ell}(\varphi_0, \xi^{[0]})) \tag{14}$$

и определим $\mathrm{z} \rightleftharpoons \Delta(\varphi_0 + \mathscr{G}_0 + h_1, 0 \triangle 1)$ и $\psi \rightleftharpoons (1/\mathrm{z})\,.\,(\varphi_0 + \mathscr{G}_0 + h_1 - \varphi_0(0) - \mathscr{G}_0(0))$. Тогда $\psi(0) = 0 \,\&\, \psi(1) = 1$. $[0]$-функция $\mathscr{F} * \psi^{-1}$ является $[0]$-равномерно непрерывной и, следовательно, согласно теореме 1.3 существует неубывающая [0]-функция $\mathscr{G}_1$ такая, что $\mathscr{G}_1(0) = 0 \,\&\, \mathscr{G}_1(1) < 2^{-p-2}$ и

$$\forall \eta^{[0]}(\eta^{[0]} \in 0 \bigtriangledown 1 \,\&\, \underline{D}[\mathscr{G}_1](\eta^{[0]}) < +\infty \supset$$
$$\neg\neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F} * \psi^{-1}, \eta^{[0]}) \,\&\, \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F} * \psi^{-1}, \eta^{[0]}) \vee$$
$$\vee\ D_{\ell\ell}(\mathscr{F} * \psi^{-1}, \eta^{[0]}))) . \tag{15}$$

Ввиду леммы 1.15 осуществима неубывающая [0]-функция $\mathscr{G}_2$ такая, что

$$\mathscr{G}_2(0) = 0 \,\&\, \mathscr{G}_2(1) < 2^{-p-2} \,\&$$
$$\&\, \underline{D}[\mathscr{F} + \mathscr{G}_2](0) > -\infty \,\&\, \underline{D}[\mathscr{F} + \mathscr{G}_2](1) > -\infty .$$

Мы определим

$$\varphi_1 \rightleftharpoons \left(\frac{1}{2^{p+1}} \cdot \psi + \mathscr{G}_1 * \psi + \mathscr{G}_2\right).$$

Пусть ξ [0]-ПЧ такое, что

$$\underline{D}[\mathscr{F} + \varphi_0](\xi) > -\infty \,\&\, \bar{D}[\mathscr{F}](\xi) > -\infty . \tag{16}$$

1) Если $\neg(\xi \in 0 \bigtriangledown 1) \vee \underline{D}[\mathscr{F}](\xi) > -\infty$, то, очевидно,

$$\underline{D}[\mathscr{F} + \varphi_1](\xi) > -\infty . \tag{17}$$

2) Пусть $\xi \in 0 \bigtriangledown 1 \,\&\, \underline{D}[\mathscr{F}](\xi) = -\infty$. Тогда ввиду (16) и (14) выполнено

$$D_{\ell\ell}(+\infty, \psi, \xi) \tag{18}$$

и $\underline{D}[\mathscr{F} + z\,.\,\psi](\xi) > -\infty \,\&\, \forall k(\bar{D}[\mathscr{F} + (1/2^k)\,.\,\psi](\xi) > -\infty)$ и, следовательно, согласно лемме 1.13 верно

$$-z \leqq \underline{D}[\mathscr{F} * \psi^{-1}](Op[\psi](\xi)) \leqq 0 \leqq \bar{D}[\mathscr{F} * \psi^{-1}](Op[\psi](\xi)) . \tag{19}$$

а) Пусть

$$D_{\ell\ell}(\mathscr{F} * \psi^{-1}, Op[\psi](\xi)) . \tag{20}$$

Тогда $D_{\ell\ell}(0, \mathscr{F} * \psi^{-1}, Op[\psi](\xi))$ и, таким образом, ввиду леммы 1.13 выполнено (17).

б) Пусть (20) неверно. Тогда ввиду (19) и (15) имеет место $D_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}_1, Op[\psi](\xi))$ и $D_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F} * \psi^{-1} + \mathscr{G}_1, Op[\psi](\xi))$ и, следовательно, мы опять получаем (17).

Лемма 1.21. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция. Тогда существует [0]-последовательность неубывающих [0]-функций $\{\mathscr{K}_q\}_q^{[0]}$ такая, что

$$(\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}) \supset \forall q \text{Д}^{[0]}(\mathscr{K}_q)) \,\&\, \forall \xi^{[0]}(\underline{D}[\mathscr{F}](\xi^{[0]}) > -\infty \supset$$
$$\supset \neg\neg\exists q(\bar{D}[\mathscr{F} - \mathscr{K}_q](\xi^{[0]}) \leqq 0)) .$$

Доказательство. Согласно лемме 1.17 существуют [0]-последовательность [0]-последовательностей [0]-сегментов $\{\{K^q_n\}^{[0]}_n\}^{[0]}_q$ и [0]-последовательность неубывающих [0]-абсолютно непрерывных на $0 \triangle 1$ [0]-функций $\{\mathscr{G}_q\}^{[0]}_q$ такие, что для всякого НЧ q выполнено (10) и (11) и $[\mathscr{F} + \mathscr{G}_q, \{K^q_n\}^{[0]}_n]$ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция. Следовательно,

$$\forall \xi^{[0]}(\xi^{[0]} \in 0 \triangle 1 \mathbin{\&} \forall q \neg\neg\exists n(\xi^{[0]} \in K^q_n) \supset \underline{D}_{\mathscr{A}\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]})) . \qquad (21)$$

Пусть q НЧ. Мы определим

$$\mathscr{K}_q \rightleftharpoons {}^{\langle + \rangle}(\mathscr{F} + \mathscr{G}_q) + {}^{\langle - \rangle}(\mathscr{F} + \mathscr{G}_q)$$

(см. замечание 1.4). Тогда $\mathscr{K}_q$ неубывающая [0]-функция, $[\mathscr{K}_q, \{K^q_n\}^{[0]}_n] = 2 . [\mathscr{F} + \mathscr{G}_q, \{K^q_n\}^{[0]}_n]$ и согласно теореме 2 из [20], лемме 1.3 и теореме 1.1 выполнено $Д^{[0]}(\mathscr{F}) \supset Д^{[0]}(\mathscr{K}_q)$.

Пусть ξ [0]-ПЧ, $\xi \in 0 \triangle 1 \mathbin{\&} \neg\exists n(\xi \in (K^q_n)^0)$. Тогда $\forall ab(0 \leqq a \leqq \xi \leqq b \leqq 1 \mathbin{\&} a < b \supset \Delta(\mathscr{F}, a \triangle b) \leqq \Delta(\mathscr{K}_q, a \triangle b))$ и, следовательно, $\bar{D}[\mathscr{F} - \mathscr{K}_q](\xi) \leqq 0$.

Итак, ввиду (21) и того, что $\forall \xi^{[0]} q(\neg(\xi^{[0]} \in 0 \triangle 1) \supset D_{\mathscr{A}\ell}(0, \mathscr{F} - \mathscr{K}_q, \xi^{[0]}))$, выполнено требуемое.

Ввиду леммы 1.2 и замечания 1.2 можно аналогичным способом доказать следующее утверждение.

Лемма 1.22. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция и ψ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция, $\psi(0) = 0 \mathbin{\&} \psi(1) = 1$. Тогда существует [0]-последовательность неубывающих [0]-функций $\{\mathscr{K}_q\}^{[0]}_q$ такая, что

$$(Д^{[0]}(\mathscr{F}) \mathbin{\&} Д^{[0]}(\psi) \supset \forall q Д^{[0]}(\mathscr{K}_q)) \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} \forall \xi^{[0]}(\underline{D}[\mathscr{F} * \psi^{-1}](Op[\psi](\xi^{[0]})) > -\infty \supset \neg\neg\exists q(\bar{D}[\mathscr{F} - \mathscr{K}_q](\xi^{[0]}) \leqq 0)) .$$

Замечание 1.10. Пусть φ неубывающая [0]-функция, H [0]-сегмент, $H \subseteq 0 \triangle 1$, а z [0]-КДЧ, $z = \frac{1}{2} . (Эл(H) + Эп(H))$. Тогда ввиду [0]-равномерной непрерывности [0]-функции φ (замечание 1.2) и леммы 2 из [14] можно построить неубывающие [0]-абсолютно непрерывные на $0 \triangle 1$ [0]-функции ψ_1 и ψ_2 такие, что

$$0 \leqq \psi_1 \leqq \Delta(\varphi, H) \mathbin{\&} 0 \leqq \psi_2 \leqq \Delta(\varphi, H) \mathbin{\&} \psi_1(Эл(H)) = 0 \mathbin{\&} \psi_1(z) =$$

$$= \Delta(\varphi, H) \mathbin{\&} \psi_2(z) = 0 \mathbin{\&} \psi_2(Эп(H)) = \Delta(\varphi, H) \mathbin{\&} \forall x^{[0]}(x^{[0]} \in H \supset$$

$$\supset \varphi(x^{[0]}) - \varphi(Эл(H)) \leqq \psi_1(x^{[0]}) - \psi_1(Эл(H)) \mathbin{\&} \varphi(Эп(H)) - \varphi(x^{[0]}) \leqq$$

$$\leqq \psi_2(Эп(H)) - \psi_2(x^{[0]})) .$$

Лемма 1.23. Пусть φ неубывающая [0]-функция, а $\{\{L^m_n\}^{\tau_m}_{n=1}\}^{[0]}_m$ [0]-последовательность систем дизъюнктных [0]-сегментов, содержащихся в $0 \triangle 1$, такая, что

$$\forall mk(0 \leqq \tau_m \,\&\, (1 \leqq k \leqq \tau_{m+1} \supset \exists n(1 \leqq n \leqq \tau_m \,\&$$

$$\& \, L_k^{m+1} \subseteq (L_n^m)^0))) \,\&\, ((\sum_{n=1}^{\tau_m} |L_n^m|) \xrightarrow[m \to \infty]{[0]} 0) \,. \tag{22}$$

Тогда существует неубывающая [0]-функция $\mathscr{G}$, для которой выполнено

$$\mathscr{G}(0) = 0 \,\&\, \mathscr{G}(1) = 2 \,.\, \Delta(\varphi, 0 \triangle 1) \,\&\, \text{Д}^{[0]}(\mathscr{G}) \,\&$$

$$\& \, \forall \xi^{[0]} ab(\forall m \neg\neg \exists n(1 \leqq n \leqq \tau_m \,\&\, \xi^{[0]} \in L_n^m) \,\&\, a \leqq \xi^{[0]} \leqq b \,\&\, a < b \supset$$

$$\supset \Delta(\varphi, a \triangle b) \leqq \Delta(\mathscr{G}, a \triangle b)) \,.$$

Доказательство. Мы можем без ограничения общности предположить, что $\tau_0 = 1 \,\&\, L_1^0 \doteqdot 0 \triangle 1$.

Для всякого НЧ m мы построим систему дизъюнктных [0]-сегментов $\{K_p^m\}_{p=1}^{\sigma_m}$ такую, что сегменты этой системы не перекрываются с сегментами системы $\{L_n^{m+1}\}_{n=1}^{\tau_{m+1}}$ и

$$\forall a(\neg\neg \exists k(1 \leqq k \leqq \tau_m \,\&\, a \in L_k^m) \equiv$$

$$\equiv \neg\neg \exists n(1 \leqq n \leqq \sigma_m \,\&\, a \in K_n^m \vee 1 \leqq n \leqq \tau_{m+1} \,\&\, a \in L_n^{m+1})) \,.$$

Мы используем замечание 1.10 и для всяких НЧ m и p, $1 \leqq p \leqq \sigma_m$, построим, исходя от φ и K_p^m, неубывающие [0]-абсолютно непрерывные на $0 \triangle 1$ [0]-функции $\psi_{m,p,1}$ и $\psi_{m,p,2}$, обладающие описанными там свойствами.

Пусть $\mathscr{G}$ [0]-функция такая, что

$$\forall mpx^{[0]}(1 \leqq p \leqq \sigma_m \supset ((x^{[0]} = \text{Эл}(K_p^m) \vee x^{[0]} = \text{Эп}(K_p^m)) \supset \mathscr{G}(x^{[0]}) =$$

$$= 2 \,.\, (\varphi(x^{[0]}) - \varphi(0))) \,\&\, (x^{[0]} \in K_p^m \supset \mathscr{G}(x^{[0]}) =$$

$$= 2 \,.\, (\varphi(\text{Эл}(K_p^m)) - \varphi(0)) + \psi_{m,p,1}(x^{[0]}) + \psi_{m,p,2}(x^{[0]}))) \,.$$

Ввиду замечания 1.2 и теоремы 4 из [20] ясно, что $\mathscr{G}$ обладает требуемыми свойствами.

Лемма 1.24. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция, p НЧ, а ψ неубывающая [0]-функция, $\text{Д}^{[0]}(\psi)$. Тогда существует неубывающая [0]-функция $\mathscr{J}$, для которой выполнено

$$\text{Д}^{[0]}(\mathscr{J}) \,\&\, \mathscr{J}(0) = 0 \,\&\, \mathscr{J}(1) < 2^{-p} \,\&\, \forall \xi^{[0]}(\underline{D}[\mathscr{F} + \psi]\,(\xi^{[0]}) > -\infty \,\&$$

$$\& \, \bar{D}[\mathscr{F}]\,(\xi^{[0]}) > -\infty \supset \underline{D}[\mathscr{F} + \mathscr{J}]\,(\xi^{[0]}) > -\infty) \,.$$

Доказательство. Мы используем лемму 1.20 и построим неубывающую

$[0]$-функцию φ, для которой выполнено

$$\varphi(0) = 0 \mathbin{\&} \varphi(1) < 2^{-p-2} \mathbin{\&} \forall \xi^{[0]}(\underline{D}[\mathcal{F} + \psi](\xi^{[0]}) > -\infty \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \bar{D}[\mathcal{F}](\xi^{[0]}) > -\infty \supset \underline{D}[\mathcal{F} + \varphi](\xi^{[0]}) > -\infty).$$

Ввиду $Д^{[0]}(\psi)$ и теоремы 1.2 существуют $[0]$-последовательность $S_\sigma^{[0]}$-множеств $\{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ и $[0]$-последовательность НЧ $\{\mathrm{t}_m\}_m^{[0]}$ такие, что для всякого НЧ m мера $\{H_n^m\}_n^{[0]}$ меньше чем 2^{-m}, $\{H_n^m\}_n^{[0]}$ $[0]$-последовательность дизъюнктных $[0]$-сегментов, содержащихся в $0 \triangle 1$, (1), $\forall \xi^{[0]}(0 < \xi^{[0]} < 1 \mathbin{\&}$ $\mathbin{\&} \neg \exists n(\xi^{[0]} \in (H_n^m)^0) \supset D^{[0]}(\psi, \xi^{[0]}))$, ряд $\sum\limits_n \langle \omega, \psi \rangle (H_n^m)$ $[0]$-сходится и

$$\langle \omega, \psi \rangle (H_0^m) + \langle \omega, \psi \rangle (H_1^m) < 2^{-p-3} \mathbin{\&} 2 < \mathrm{t}_m \mathbin{\&} \sum_{n=\mathrm{t}_m+1}^{\infty} \langle \omega, \psi \rangle (H_n^m) < 2^{-p-4-m}.$$

Мы построим $[0]$-последовательность $[0]$-сегментов $\{Q_s\}_s^{[0]}$, образованную сегментами H_n^m, где

$$(m = 0 \mathbin{\&} (n \leqq 1 \vee \mathrm{t}_0 < n) \vee 0 < m \mathbin{\&} \mathrm{t}_m < n \mathbin{\&} \forall k(k < m \supset$$
$$\supset \exists l(l \leqq \mathrm{t}_k \mathbin{\&} (k = 0 \supset 1 < l) \mathbin{\&} H_n^m \subseteq H_l^k))).$$

Тогда $\{Q_s\}_s^{[0]}$ $S_\sigma^{[0]}$-множество, содержащееся в $0 \triangle 1$, и ряд $\sum\limits_s \langle \omega, \psi \rangle (Q_s)$ $[0]$-сходится к $[0]$-КДЧ, меньшему чем 2^{-p-2}. Мы заметим, что $\forall s(\mathrm{Var}\,(\langle \omega, \psi \rangle (Q_s), \psi, Q_s) \mathbin{\&} Д^{[0]}(\psi^{[Q_s]}))$ (см. теорему 2 из [20]).

Пусть $\mathcal{J}_0$ неубывающая $[0]$-функция такая, что

$$\mathcal{J}_0 = \sum_{s=0}^{\infty} (\psi^{[Q_s]} - \psi(Эл(Q_s))).$$

Тогда $\mathcal{J}_0(0) = 0 \mathbin{\&} \mathcal{J}_0(1) < 2^{-p-2}$ и ввиду замечания 1.2 и теоремы 1.6 выполнено $Д^{[0]}(\mathcal{J}_0)$.

Пусть $\{\{L_n^m\}_{n=1}^{\tau_m}\}_m^{[0]}$ $[0]$-последовательность систем дизъюнктных $[0]$-сегментов такая, что $\tau_0 = \mathrm{t}_0 - 1 \mathbin{\&} \forall n(1 \leqq n \leqq \tau_0 \supset L_n^0 \doteqdot H_{n+1}^0)$ и для всякого НЧ m, $0 < m$, система $\{L_n^m\}_{n=1}^{\tau_m}$ образована $[0]$-сегментами H_l^m, где $0 \leqq l \leqq$ $\leqq \mathrm{t}_m \mathbin{\&} \exists n(1 \leqq n \leqq \tau_{m-1} \mathbin{\&} H_l^m \subseteq L_n^{m-1})$. Тогда выполнено (22). Мы используем лемму 1.23 и построим, исходя от φ и $\{\{L_n^m\}_{n=1}^{\tau_m}\}_m^{[0]}$, неубывающую $[0]$-функцию $\mathcal{G}$, обладающую свойствами, описанными в названной лемме, и определим $\mathcal{J} \rightleftharpoons (\mathcal{J}_0 + \mathcal{G})$.

Легко убедиться в том, что построенная нами $[0]$-функция $\mathcal{J}$ обладает свойствами, перечисленными в утверждении доказуемой леммы.

Легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1.25. Пусть $\{\mathrm{Q}_i\}_{i=0}^{\tau}$ система рациональных сегментов. Тогда существуют дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\{\mathrm{i}_{1,j}\}_{j=1}^{\sigma_1}$ и $\{\mathrm{i}_{2,j}\}_{j=1}^{\sigma_2}$ такие, что

1) для любого НЧ l, $1 \leqq l \leqq 2$, выполнено $0 \leqq \sigma_l \mathbin{\&} \forall j(1 \leqq j \leqq \sigma_l \supset$ $\supset 0 \leqq \mathrm{i}_{l,j} \leqq \tau)$ и $\{\mathrm{Q}_{\mathrm{i}_{l,j}}\}_{j=1}^{\sigma_l}$ система дизъюнктных сегментов,

2) верно $\bigcup_{i=0}^{\tau} Q_i = \bigcup_{l=1}^{2} \bigcup_{j=1}^{\sigma_l} Q_{i_{l,j}}$ и $\sum_{j=1}^{\sigma_1} |Q_{i_{1,j}}| \geqq \sum_{j=1}^{\sigma_2} |Q_{i_{2,j}}|$.

Лемма 1.26. Пусть H [0]-сегмент и **C** $\varnothing$-рекурсивно перечислимое множество рациональных сегментов такие, что для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ верно

$$\xi^{[0]} \in (H)^0 \supset \forall m \neg\neg \exists S(S \in \mathbf{C} \,\&\, \xi^{[0]} \in S \,\&\, |S| < 2^{-m}).$$

Тогда существует [0]-последовательность дизъюнткных рациональных сегментов $\{K_n\}_n^{[0]}$ такая, что $\forall n(K_n \in \mathbf{C} \,\&\, K_n \subseteq (H)^0)$ и $\{K_n\}_n^{[0]}$ $S_\sigma^{[0]}$-множество меры $|H|$.

Доказательство. 1) Пусть L сегмент, L $\subseteq$ H. Тогда, очевидно, существует система рациональных сегментов $\{Q_i\}_{i=0}^{\tau}$, для которой верно $\forall i(0 \leqq i \leqq \tau \supset$ $\supset Q_i \in \mathbf{C} \,\&\, Q_i \subseteq (L)^0)$ и мера $\bigcup_{i=0}^{\tau} Q_i$ больше чем $\frac{1}{2} \cdot |L|$. Согласно лемме 1.25 можно построить возрастающую систему НЧ $\{i_{1,j}\}_{j=1}^{\sigma_1}$ такую, что $1 \leqq \sigma_1 \,\&$ $\&\, \forall j(1 \leqq j \leqq \sigma_1 \supset 0 \leqq i_{1,j} \leqq \tau)$, $\{Q_{i_{1,j}}\}_{j=1}^{\sigma_1}$ система дизъюнктных сегментов и $\sum_{j=1}^{\sigma_1} |Q_{i_{1,j}}| > \frac{1}{4} \cdot |L|$.

2) Ввиду 1) можно построить [0]-последовательность дизъюнктных рациональных сегментов $\{K_n\}_n^{[0]}$ и возрастающую [0]-последовательность НЧ $\{m_k\}_k^{[0]}$, для которых выполнено

$$\forall n(K_n \in \mathbf{C} \,\&\, K_n \subseteq (H)^0) \,\&\, m_0 = 0 \,\&\, \forall k\Big(\sum_{n=m_k}^{m_{k+1}-1} |K_n| > \tfrac{1}{4} \cdot \Big(|H| - \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{n=m_l}^{m_{l+1}-1} |K_n|\Big)\Big).$$

Но тогда верно

$$\forall k\Big(\sum_{n=0}^{m_{k+1}-1} |K_n| > |H| \cdot (1 - (\tfrac{3}{4})^{k+1})\Big).$$

Замечание 1.11. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, H [0]-сегмент, v [0]-КДЧ и s НЧ. Тогда видно, что словарное множество **C**, $\mathbf{C} \rightleftharpoons \wedge S(\exists ab(a < b \,\&\, a \triangle b \doteqdot S \,\&$ $\&\, a \triangle b \subseteq (H)^0 \,\&\, |a \triangle b| < 2^{-s} \,\&\, v < \Delta(\mathscr{F},\ a \triangle b)/|a \triangle b|))$, является $\varnothing$-рекурсивно перечислимым и для любого [0]-ПЧ ξ такого, что $\xi \in (H)^0 \,\&$ $\&\, \bar{D}[\mathscr{F}](\xi) > v$, верно $\forall m \neg\neg\exists S(S \in \mathbf{C} \,\&\, \xi \in (S)^0 \,\&\, |S| < 2^{-m})$.

Лемма 1.27. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\mathscr{F}(0) > \mathscr{F}(1)$, и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ, пусть для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ выполнено $\bar{D}[\mathscr{F}](\xi^{[0]}) \geqq 0$. Тогда существуют $S_\sigma^{[0]}$-множество $\{K_n\}_n^{[0]}$ меры 1, $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}L_1^{[0]}$ и [0]-Π_1Ч ξ такие, что $\{K_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательнось рациональных сегментов, содержащихся в $0 \triangle 1$, $Д^{[0]}([\mathscr{F}, \{K_n\}_n^{[0]}], \{F_n\}_n^{[0]})$, $[\mathscr{F}, \{K_n\}_n^{[0]}]$ убывающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция,

$$\forall n(\tfrac{1}{2} \cdot \Delta(\mathscr{F}, 0 \triangle 1) \cdot |K_n| < \Delta(\mathscr{F}, K_n)) \,\&\, \xi \in 0 \bigtriangledown 1 \,\&\, \neg\exists n(\xi \in K_n) \,\&$$
$$\&\, \neg\exists k(\xi = \xi_k) \,\&\, Op[[\mathscr{F}, \{K_n\}_n^{[0]}]](\xi) \in \Pi_2^{[0]}.$$

Доказательство. 1) Пусть L рациональный сегмент такой, что $\mathrm{L} \subseteq 0 \triangle 1\ \&$ $\&\ \Delta(\mathcal{F}, \mathrm{L}) < 0$. Тогда существует НЧ p, для которого выполнено

$$1 \leqq p\ \&\ \Delta(\mathcal{F}, \mathrm{L}) < 2^{-p} \,.\, \Delta(\mathcal{F}, 0 \triangle 1) \,.\, |\mathrm{L}| \,, \tag{23}$$

и ввиду предположения леммы, замечания 1.11 и леммы 1.26 существует система дизъюнктных рациональных сегментов $\{\mathrm{T}_i\}_{i=0}^{\sigma}$ такая, что

$$\forall i\,(0 \leqq i \leqq \sigma \supset \mathrm{T}_i \subseteq (\mathrm{L})^0\ \&\ \Delta\,(\mathcal{F}, \mathrm{T}_i) > 2^{-p-3} \,.\, \Delta\,(\mathcal{F}, 0 \triangle 1) \,.\, |\mathrm{T}_i|)\ \&$$

$$\&\sum_{i=0}^{\sigma} |\mathrm{T}_i| > \tfrac{1}{2} \,.\, |\mathrm{L}| \,. \tag{24}$$

Пусть $\mathcal{G} \rightleftharpoons [\mathcal{F}, \{\mathrm{T}_i\}_{i=0}^{\sigma}]^{[\mathrm{L}]}$. Согласно лемме 4 из [18] и замечанию 1 из [20] существуют [0]-КДЧ w и z и [0]-последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов $\{H_n\}_n^{[0]}$ такие, что

$$|H_n| \xrightarrow[n \to \infty]{[0]} 0\ \&\ \neg \exists n(\text{Эл}(\mathrm{L}) \in (H_n)^0 \vee \text{Эп}(\mathrm{L}) \in (H_n)^0)\ \&$$

$$\&\ 2^{-p} \,.\, \Delta(\mathcal{F}, 0 \triangle 1) < \mathrm{w} < \mathrm{z} < 2^{-p-2} \,.\, \Delta(\mathcal{F}, 0 \triangle 1)\ \&\ \forall n(H_n \subseteq \mathrm{L} \supset$$

$$\supset \mathrm{w} \,.\, |H_n| < \Delta(\mathcal{F}, H_n))\ \&\ \forall x^{[0]} y^{[0]}(\text{Эл}(\mathrm{L}) \leqq x^{[0]} < y^{[0]} \leqq$$

$$\leqq \text{Эп}(\mathrm{L}) \supset \Delta([\mathcal{G}, \{H_n\}_n^{[0]}], x^{[0]} \triangle y^{[0]}) < \mathrm{z} \,.\, |x^{[0]} \triangle y^{[0]}|) \,.$$

Следовательно, ввиду предположения леммы, (23) и (24) множество $\wedge n(H_n \subseteq \mathrm{L})$ является инфинитным и верно

$$\forall i(0 \leqq i \leqq \sigma \supset \exists mn(\mathrm{T}_i \subseteq H_m \cup H_n)) \,.$$

Мы построим возрастающую систему НЧ $\{\mathrm{n}_j\}_{j=0}^{\lambda}$ и ситемы дизъюнткных рациональных сегментов

$$\{\mathrm{S}_{0,l}\}_{l=0}^{\tau_0} \quad \text{и} \quad \{\mathrm{S}_{1,l}\}_{l=0}^{\tau_1}$$

такие, что

$$\forall n(\exists j(0 \leqq j \leqq \lambda\ \&\ n = \mathrm{n}_j) \equiv \exists i(0 \leqq i \leqq \sigma\ \&\ \neg((\mathrm{T}_i)^0 \cap H_n = \varnothing)))\ \&$$

$$\&\ \bigcup_{l=0}^{\tau_0} \mathrm{S}_{0,l} = \bigcup_{j=0}^{\lambda} H_{\mathrm{n}_j}\ \&\ \mathrm{L} \setminus \bigcup_{l=0}^{\tau_0} (\mathrm{S}_{0,l})^0 = \bigcup_{l=0}^{\tau_1} \mathrm{S}_{1,l}$$

и, следовательно,

$$\sum_{l=0}^{\tau_0} |\mathrm{S}_{0,l}| > \tfrac{1}{2} \,.\, |\mathrm{L}|\ \&\ \forall li((0 \leqq l \leqq \tau_0 \supset 2^{-p} \,.\, \Delta(\mathcal{F}, 0 \triangle 1) \,.\, |\mathrm{S}_{0,l}| < \Delta(\mathcal{F}, \mathrm{S}_{0,l}))\ \&$$

$$\&\ (0 \leqq i \leqq 1\ \&\ 0 \leqq l \leqq \tau_i \supset \Delta\,(\mathcal{F}, \mathrm{S}_{i,l}) < 2^{-p-2} \,.\, \Delta\,(\mathcal{F}, 0 \triangle 1) \,.\, |\mathrm{S}_{i,l}|)).$$

2) На основании 1) легко построить [0]-последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов, содержащихся в $0 \triangle 1$, $\{K_n\}_n^{[0]}$ такую, что $\{K_n\}_n^{[0]}$ $S_\sigma^{[0]}$-множество меры 1, $\forall n(\frac{1}{2} \,.\, \Delta(\mathcal{F}, 0 \triangle 1) \,.\, |K_n| < \Delta(\mathcal{F}, K_n) < 0)$ и $[\mathcal{F}, \{K_n\}_n^{[0]}]$ убывающая на $0 \triangle 1$ и, следовательно, [0]-равномерно непрерывная [0]-функция. Таким образом, ряд $\sum_n |\Delta(\mathcal{F}, K_n)|$ [0]-сходится к [0]-КДЧ

меньшему чем $\frac{1}{2} \cdot |\Delta(\mathscr{F}, 0 \triangle 1)|$ и существует $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{L}_1^{[0]}$, для которого выполнено $\text{Д}^{[0]}([\mathscr{F}, \{K_n\}_n^{[0]}], \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$. Ввиду этого, теоремы 2 из [17] и релятивизаций леммы 1.6 из [6] и теоремы 6.2 из [3] существуют $[0]$-Π_2Ч η и $[0]$-ПЧ ξ, для которых верно

$$\eta \in \mathscr{F}(1) \triangledown \mathscr{F}(0) \,\&\, \neg\exists n(\eta \in \mathscr{F}(\text{Эп}(K_n)) \triangle \mathscr{F}(\text{Эл}(K_n))) \,\&$$
$$\&\, \neg\exists k(\eta = Op[[\mathscr{F}, \{K_n\}_n^{[0]}]](\xi_k)) \,\&\, Op[[\mathscr{F}, \{K_n\}_n^{[0]}]](\xi) = \eta$$

и, следовательно,

$$\xi \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \neg\exists n(\xi \in K_n) \,\&\, \xi \in \Pi_1^{[0]} \,\&\, \neg\exists k(\xi = \xi_k)\,.$$

Лемма 1.28. Пусть $\mathscr{K}$ и $\mathscr{G}$ $[0]$-функции, $\{K_n\}_n^{[0]}$ $S_\sigma^{[0]}$-множество и ξ $[0]$-Π_1Ч такие, что

$$\exists\eta^{[0]}(\mathrm{L}_{\ell\ell}(\eta^{[0]}, \mathscr{K}, \xi) \,\&\, \eta^{[0]} \in \Pi_1^{[0]}) \vee \mathfrak{T}(\mathscr{K})\,, \tag{25}$$

$$\mathrm{WACG}(\mathscr{G}) \vee \neg D_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{G}, \xi)\,, \tag{26}$$

$\mathscr{H}(\{K_n\}_n^{[0]})$ и $[\mathscr{G} - \mathscr{K}, \{K_n\}_n^{[0]}]$ невозрастающая $[0]$-функция. Тогда

$$Op[[\mathscr{G} - \mathscr{K}, \{K_n\}_n^{[0]}]](\xi) \in \Pi_1^{[0]}\,. \tag{27}$$

Доказательство. Мы допустим, что (27) неверно. Тогда

$$0 < \xi < 1 \,\&\, \neg\exists n(\xi \in K_n) \,\&\, Op[[\mathscr{G} - \mathscr{K}, \{K_n\}_n^{[0]}]](\xi) \in \Pi_2^{[0]} \tag{28}$$

Мы определим $\mathscr{K}_1 \rightleftharpoons [\mathscr{K}, \{K_n\}_n^{[0]}]$ и $\mathscr{G}_1 \rightleftharpoons [\mathscr{G}, \{K_n\}_n^{[0]}]$. Ввиду (26), леммы 1.13, теорем 5 и 7 из [22] и леммы 4 из [18] верно $\mathrm{WACG}(\mathscr{G}_1) \vee \neg \underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{G}_1, \xi)$ и не может не существовать $[0]$-последовательность $[0]$-сегментов $\{H_n\}_n^{[0]}$ такая, что $\mathscr{H}(\{H_n\}_n^{[0]}) \,\&\, \neg\exists n(\xi \in H_n)$, $[\mathscr{G}_1, \{H_n\}_n^{[0]}]$ $[0]$-равномерно непрерывная $[0]$-функция $[0]$-слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ и

$$\begin{aligned}(&Op[[\mathscr{G}_1, \{H_n\}_n^{[0]}]](\xi) \in \Pi_1^{[0]} \vee \\ &\vee \neg \underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, [\mathscr{G}_1, \{H_n\}_n^{[0]}], \xi))\,.\end{aligned} \tag{29}$$

Пусть $\{H_n\}_n^{[0]}$ $[0]$-последовательность $[0]$-сегментов, обладающая перечисленными свойствами. Тогда $[\mathscr{G}_1 - \mathscr{K}_1, \{H_n\}_n^{[0]}]$ невозрастающая $[0]$-функция и $[\mathscr{K}_1, \{H_n\}_n^{[0]}]$ $[0]$-равномерно непрерывная $[0]$-функция $[0]$-слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ и ввиду (25), теоремы 3 и следствия теоремы 10 из [20] и замечания 1.3 выполнено

$$Op[[\mathscr{K}_1, \{H_n\}_n^{[0]}]](\xi) \in \Pi_1^{[0]}\,. \tag{30}$$

На основании (28) мы получаем

$$Op[[\mathscr{G}_1 - \mathscr{K}_1, \{H_n\}_n^{[0]}]](\xi) \in \Pi_2^{[0]}\,. \tag{31}$$

Итак, выполнено (29)–(31), что ввиду отмеченных выше свойств $[0]$-функций $[\mathscr{G}_1, \{H_n\}_n^{[0]}]$ и $[\mathscr{K}_1, \{H_n\}_n^{[0]}]$ и леммы 3 из [23] невозможно.

Итак, верно (27).

Теорема 1.12. Пусть $\mathscr{K}$ и $\mathscr{G}$ [0]-функции и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ такие, что

$$(\mathscr{N}(\mathscr{K}, \{\xi_k\}_k^{[0]}) \vee \mathfrak{T}(\mathscr{K})) \,\&\, (\mathrm{WACG}(\mathscr{G}) \,\&\, \mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{G}) \vee$$
$$\vee \neg\exists\xi^{[0]}(\neg\exists k(\xi^{[0]} = \xi_k) \,\&\, \underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{G}, \xi^{[0]})))$$

и для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ выполнено

$$\bar{D}[\mathscr{G}]\,(\xi^{[0]}) \geqq \underline{D}[\mathscr{K}]\,(\xi^{[0]})\,. \tag{32}$$

Тогда $\mathscr{G} - \mathscr{K}$ неубывающая [0]-функция.

Доказательство. Ввиду предположений теоремы и ввиду теоремы 2 из [19] для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ верно $-\infty < \underline{D}[\mathscr{G}]\,(\xi^{[0]}) = \bar{D}[\mathscr{G}]\,(\xi^{[0]}) <$ $< +\infty$ и (32) и, следовательно, согласно лемме 1.4 из [6]

$$\bar{D}[\mathscr{G} - \mathscr{K}]\,(\xi^{[0]}) = \bar{D}[\mathscr{G}]\,(\xi^{[0]}) - \underline{D}[\mathscr{K}]\,(\xi^{[0]}) \geqq 0\,.$$

Нам достаточно доказать

$$0 \leqq \Delta(\mathscr{G} - \mathscr{K}, 0 \triangle 1)\,. \tag{33}$$

Мы допустим, что (33) неверно. Тогда согласно лемме 1.27 существуют $S_\sigma^{[0]}$-множество $\{K_n\}_n^{[0]}$ и [0]-П$_1$Ч ξ такие, что $\mathscr{H}(\{K_n\}_n^{[0]})$, $[\mathscr{G} - \mathscr{K}, \{K_n\}_n^{[0]}]$ убывающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция, $\xi \in 0 \bigtriangledown 1 \,\&\, \neg\exists n(\xi \in K_n) \,\&\, \neg\exists k(\xi = \xi_k)$ и

$$Op[[\mathscr{G} - \mathscr{K}, \{K_n\}_n^{[0]}]]\,(\xi) \in \mathbf{\Pi}_2^{[0]}\,. \tag{34}$$

Однако ввиду предположений теоремы и ввиду леммы 1.28 (34) неверно.

Итак, мы доказали (33).

На основании этой теоремы верно следующее утверждение.

Следствие. Пусть $\mathscr{K}$ и $\mathscr{G}$ [0]-функции, $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathbf{\Pi}}\mathbf{S}^{[0]}$ и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ такие, что

$$(\mathscr{N}(\mathscr{K}, \{\xi_k\}_k^{[0]}) \,\&\, (\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{K}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \vee \text{Д}^{a\not{p}}(\mathscr{K}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})) \vee$$
$$\vee\, \mathfrak{T}(\mathscr{K}) \,\&\, \text{Д}^{[0]}(\mathscr{K}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})) \,\&\, \neg\exists\xi^{[0]}(\neg\exists k(\xi^{[0]} = \xi_k) \,\&$$
$$\&\, \underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{G}, \xi^{[0]}) \,\&\, \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}, \xi^{[0]})) \,\&\, \mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{G}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})\,.$$

Тогда $\mathscr{G} - \mathscr{K}$ постоянная [0]-функция.

На основании теорем 4 и 5 из [22], релятивизации теоремы 4 из [20] и замечания 1.5 мы получаем следующее утверждение.

Лемма 1.29. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\mathrm{WACG}_{\circ}(\mathscr{F})$. Тогда $\text{Д}^{[1]}(\mathscr{F})$ & $\text{Д}^{ak}(\mathscr{F})$ и, следовательно, $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F})$.

Пример 1.8. Существуют [0]-функция $\mathscr{K}$ и неубывающая [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{F}$ такие, что

$$\mathrm{ACG}(\mathscr{K})\ \&\ \Delta(\mathscr{F}, 0 \triangle 1) > 0\ \&\ \forall\xi^{[0]}(\bar{D}[\mathscr{K} - \mathscr{F}](\xi^{[0]}) =$$
$$= \bar{D}[\mathscr{K}](\xi^{[0]})\ \&\ \underline{D}[\mathscr{K} - \mathscr{F}](\xi^{[0]}) = \underline{D}[\mathscr{K}](\xi^{[0]}))$$

и, следовательно, ввиду теорем 5 и 6 из [22] выполнено $\mathrm{ACG}(\mathscr{K} - \mathscr{F})$ & & $\mathscr{N}(\mathscr{K})$ & $\mathscr{N}(\mathscr{K} - \mathscr{F})$.

Теорема 1.13. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, v [0]-КДЧ и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ такие, что $\mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]})$ и для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ выполнено $\bar{D}[\mathscr{F}](\xi^{[0]}) \geqq v$. Тогда $\mathscr{F} - h_v$ является неубывающей [0]-функцией.

Доказательство. Пусть $\mathscr{G} \rightleftharpoons h_{-v}$ и $\mathscr{K} \rightleftharpoons -\mathscr{F}$. Тогда ввиду леммы 1.4 из [6] выполнены предположения теоремы 1.12 и, следовательно, [0]-функция $\mathscr{G} - \mathscr{K}$, т. е. $\mathscr{F} - h_v$, является неубывающей.

Следствие. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ и $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$ такие, что $\mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]})$ & $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$ & $0 \leqq \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$. Тогда $\mathscr{F}$ неубывающая [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция, $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$ и, следовательно, $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ является интегрируемым по Лебегу на $0 \triangle 1$.

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием теоремы 1.13, следствия теоремы 1.10 и замечаний 1.2 и 1.5.

Теорема 1.14. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ такие, что $\mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]})$. Тогда существует $S_\sigma^{[1]}$-множество $\mathfrak{H}$ меры меньшей чем 1, для которого выполнено

$$\forall\xi^{[0]}(\xi^{[0]} \in 0 \triangle 1\ \&\ \neg(\xi^{[0]} \in \mathfrak{H}) \supset$$
$$\supset \exists\eta^{[0]}(D^{[1]}(\eta^{[0]}, \mathscr{F}, \xi^{[0]})\ \&\ \eta^{[0]} \leqq \Delta(\mathscr{F}, 0 \triangle 1)))\,. \tag{35}$$

Доказательство. Для всякого НЧ s мы посредством $\mathbf{C}_s$ обозначим $\varnothing$-рекурсивно перечислимое множество рациональных сегментов $\wedge S(\exists ab(0 < a < b < 1\ \&\ a \triangle b \dot{=} S\ \&\ |a \triangle b| < 2^{-s}\ \&\ \Delta(\mathscr{F}, a \triangle b) > \Delta(\mathscr{F}, 0 \triangle 1)\,.\,|a \triangle b|))$, посредством $\{H_n^s\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов такую, что

$$\forall\xi^{[0]}(\neg\neg\exists n(\xi^{[0]} \in H_n^s) \equiv \neg\neg(\xi^{[0]} \in -2^{-s} \triangledown 0 \vee \neg\neg\exists S(S \in \mathbf{C}_s\ \&\ \xi^{[0]} \in S)))\,,$$

а посредством ϑ_s [0]-ПЧ, к которому псевдосходится [0]-последовательность РЧ $\{\sum_{n=0}^{l} |H_n^s|\}_l^{[0]}$. Ясно, что $\{\vartheta_s\}_s^{[0]}$ является убывающей.

1) Мы допустим, что $\forall s(1 \leqq \vartheta_s)$.

Тогда $\forall s \urcorner(\mathbf{C}_s = \varnothing)$, для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ верно $\bar{D}[\mathscr{F}](\xi^{[0]}) \geqq \Delta(\mathscr{F}, 0 \triangle 1)$ и, следовательно,

а) согласно теореме 1.13 $\mathscr{F} - h_{\Delta(\mathscr{F}, 0 \triangle 1)}$ неубывающая [0]-функция и

б) существует рациональный сегмент $a \triangle b$ такой, что

$$a \triangle b \subseteq 0 \bigtriangledown 1 \,\&\, \Delta(\mathscr{F}, a \triangle b) > \Delta(\mathscr{F}, 0 \triangle 1) \,.\, |a \triangle b| \,.$$

Таким образом, мы получаем $\Delta(\mathscr{F}, 0 \triangle 1) > \Delta(\mathscr{F}, 0 \triangle 1)$, что невозможно.

Итак, [1]-существует НЧ s, для которого верно $\vartheta_s < 1$. Ясно, что

$$\forall \xi^{[0]}(\xi^{[0]} \in 0 \bigtriangledown 1 \,\&\, \urcorner \exists n(\xi^{[0]} \in H_n^s) \supset \bar{D}[\mathscr{F}](\xi^{[0]}) \leqq \Delta(\mathscr{F}, 0 \triangle 1))$$

(замечание 1.11).

2) Ввиду 1) и теоремы 1.10 из [6] существует $S_\sigma^{[1]}$-множество $\mathfrak{H}$ меры меньшей чем 1, для которого выполнено (35).

Замечание 1.12. Согласно примеру 2 из [18] существует [0]-функция $\mathscr{F}_1$ такая, что $\mathscr{A}(\mathscr{F}_1)$ (см. [22]) и, следовательно, $\mathscr{F}_1$ [1]-абсолютно непрерывна на $0 \triangle 1$ (теорема 1 из [18]), обладает свойством (N)* (и, тем более, верно $\mathscr{N}(\mathscr{F}_1)$) и вместе с тем $\forall \xi^{[0]}(\xi^{[0]} \in 0 \triangle 1 \,\&\, \xi^{[0]} \in \Pi_1^{[0]} \supset \urcorner D_{\ell\ell}(\mathscr{F}_1, \xi^{[0]}))$.

Ввиду теорем 5 и 6 из [22], теоремы 2 из [20], теорем 1.2 и 1.12 и теоремы 1.10 из [6] верно следующее утверждение. (Определение $\mathfrak{D}'$-интегрируемости содержится в [23].)

Теорема 1.15. Пусть $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ $\mathfrak{D}'$-интегрируемый на $0 \triangle 1$ элемент ${}^{\mathrm{n}}\mathrm{S}^{[0]}$, $\mathscr{F}$ [0]-функция и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ такие, что $\mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]})$ и для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ верно $(D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \xi^{[0]}) \supset \exists \eta^{[0]}(\mathrm{P}_{\ell\ell}(\eta^{[0]}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}, \xi^{[0]}) \,\&\, D_{\ell\ell}(\eta^{[0]}, \mathscr{F}, \xi^{[0]})))$. Тогда $\mathscr{F}$ неопределенный $\mathfrak{D}'$-интеграл от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$. В частности, если $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ является интегрируемым по Лебегу на $0 \triangle 1$, то согласно следствию 3 теоремы 1 из [23] $\mathscr{F}$ [0]-абсолютно непрерывна на $0 \triangle 1$.

На основании теоремы 2.2 из [6], замечания 1.3, теоремы 1.15, теоремы 4 из [20] и замечания 1 из [22] верно следующее утверждение.

Теорема 1.16. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция такая, что $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathscr{A}(\mathscr{F})$. Тогда $\mathscr{F}$ [0]-абсолютно непрерывна на $0 \triangle 1$.

Интересно сравнить теорему 1.16 с теоремой 3 из [9].

Лемма 1.30. Пусть $\mathscr{F}$ и f [0]-функции и $\{H_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-сегментов такие, что для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ выполнено

$$\urcorner \exists n(\xi^{[0]} \in H_n) \supset \exists \eta^{[0]}(\mathrm{L}_{\ell\ell}(\eta^{[0]}, f, \xi^{[0]}) \,\&\, D_{\ell\ell}(\eta^{[0]}, \mathscr{F}, \xi^{[0]}))\,.$$

Тогда для почти всех [0]-КДЧ $x^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ верно

$$\neg \exists n(x^{[0]} \in H_n) \supset \underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0](x^{[0]}) \leqq f(x^{[0]}) \leqq \bar{D}[\mathscr{F}; 0, 0](x^{[0]})$$

(см. лемму 1.3 из [6]).

Доказательство. 1) Пусть s НЧ. Мы определим

$$\mathbf{C}_s \rightleftharpoons \wedge S\Bigg(\exists ab\Bigg(0 < a < b < 1 \,\&\, a \triangle b \doteqdot S \,\&\, |a \triangle b| < 2^{-s} \,\&$$
$$\&\Bigg(\exists n(a \triangle b \subseteq (H_n)^0) \vee \left|\frac{\Delta(\mathscr{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|} - f(a)\right| < 2^{-s}\Bigg)\Bigg)\Bigg).$$

Тогда $\mathbf{C}_s$ $\varnothing$-рекурсивно перечислимое множество рациональных сегментов и ввиду предположения леммы для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ выполнено

$$\forall m \neg\neg \exists S(S \in \mathbf{C}_s \,\&\, \xi^{[0]} \in S \,\&\, |S| < 2^{-m}).$$

2) Ввиду 1) для завершения доказательства достаточно применить теорему 4.1 из [5], лемму 1.26 и замечание 1 из [8].

Следствие. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция и $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathbf{\Pi}}\mathbf{S}^{[0]}$ такие, что $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$. Тогда для почти всех [0]-КДЧ $x^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ выполнено $\exists y^{[0]}(\mathrm{P}^{[0]}(y^{[0]}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}, x^{[0]}) \,\&$ $\&\, \underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0](x^{[0]}) \leqq y^{[0]} \leqq \bar{D}[\mathscr{F}; 0, 0](x^{[0]}))$.

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием теоремы 2.2 из [6] и леммы 1.30.

§ 2. $\mathfrak{P}$-интеграл и w$\mathfrak{P}$-интеграл

Мы приступаем к определению конструктивных аналогов классического интеграла Перрона, теория которого содержится, например, в [1] и [2]. Мы хотим, чтобы эти аналоги удовлетворяли следующим условиям:

1) определение интеграла основано на идее, предложенной О. Перроном,

2) интегрируемые объекты [0]-измеримы, т. е. являются или элементами множества ${}^{\mathbf{\Pi}}\mathbf{S}^{[0]}$ или [0]-измеримыми (см. [6], стр. 93) [0]-функциями,

3) неопределенные интегралы являются [0]-операторами типа $(\mathbf{D}^{[0]} \to \mathbf{D}^{[0]})$,

4) если [0]-функция $\mathscr{F}$ является неопределенным интегралом от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in$ $\in {}^{\mathbf{\Pi}}\mathbf{S}^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ и $0 \leqq \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$, то $\mathscr{F}$ [0]-абсолютно непрерывна на $0 \triangle 1$.

На основании замечания 7 из [12] мы получаем следующий пример.

Пример 2.1. Существуют возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{F}$ и [0]-измеримая [0]-функция f такие, что $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}) \,\&\, \forall x^{[0]} D^{[0]}(f(x^{[0]}), \mathscr{F}, x^{[0]})$ и $\mathscr{F}$ не является [0]-абсолютно непрерывной на $0 \triangle 1$.

Этот пример вместе с примерами 2.3 и 2.4 из [6] и примером 1.6 показали, что

а) при определении надфункций и подфункций мы не можем ограничиться требованиями, касающимися поведения соответствующих [0]-функций на [0]-КДЧ,

б) полученные интегралы не могут быть расширением интеграла Ньютона.

Определения. Пусть $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\text{п}}S^{[0]}$, а $\mathscr{G}$ [0]-функция. Тогда

1) мы обозначим $-\{F_n\}_n^{[0]} \rightleftharpoons (\{0\gamma 1\delta 0\}_n^{[0]} - \{F_n\}_n^{[0]})$;

2) мы скажем, что

а) $\mathscr{G}$ является надфункцией (соотв. подфункцией) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, если $\mathscr{G}$ [0]-равномерно непрерывна и существует $\{G_n\}_n^{[0]} \in {}^{\text{п}}S^{[0]}$ такое, что

$$Д^{[0]}(\mathscr{G}, \{G_n\}_n^{[0]}) \,\&\, \{F_n\}_n^{[0]} \leqq \{G_n\}_n^{[0]} \,\&\, \neg\exists\xi^{[0]}\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{G}, \xi^{[0]})$$

(соотв. $Д^{[0]}(\mathscr{G}, \{G_n\}_n^{[0]}) \,\&\, \{G_n\}_n^{[0]} \leqq \{F_n\}_n^{[0]} \,\&\, \neg\exists\xi^{[0]}\bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}, \xi^{[0]})$) ;

б) $\mathscr{G}$ является w-надфункцией для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, если выполнено $\neg\exists\xi^{[0]}\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{G}, \xi^{[0]})$ и для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ имеет место

$$\exists\eta^{[0]}(P_{\ell\ell}(\eta^{[0]}, \{F_n\}_n^{[0]}, \xi^{[0]}) \,\&\, \eta^{[0]} \leqq \underline{D}[\mathscr{G}]\,(\xi^{[0]}))\ ;$$

в) $\mathscr{G}$ является w-подфункцией для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, если выполнено $\neg\exists\xi^{[0]}\bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}, \xi^{[0]})$ и для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ имеет место

$$\exists\eta^{[0]}(P_{\ell\ell}(\eta^{[0]}, \{F_n\}_n^{[0]}, \xi^{[0]}) \,\&\, \bar{D}[\mathscr{G}]\,(\xi^{[0]}) \leqq \eta^{[0]})\ .$$

Мы напомним, что согласно определению ([6], стр. 93) [0]-функция f называется [0]-измеримой, если существует $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\text{п}}S^{[0]}$ такое, что для почти всех [0]-КДЧ $x^{[0]}$ из $0 \triangle 1$

$$P_{\ell\ell}(f(x^{[0]}),\ \{F_n\}_n^{[0]}, x^{[0]})\ . \tag{36}$$

Ввиду теорем 4.1 из [5] и 2.2 из [6], если для f и $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\text{п}}S^{[0]}$ для почти всех [0]-КДЧ $x^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ верно (36), то существует [0]-последовательность $S_\sigma^{[0]}$-множеств $\{\mathfrak{H}_k\}_k^{[0]}$ такая, что для всякого НЧ k мера $\mathfrak{H}_k$ меньше чем 2^{-k}, $[f, \mathfrak{H}_k]$ [0]-равномерно непрерывна и $\forall m\, x^{[m]}(\neg(x^{[m]} \in \mathfrak{H}_k) \,\&\, x^{[m]} \in 0 \triangle 1 \supset$ $\supset \exists y^{[m]}(L^{[m]}(y^{[m]}, [f, \mathfrak{H}_k], x^{[m]}) \,\&\, P^{[m]}(y^{[m]}, \{F_n\}_n^{[0]}, x^{[m]})))$.

Ввиду этого — определения интегрируемости, введенные в [23] и в следующем для элементов множества ${}^{\text{п}}S^{[0]}$, и понятия надфункции (соотв. подфункции, соотв. w-надфункции, соотв. w-подфункции) элемента множества ${}^{\text{п}}S^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ переносятся очевидным способом на случай [0]-измеримых [0]-функций.

Замечание 2.1. Пусть $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\text{п}}S^{[0]}$, а $\mathscr{G}_0$ и $\mathscr{G}_1$ [0]-функции.

1) $\mathscr{G}_0$ является надфункцией (соотв. w-надфункцией) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если [0]-функция $-\mathscr{G}_0$ является подфункцией (соотв. w-подфункцией) для $-\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$.

2) Пусть $\mathscr{G}_0$ надфункция (соотв. подфункция) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$. Тогда

а) согласно теореме 15 из [22] $\mathscr{G}_0$ [0]-функция типа $\alpha G_{\bigcirc}$,

б) ввиду теоремы 2.2 из [6] и теоремы 1.2 $\mathscr{G}_0$ является w-надфункцией (соотв. w-подфункцией) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$.

3) Пусть $\mathscr{G}_0$ w-надфункция (соотв. w-подфункция) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$. Тогда согласно теореме 1.10 из [6], лемме 1.18, теореме 1.2 и теореме 2.2 из [6]

а) для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ верно

$$\exists \eta^{[0]} D^{[1]}(\eta^{[0]}, \mathscr{G}_0, \xi^{[0]})\ ;$$

б) если $\mathscr{G}_0$ [0]-равномерно непрерывна, то $\mathrm{VwBg}_{\bigcirc}$ $(\mathscr{G}_0)$;

в) $\mathscr{G}_0$ является надфункцией (соотв. подфункцией) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если $\mathscr{G}_0$ [0]-равномерно непрерывна и выполнено $Д^{[0]}(\mathscr{G}_0)$.

4) Если $\mathscr{G}_0$ и $\mathscr{G}_1$ надфункции (соотв. w-надфункции) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, то ввиду теоремы 2 из [20] и леммы 1.13 [0]-функция $\min(\mathscr{G}_0, \mathscr{G}_1)$ является надфункцией (соотв. w-надфункцией) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$.

5) Если $\mathscr{G}_0$ w-надфункция для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ и $\mathscr{G}_1$ w-подфункция для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, то ввиду леммы 1.4 и теорем 1.14 и 1.9 из [6] $(\mathscr{G}_0 - \mathscr{G}_1)$ неубывающая и, следовательно, [0]-равномерно непрерывная [0]-функция (замечание 1.2) и выполнено $Д^{[1]}(\mathscr{G}_0 - \mathscr{G}_1)$.

Определения. 1) Мы скажем, что $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ является интегрируемым в смысле Перрона ($\mathfrak{P}$-интегрируемым) на $0 \triangle 1$, если существуют [0]-последовательности [0]-функций $\{\mathscr{G}_{0,m}\}_m^{[0]}$ и $\{\mathscr{G}_{1,m}\}_m^{[0]}$ такие, что для всякого НЧ m выполнено $\Delta(\mathscr{G}_{0,m} - \mathscr{G}_{1,m},\ 0 \triangle 1) < 2^{-m}$ и $\mathscr{G}_{0,m}$ (соотв. $\mathscr{G}_{1,m}$) надфункция (соотв. подфункция) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$.

2) Мы скажем, что $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ является w$\mathfrak{P}$-интегрируемым на $0 \triangle 1$, если существуют [0]-последовательности [0]-функций $\{\mathscr{G}_{0,m}\}_m^{[0]}$ и $\{\mathscr{G}_{1,m}\}_m^{[0]}$ такие, что для всякого НЧ m выполнено $\Delta(\mathscr{G}_{0,m} - \mathscr{G}_{1,m},\ 0 \triangle 1) < 2^{-m}$ и $\mathscr{G}_{0,m}$ (соотв. $\mathscr{G}_{1,m}$) w-надфункция (соотв. w-подфункция) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$.

Ввиду замечания 2.1 ясно, что из $\mathfrak{P}$-интегрируемости следует w$\mathfrak{P}$-интегрируемость.

Обозначения. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$, а φ неубывающая [0]-функция. Тогда мы

1) посредством $\mathscr{P}(\mathscr{F}, \varphi)$ обозначим: $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна и выполнено $Д^{[0]}(\mathscr{F})$ & $Д^{[0]}(\varphi)$ и

$$\forall a \xi^{[0]}(0 < a \supset \underline{D}[\mathscr{F} + a \,.\, \varphi]\,(\xi^{[0]}) > -\infty\ \&$$
$$\&\ \bar{D}[\mathscr{F} - a \,.\, \varphi]\,(\xi^{[0]}) < +\infty)\ \&\ \varphi(0) = 0\ ; \tag{37}$$

2) посредством $\mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \varphi)$ обозначим: выполнено $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F})$ и (37);

3) посредством $\mathfrak{P}(\mathscr{F})$ (соотв. $w\mathfrak{P}(\mathscr{F})$) обозначим: существует неубывающая [0]-функция ψ такая, что $\mathscr{P}(\mathscr{F}, \psi)$ (соотв. $\mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \psi)$);

4) определим

$$\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}) \rightleftharpoons (\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \,\&\, Д^{[0]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}))$$

и

$$w\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}) \rightleftharpoons (w\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}))\,.$$

Замечание 2.2. Пусть $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ [0]-функции, φ и $\mathscr{K}$ неубывающие [0]-функции, z [0]-КДЧ, $0 < z$, $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ и $\{G_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$.

1) Ввиду замечания 1.5, леммы 1.4 из [6] и теоремы 2 из [20]

а)
$$(\mathscr{P}(\mathscr{F}, \varphi) \supset \mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \varphi)) \,\&\, (\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \supset w\mathfrak{P}(\mathscr{F})) \,\&$$
$$\&\, (\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}) \supset w\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}))\,,$$

б)
$$(\mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \varphi) \supset \mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, z\,.\,\varphi + \mathscr{K})) \,\&$$
$$\&\, (\mathscr{P}(\mathscr{F}, \varphi) \,\&\, Д^{[0]}(\mathscr{K}) \supset \mathscr{P}(\mathscr{F}, z\,.\,\varphi + \mathscr{K}))\,;$$

в) если выполнено $\mathscr{P}(\mathscr{F}, \varphi)$ (соотв. $\mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \varphi)$) и $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$, то для всякого РЧ a, $0 < a$, [0]-функция $\mathscr{F} + a\,.\,\varphi$ является надфункцией (соотв. w-надфункцией) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, а $\mathscr{F} - a\,.\,\varphi$ является подфункцией (соотв. w-подфункцией) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$.

2) Если выполнено $\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$ (соотв. $w\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$), то ввиду 1) в) $\{F_n\}_n^{[0]}$ является $\mathfrak{P}$-интегрируемым (соотв. $w\mathfrak{P}$-интегрируемым) на $0 \triangle 1$.

3) Если выполнено $w\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}) \,\&\, w\mathfrak{P}(\mathscr{G}, \{G_n\}_n^{[0]}) \,\&\, \{F_n\}_n^{[0]} = \{G_n\}_n^{[0]}$, то согласно 1) в) и замечаниям 1.5 и 2.1 $\mathscr{F} - \mathscr{G}$ постоянная [0]-функция.

4) Если выполнено $w\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}) \,\&\, 0 \leqq \{F_n\}_n^{[0]}$, то ввиду 1) в) и замечания 2.1 $\mathscr{F}$ является неубывающей.

Теорема 2.1. $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ **является $\mathfrak{P}$-интегрируемым (соотв. $w\mathfrak{P}$-интегрируемым) на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если существует [0]-функция $\mathscr{F}$ такая, что $\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$ (соотв. $w\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$).**

Доказательство. Ввиду части 2 замечания 2.2 мы можем ограничиться следующим.

1) Пусть $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ и $\{\mathscr{G}_{0,m}\}_m^{[0]}$ и $\{\mathscr{G}_{1,m}\}_m^{[0]}$ [0]-последовательности [0]-функций такие, что для всякого НЧ m выполнено $\Delta(\mathscr{G}_{0,m} - \mathscr{G}_{1,m}, 0 \triangle 1) < 2^{-m}$ и $\mathscr{G}_{0,m}$ (соотв. $\mathscr{G}_{1,m}$) является w-надфункцией (соотв. w-подфункцией) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$.

Пусть m НЧ. Мы определим

$$\varphi_{0,m} \rightleftharpoons \min_{0 \leqq k \leqq m} (\mathscr{G}_{0,k} - \mathscr{G}_{0,k}(0))\,,$$
$$\varphi_{1,m} \rightleftharpoons \max_{0 \leqq k \leqq m} (\mathscr{G}_{1,k} - \mathscr{G}_{1,k}(0))\,,$$

$\varphi_m \rightleftharpoons (\varphi_{0,m} - \varphi_{1,m})$. Тогда $\varphi_{0,m}(0) = \varphi_{1,m}(0) = \varphi_m(0) = 0$ и согласно замечанию 2.1 $\varphi_{0,m}$ (соотв. $\varphi_{1,m}$) w-надфункция (соотв. w-подфункция) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, φ_m неубывающая неотрицательная [0]-функция и $\varphi_m(1) = \Delta(\varphi_m, 0 \triangle 1) < 2^{-m}$.

Итак, для всяких НЧ m и k выполнено $\varphi_{0,m} \geqq \varphi_{0,m+k} \geqq \varphi_{1,m+k} \geqq \varphi_{1,m} > > \varphi_{0,m} - 2^{-m}$ и, следовательно, $\forall mk(2^{-m} > \varphi_m \geqq \varphi_{m+k} \geqq 0)$ и [0]-последовательности [0]-функций $\{\varphi_{0,m}\}_m^{[0]}$ и $\{\varphi_{1,m}\}_m^{[0]}$ [0]-равномерно [0]-сходятся к общему пределу — [0]-функции, которую мы обозначим посредством $\mathscr{F}$.

Для всякого НЧ m [0]-функции $\mathscr{F} + \varphi_m - \varphi_{0,m}$ и $\varphi_{1,m} - (\mathscr{F} - \varphi_m)$ являются неубывающими и, следовательно, $\mathscr{F} + \varphi_m$ (соотв. $\mathscr{F} - \varphi_m$) w-надфункция (соотв. w-подфункция) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$.

Мы построим [0]-функцию φ такую что $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m$. Пусть a РЧ и p НЧ, $2^{-p} < a$. Тогда $a \,.\, \varphi - (1/2^p) \,.\, \sum_{m=0}^{2^p-1} \varphi_m$ неубывающая [0]-функция и, следовательно, ввиду леммы 1.4 из [6] $\mathscr{F} + a \,.\, \varphi$ (соотв. $\mathscr{F} - a \,.\, \varphi$) w-надфункция (соотв. w-подфункция) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$.

Итак, ввиду замечания 2.1 и теоремы 1.10 и замечаний 2 из [19] и 2.3 из [6] для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ верно: существуют [0]-ПЧ η_0, η_1 и ϑ такие, что

$$D^{[1]}(\eta_0, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \,\&\, D^{[1]}(\vartheta, \varphi, \xi^{[0]}) \,\&\, P^{[1]}(\eta_1, \{F_n\}_n^{[0]}, \xi^{[0]}) \,\&$$
$$\& \,\forall a(0 < a \supset \eta_0 - a \,.\, \vartheta \leqq \eta_1 \leqq \eta_0 + a \,.\, \vartheta)$$

и, следовательно, $\eta_0 = \eta_1$. Мы доказали

$$\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}) \,. \tag{38}$$

Итак, мы ввиду того, что $\varphi(0) = 0$, установили верность

$$\mathscr{P}_{\mathcal{M}}(\mathscr{F}, \varphi) \,\&\, \mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}) \,.$$

2) Пусть для всякого НЧ m дополнительно выполнено: $Д^{[0]}(\mathscr{G}_{0,m}) \,\&$ $\& \, Д^{[0]}(\mathscr{G}_{1,m})$ и $\mathscr{G}_{0,m}$ и $\mathscr{G}_{1,m}$ [0]-равномерно непрерывные [0]-функции (см. часть 3 замечания 2.1).

Тогда $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна и согласно теореме 2 и следствию 2 теоремы 4 из [20] верно $\forall m Д^{[0]}(\varphi_m) \,\&\, Д^{[0]}(\varphi)$.

Ввиду 1) и замечания 2.1 для всякого РЧ a, $0 < a$, $\mathscr{G}_{0,0} - (\mathscr{F} - a \,.\, \varphi)$ неубывающая [0]-функция и, таким образом, $\mathscr{G}_{0,0} - \mathscr{F}$ неубывающая [0]-функция. Но тогда на основании (38), $Д^{[0]}(\mathscr{G}_{0,0})$, замечания 1.5, леммы 1.6, теоремы 1.10 и теоремы 2 из [20] выполнено $Д^{[0]}(\mathscr{G}_{0,0} - \mathscr{F})$ и $Д^{[0]}(\mathscr{F})$. Отсюда мы ввиду (38) и замечания 1.5 получаем $Д^{[0]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$.

Итак, мы доказали $\mathscr{P}(\mathscr{F}, \varphi) \,\&\, \mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$.

Определение. Пусть $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}S^{[0]}$. [0]-функцию $\mathscr{F}$ мы назовем неопределенным $\mathfrak{P}$-интегралом (соотв. w$\mathfrak{P}$-интегралом) от $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, если выполнено $\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$ (соотв. $\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$).

Мы заметим, что ввиду теоремы 2.1 и замечаний 2.1 и 2.2 это определение является вполне подходящим.

Замечание 2.3. Из замечания 2.2 непосредственно следует однозначность и монотонность $\mathfrak{P}$-интеграла (соотв. w$\mathfrak{P}$-интеграла).

Лемма **2.1.** Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция и φ неубывающая [0]-функция. Тогда

1) если $\mathscr{P}(\mathscr{F}, \varphi)$, то существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция ψ такая, что

$$\psi(0) = 0 \,\&\, \psi(1) = 1 \,\&\, \forall x^{[0]} y^{[0]}(0 \leqq x^{[0]} < y^{[0]} \leqq$$
$$\leqq 1 \supset \tfrac{1}{2} \,.\, |x^{[0]} \triangle y^{[0]}| \leqq \Delta(\psi, x^{[0]} \triangle y^{[0]})) \,\&\, \underline{D}^{+}_{\ell\ell}(+\infty, \psi, 0) \,\&\, \qquad (39)$$
$$\&\, \underline{D}^{-}_{\ell\ell}(+\infty, \psi, 1)\,,$$

$$\forall \xi^{[0]}(0 < \xi^{[0]} < 1 \,\&\, \neg D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \xi^{[0]}) \supset D_{\ell\ell}(+\infty, \psi, \xi^{[0]}))\,, \qquad (40)$$

$\mathscr{P}(\mathscr{F}, \psi)$ и, следовательно, $\mathrm{AC}(\psi^{-1})$;

2) если $\mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \varphi)$ и $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна, то существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция ψ такая, что (39), (40) и $\mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \psi)$;

3) если $\mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \varphi)$, то существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция ψ такая, что (39),

$$\forall \xi^{[0]}(0 < \xi^{[0]} < 1 \,\&\, \neg\neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \vee \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]})) \supset$$
$$\supset D_{\ell\ell}(+\infty, \psi, \xi^{[0]})) \qquad (41)$$

и $\mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \psi)$.

Доказательство. Пусть q НЧ, $\varphi(1) < 2^{q}$.

1) Пусть $\mathscr{P}(\mathscr{F}, \varphi)$. Тогда $Д^{[0]}(\mathscr{F})$ и согласно теореме 1.2 и лемме 1.16 существует неубывающая [0]-функция $\mathscr{G}_0$, для которой выполнено

$$\mathscr{G}_0(0) = 0 \,\&\, \mathscr{G}_0(1) < 2^{-2} \,\&\, \mathrm{AC}(\mathscr{G}_0) \,\&\, \underline{D}^{+}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}_0, 0) \,\&$$
$$\&\, \underline{D}^{-}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}_0, 1) \,\&\, \forall \xi^{[0]}(0 < \xi^{[0]} < 1 \,\&\, \neg D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \xi^{[0]}) \supset D_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}_0, \xi^{[0]}))\,.$$

Мы определим $z \rightleftharpoons (1 - 2^{-q-2} \,.\, \varphi(1) - \mathscr{G}_0(1))$ и $\psi \rightleftharpoons (2^{-q-2} \,.\, \varphi + \mathscr{G}_0 + h_z)$. Ввиду леммы 1.3, замечаний 2.2 и 1.3 и теоремы 2 из [20] ψ обладает свойствами, требуемыми в части 1 леммы.

2) а) Пусть $\mathscr{G}_1$ [0]-функция такая, что

$$\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangle 1 \supset \mathscr{G}_1(x^{[0]}) = 2^{-4} \,.\, (|x^{[0]}|^{1/2} + 1 - |1 - x^{[0]}|^{1/2}))\,.$$

Согласно теореме 1.3 существует неубывающая [0]-функция $\mathscr{G}_2$ такая, что $\mathscr{G}_2(0) = 0 \,\&\, \mathscr{G}_2(1) < 2^{-4} \,\&\, \forall \xi^{[0]}(0 < \xi^{[0]} < 1 \,\&\, \neg D_{\ell\ell}(\varphi, \xi^{[0]}) \supset D_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}_2, \xi^{[0]}))$.

б) Пусть $\mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \varphi)$. Мы определим

$$v \rightleftharpoons (1 - 2^{-q-2} \,.\, \varphi(1) - \mathscr{G}_1(1) - \mathscr{G}_2(1))$$

и

$$\psi \rightleftharpoons (2^{-q-2} \,.\, \varphi + \mathscr{G}_1 + \mathscr{G}_2 + h_v)\,.$$

Тогда ввиду замечания 2.2 ψ обладает свойствами, требуемыми в части 3 леммы.

в) Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна. Тогда согласно теореме 1.3 существует неубывающая [0]-функция $\mathscr{G}_3$ такая, что

$$\mathscr{G}_3(0) = 0 \,\&\, \mathscr{G}_3(1) < 2^{-4} \,\&\, \forall \xi^{[0]}(0 < \xi^{[0]} < 1 \,\&$$

$$\& \neg D_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}_3, \xi^{[0]}) \supset \neg\neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \,\&$$

$$\& \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \vee D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \xi^{[0]})))\,.$$

Мы определим $w \rightleftharpoons (1 - 2^{-q-2} \,.\, \varphi(1) - \mathscr{G}_1(1) - \mathscr{G}_2(1) - \mathscr{G}_3(1))$ и $\psi \rightleftharpoons (2^{-q-2} \,.\, \varphi + \mathscr{G}_1 + \mathscr{G}_2 + \mathscr{G}_3 + h_w)$. Тогда если выполнено $\mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \varphi)$, то ввиду замечания 2.2 [0]-функция ψ обладает свойствами, требуемыми в части 2 леммы.

Лемма 2.2. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция и ψ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция такие, что $\mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \psi)$, (39) и (41). Тогда

$$\forall \xi^{[0]}(\neg\neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \vee \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]})) \supset$$

$$\supset D_{\ell\ell}(0, \mathscr{F} * \psi^{-1}, Op[\psi]\,(\xi^{[0]}))) \tag{42}$$

и

$$\neg\exists \xi^{[0]}(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F} * \psi^{-1}, \xi^{[0]}) \vee \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F} * \psi^{-1}, \xi^{[0]}))\,. \tag{43}$$

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием леммы 1.13 и леммы 1.4 из [6].

Обозначение. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, а ψ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция. Тогда мы посредством $\mathscr{W}(\mathscr{F}, \psi)$ обозначим: выполнено $\psi(0) = 0 \,\&\, \psi(1) = 1$ и (42).

Лемма 2.3. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция и ψ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция такие, что $\mathscr{W}(\mathscr{F}, \psi)$. Тогда

1) $\forall \xi^{[0]}\, \exists \eta^{[0]}(\mathrm{L}^{[1]}(\eta^{[0]}, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \,\&\, (\xi^{[0]} \in \Pi_1^{[0]} \supset \eta^{[0]} \in \Pi_1^{[0]}))$ и, следовательно, $\mathscr{N}(\mathscr{F})$;

2) выполнено

$$\forall a \xi^{[0]}(0 < a \supset \underline{D}[\mathscr{F} + a \,.\, \psi]\,(\xi^{[0]}) > -\infty \,\&$$

$$\& \bar{D}[\mathscr{F} - a \,.\, \psi]\,(\xi^{[0]}) < +\infty)\,; \tag{44}$$

3) $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}) \supset \mathscr{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \psi)$.

Доказательство. Достаточно использовать лемму 1.13, замечание 1.6 из [6] и лемму 2 из [18] и заметить, что для любой [0]-функции $\mathscr{G}$ выполнено

$$\forall \xi^{[0]}(\mathrm{Bd}(\mathscr{G}, \xi^{[0]}) \equiv \neg(\underline{D}_{\mathscr{M}}(-\infty, \mathscr{G}, \xi^{[0]}) \vee \bar{D}_{\mathscr{M}}(+\infty, \mathscr{G}, \xi^{[0]}))),$$

где Bd предикат, введенный в [18], стр. 584.

Непосредственным следствием лемм 1.18, 2.1, 2.2 и 2.3 и теоремы 5 из [22] является следующее утверждение.

Лемма 2.4. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F})$. Тогда

1) $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F})\,\&\,\mathscr{N}(\mathscr{F})$ и существует [1]-функция $\mathscr{G}$ такая, что $\forall x^{[0]}(\mathscr{G}(x^{[0]}) = \mathscr{F}(x^{[0]}))$,

2) если $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна, то

$$\mathrm{VwBg}_{\bigcirc}(\mathscr{F})\,\&\,(\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}) \supset \mathrm{WACG}_{\bigcirc}(\mathscr{F})).$$

На основании лемм 2.1, 2.2 и 2.3 мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2.2. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция. Тогда выполнено $\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F})$ в том и только том случае, если верно $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F})$ и существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция ψ такая, что $\mathscr{W}(\mathscr{F}, \psi)$.

Теорема 2.3. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\mathfrak{P}(\mathscr{F})$. Тогда

1) существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция ψ такая, что $\mathscr{P}(\mathscr{F}, \psi)$, (39), $\mathrm{AC}(\psi^{-1})$, (40), (42) и (43);

2) выполнено $\mathrm{WACG}_{\bigcirc}(\mathscr{F})\,\&\,\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F})$, $\mathscr{F}$ обладает свойством (N)* и представима в виде суперпозиции двух [0]-абсолютно непрерывных на $0 \triangle 1$ [0]-функций.

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием замечания 2.2, лемм 2.1, 2.2 и 2.4 и теоремы 5 из [22].

На основании теоремы 2.3 и леммы 2.3 верно следующее утверждение.

Теорема 2.4. Для [0]-функции $\mathscr{F}$ имеет место $\mathfrak{P}(\mathscr{F})$ в том и только том случае, если $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна, выполнено $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F})$ и существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция ψ такая что $\text{Д}^{[0]}(\psi)\,\&\,\mathscr{W}(\mathscr{F}, \psi)$.

Легко доказать следующее утверждение.

Лемма 2.5. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, ψ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция, φ неубывающая [0]-функция и z [0]-КДЧ такие, что $\mathscr{W}(\mathscr{F}, \psi)\,\&\,\varphi(0) = 0\,\&\,\&\, z = (\varphi(1) + \psi(1))$. Тогда $\mathscr{W}(\mathscr{F}, z^{-1} . (\psi + \varphi))$.

Теорема 2.5. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$ и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ такие, что

$$(\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \vee \text{Д}^{ak}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}))\,\&\,(\mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]}) \vee \mathfrak{T}(\mathscr{F})). \tag{45}$$

Тогда верно $\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$ (соотв. $w\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$) в том и только том случае, если $\{F_n\}_n^{[0]}$ является $\mathfrak{P}$-интегрируемым (соотв. $w\mathfrak{P}$-интегрируемым) на $0 \triangle 1$.

Доказательство. Ввиду замечаний 2.1 и 2.2 нам достаточно ограничиться следующим.

Пусть $\{F_n\}_n^{[0]}$ является $w\mathfrak{P}$-интегрируемым на $0 \triangle 1$. Тогда согласно теореме 2.1 существуют $[0]$-функция $\mathscr{G}$ и неубывающая $[0]$-функция φ такие, что $\mathscr{P}_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}, \varphi) \,\&\, \mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{G}, \{F_n\}_n^{[0]})$.

Пусть a РЧ, $0 < a$. Тогда $\mathscr{G} + a\,.\,\varphi$ (соотв. $\mathscr{G} - a\,.\,\varphi$) является w-надфункцией (соотв. w-подфункцией) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ и ввиду (45) для почти всех $[0]$-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ выполнено

$$\exists \eta^{[0]}(\mathrm{P}_{\mathscr{U}}(\eta^{[0]}, \{F_n\}_n^{[0]}, \xi^{[0]}) \,\&\, \underline{D}[\mathscr{G} + a\,.\,\varphi]\,(\xi^{[0]}) \geqq \eta^{[0]} \geqq \underline{D}[\mathscr{F}]\,(\xi^{[0]}) \,\&$$

$$\&\, \bar{D}[\mathscr{G} - a\,.\,\varphi]\,(\xi^{[0]}) \leqq \eta^{[0]} \leqq \bar{D}[\mathscr{F}]\,(\xi^{[0]}))\,.$$

Следовательно, согласно теореме 1.12 $\mathscr{G} + a\,.\,\varphi - \mathscr{F}$ и $\mathscr{F} - \mathscr{G} + a\,.\,\varphi$ неубывающие $[0]$-функции.

Но тогда $\mathscr{F} - \mathscr{G}$ постоянная $[0]$-функция.

На основании этой теоремы, теоремы 5 из [22], соответствующих определений и замечания 1 из [23] и замечания 1.5 верны следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}S^{[0]}$ является K-интегрируемым на $0 \triangle 1$, где $K \doteqdot \mathbf{L} \vee K \doteqdot \mathfrak{D}_* \vee K \doteqdot \mathfrak{D}' \vee K \doteqdot \mathfrak{D} \vee K \doteqdot \mathfrak{T}$, и $\mathfrak{P}$-интегрируемым (соотв. $w\mathfrak{P}$-интегрируемым) на $0 \triangle 1$. Тогда $[0]$-функция $\mathscr{F}$ является неопределенным K-интегралом от $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если $\mathscr{F}$ является неопределенным $\mathfrak{P}$-интегралом (соотв. $w\mathfrak{P}$-интегралом) от $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$.

Следствие 2. Пусть $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{n}}S^{[0]}$ и $\mathscr{F}$ $[0]$-функция такие, что $w\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$. Тогда $AC(\mathscr{F}) \,\&\, Д^{[0]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$ (соотв. $AC(\mathscr{F})$) в том и только том случае, если $\{F_n\}_n^{[0]}$ является интегрируемым по Лебегу ($\mathbf{L}$-интегрируемым) на $0 \triangle 1$.

Теорема 2.6. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-функция. Тогда

$$(AC(\mathscr{F}) \supset ACG_*(\mathscr{F})) \,\&\, (ACG_*(\mathscr{F}) \supset \mathfrak{P}(\mathscr{F})) \,\&\, (\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \supset Д^{[0]}(\mathscr{F}) \,\&$$

$$\&\, WACG_{\bigcirc}(\mathscr{F}) \,\&\, w\mathfrak{P}(\mathscr{F})) \,\&\, (\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathfrak{T}(\mathscr{F}) \supset ACG_*(\mathscr{F}))\,.$$

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием замечаний 1.2 и 2.2, теоремы 2.3, леммы 6 и теоремы 6 из [23] и следствия 1 теоремы 2.5.

Теорема 2.7. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-функция, обладающая свойством (N)*, $Д^{[0]}(\mathscr{F})$, а $\{\varphi_m\}_m^{[0]}$ $[0]$-последовательность неубывающих $[0]$-функций такая, что $\forall m Д^{[0]}(\varphi_m)$ и

$$\forall \xi^{[0]} \neg\neg \exists m \neg\neg (\underline{D}[\mathscr{F} + \varphi_m](\xi^{[0]}) > -\infty \vee$$
$$\vee \bar{D}[\mathscr{F} - \varphi_m](\xi^{[0]}) < +\infty). \tag{46}$$

Тогда верно $\mathfrak{P}(\mathscr{F})$.

Доказательство. Пусть $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$ такое, что $Д^{[0]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$. Ввиду замечаний 1.3 и 1.5 и теоремы 2.5 и теоремы 2 из [20] нам достаточно доказать, что для всякого НЧ t существуют неубывающие $[0]$-функции ψ_0 и ψ_1 такие, что

$$\forall i(0 \leqq i \leqq 1 \supset Д^{[0]}(\psi_i) \,\&\, \psi_i(0) = 0 \,\&\, \psi_i(1) < 2^{-t}) \,\&$$
$$\&\, \forall \xi^{[0]}(\underline{D}[\mathscr{F} + \psi_0](\xi^{[0]}) > -\infty \,\&\, \bar{D}[\mathscr{F} - \psi_1](\xi^{[0]}) < +\infty).$$

Пусть t НЧ.

Ввиду теоремы 2 из [20], леммы 3 из [22] и замечания 1.3 $\mathscr{F}$ $[0]$-равномерно непрерывна и выполнено $\forall m Д^{[0]}(\mathscr{F} - \varphi_m)$ и

$$Д^{a\not{b}}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathscr{N}(\mathscr{F}). \tag{47}$$

Согласно лемме 1.21 существует $[0]$-последовательность $[0]$-последовательностей неубывающих $[0]$-функций $\{\{\mathscr{K}_{m,q}\}_q^{[0]}\}_m^{[0]}$ такая, что $\forall mq Д^{[0]}(\mathscr{K}_{m,q})$ и для всяких НЧ m и $[0]$-ПЧ $\xi^{[0]}$, для которых выполнено $\bar{D}[\mathscr{F} - \varphi_m](\xi^{[0]}) < +\infty$, верно $\neg\neg \exists q(\underline{D}[\mathscr{F} - \varphi_m + \mathscr{K}_{m,q}](\xi^{[0]}) \geqq 0)$ и, следовательно, $\neg\neg \exists q(\underline{D}[\mathscr{F} + \mathscr{K}_{m,q}](\xi^{[0]}) \geqq 0)$.

Мы построим $[0]$-последовательность неубывающих $[0]$-функций $\{I_k\}_k^{[0]}$ такую, что для всяких НЧ m и q выполнено

$$I_{m.(m+1)/2} = \varphi_m \quad \text{и} \quad I_{((m+q+1).(m+q+2)/2+q+1)} = \mathscr{K}_{m,q}.$$

Мы на основании (46) получаем

$$\forall k Д^{[0]}(I_k) \,\&\, \forall \xi^{[0]} \neg\neg \exists k(\underline{D}[\mathscr{F} + I_k](\xi^{[0]}) > -\infty). \tag{48}$$

Ввиду (47) и теоремы 1.11 существует $[0]$-последовательность неубывающих $[0]$-функций $\{\mathscr{G}_k\}_k^{[0]}$ такая, что для всякого НЧ k выполнено

$$Д^{[0]}(\mathscr{G}_k) \,\&\, \mathscr{G}_k(0) = 0 \,\&\, \mathscr{G}_k(1) < 2^{-t-k-2} \,\&$$
$$\&\, \forall \xi^{[0]}(\bar{D}[\mathscr{F} + \mathscr{G}_k](\xi^{[0]}) > -\infty). \tag{49}$$

Пусть k НЧ. Мы используем лемму 1.24 и построим, исходя от $(\mathscr{F} + \mathscr{G}_k)$ и I_k, неубывающую $[0]$-функцию $\mathscr{J}_k$, для которой ввиду (49) выполнено

$$Д^{[0]}(\mathscr{J}_k) \,\&\, \mathscr{J}_k(0) = 0 \,\&\, \mathscr{J}_k(1) < 2^{-t-k-2} \,\&$$
$$\&\, \forall \xi^{[0]}(\underline{D}[\mathscr{F} + I_k](\xi^{[0]}) > -\infty \supset \underline{D}[\mathscr{F} + \mathscr{G}_k + \mathscr{J}_k](\xi^{[0]}) > -\infty). \tag{50}$$

Существует неубывающая [0]-функция ψ_0, для которой верно $\psi_0 = = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathscr{G}_k + \mathscr{J}_k)$ и, следовательно, $\psi_0(0) = 0 \,\&\, \psi_0(1) < 2^{-t}$ и согласно теореме 2 и следствию 2 теоремы 4 из [20] имеет место $Д^{[0]}(\psi_0)$. На основании (48) и того, что для любого НЧ k выполнено (50), мы получаем
$\forall\xi^{[0]}(\underline{D}[\mathscr{F} + \psi_0](\xi^{[0]}) > -\infty)$.

Аналогичным способом можно построить неубывающую [0]-функцию ψ_1 такую, что $Д^{[0]}(\psi_1) \,\&\, \psi_1(0) = 0 \,\&\, \psi_1(1) < 2^{-t} \,\&\, \forall\xi^{[0]}(\bar{D}[\mathscr{F} - \psi_1](\xi^{[0]}) < +\infty)$.

Следствие 1. Пусть $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$, $\mathscr{F}$ [0]-функция и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ такие, что

$$(\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]}) \vee Д^{a\ell}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})) \,\&\, \mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]}) \tag{51}$$

и существует надфункция (соотв. подфункция) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$. Тогда $\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$ и, следовательно, $\{F_n\}_n^{[0]}$ является $\mathfrak{P}$-интегрируемым на $0 \triangle 1$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{G}$ надфункция для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$. Тогда $\mathscr{G}$ [0]-равномерно непрерывна, $Д^{[0]}(\mathscr{G})$ и ввиду замечания 2.1 и теоремы 1.12 $\mathscr{G} - \mathscr{F}$ неубывающая и, следовательно, [0]-равномерно непрерывная [0]-функция. Согласно этому, (51), замечанию 1.5, лемме 1.6 и теореме 1.10, замечанию 1, лемме 3 и теореме 2 из [22], теореме 2 из [20] и замечанию 1.3 верно $Д^{[0]}(\mathscr{G} - \mathscr{F}) \,\&\, Д^{[0]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$ и $\mathscr{F}$ обладает свойством (N)*. Для завершения доказательства достаточно применить теорему 2.7.

Следствие 2. Пусть $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ является $\mathfrak{D}$-интегрируемым (соотв. w$\mathfrak{P}$-интегрируемым) на $0 \triangle 1$. Тогда $\{F_n\}_n^{[0]}$ является $\mathfrak{P}$-интегрируемым на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если существует [0]-функция, являющаяся или надфункцией или подфункцией для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$.

Доказательство. Верность утверждения непосредственно следует из теоремы 5 из [22], теоремы 2.1, леммы 2.4 и следствия 1 теоремы 2.7.

Лемма 2.6. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция и ψ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция такие, что

$$\psi(0) = 0 \,\&\, \psi(1) = 1 \,\&\, \neg\, \exists\xi^{[0]}(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F} * \psi^{-1}, \xi^{[0]}) \,\&$$
$$\& \, \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F} * \psi^{-1}, \xi^{[0]}))\,. \tag{52}$$

Тогда, существует [0]-последовательность неубывающих [0]-функций $\{\varphi_m\}_m^{[0]}$, для которой выполнено (46) и $(Д^{[0]}(\mathscr{F}) \,\&\, Д^{[0]}(\psi) \supset \forall m Д^{[0]}(\varphi_m))$.

Доказательство. Достаточно использовать лемму 1.22.

На основании леммы 1.21, теоремы 1.3, теоремы 1.2 и леммы 1.16 и теоремы 2 и следствия 2 теоремы 4 из [20] легко доказать следующее утверждение.

Лемма 2.7. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция и $\{\varphi_m\}_m^{[0]}$ [0]-последовательность неубывающих [0]-функций такие, что (46). Тогда существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция ψ, для которой выполнено (39), (40), (43) и $(\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}) \,\&\, \forall m \text{Д}^{[0]}(\varphi_m) \supset \text{Д}^{[0]}(\psi) \,\&\, \text{AC}(\psi^{-1}))$.

Следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы 2.7 и леммы 2.6.

Теорема 2.8. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, обладающая свойством (N)*, $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F})$, и ψ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция, для которой выполнено (52) и $\text{Д}^{[0]}(\psi)$. Тогда $\mathfrak{P}(\mathscr{F})$.

Замечание 2.4. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\mathfrak{T}(\mathscr{F})$, и $\{\varphi_m\}_m^{[0]}$ [0]-последовательность неубывающих [0]-функций такие, что (46). Тогда

а) согласно определению свойства $\mathfrak{T}$ [20] и лемме 3 из [22] $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна и верно $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}) \,\&\, \text{Д}^{a\ell}(\mathscr{F})$;

б) ввиду леммы 1.17 для всякого [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ не может не существовать [0]-последовательность [0]-сегментов $\{H_n\}_n^{[0]}$, для которой выполнено $\mathscr{K}(\{H_n\}_n^{[0]}) \,\&\, \neg\exists n(\xi^{[0]} \in H_n) \,\&\, \neg\neg\exists q\ \text{BVS}(q, [\mathscr{F}, \{H_n\}_n^{[0]}], 0 \triangle 1)$ и, следовательно, согласно теореме 3 и следствию 1 теоремы 10 из [20] и замечанию 1.3 верно $\mathscr{N}([\mathscr{F}, \{H_n\}_n^{[0]}])$.

Таким образом, выполнено $\mathscr{N}(\mathscr{F})$ и $\mathscr{F}$ обладает свойством (N)* (замечание 1.3).

Ввиду теорем 2.6 и 2.7 и замечания 2.4 верно следующее утверждение.

Теорема 2.9. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\mathfrak{T}(\mathscr{F})$, а $\{\varphi_m\}_m^{[0]}$ [0]-последовательность неубывающих [0]-функций такая, что $\forall m \text{Д}^{[0]}(\varphi_m)$ и (46). Тогда $\text{ACG}_*(\mathscr{F})$.

Теорема 2.10. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция и $\{\varphi_m\}_m^{[0]}$ [0]-последовательность неубывающих [0]-функций, для которых выполнено

$$\neg\exists\xi^{[0]}(D_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \vee D_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}))$$

и (46). Тогда существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция φ такая, что $\mathscr{W}(\mathscr{F}, \varphi)$ и, следовательно, $\text{der}^{[1]}(\mathscr{F}) \supset \text{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F})$.

Теорему 2.10 можно доказать на основании лемм 1.20, 1.21, 1.13, 1.15 и 2.3 и теоремы 1.3 способом аналогичным использованному в доказательствах теорем 2.7, 2.1 и леммы 2.1.

Теорема 2.11. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ такие, что $\text{Д}^{a\ell}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]})$. Тогда

а) если существует [0]-последовательность неубывающих [0]-функций $\{\varphi_m\}_m^{[0]}$, для которой выполнено (46), то верно $\text{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F})$;

б) если существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция ψ такая, что (52), то выполнено $\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F})$.

Доказательство. Ввиду леммы 2.6 можно на основании теоремы 1.11 и лемм 1.20 и 1.21 построить способом, использованным в доказательстве теоремы 2.7, для всякого НЧ t неубывающие [0]-функции $\psi_{0,t}$ и $\psi_{1,t}$ такие, что

$$\psi_{0,t}(0) = \psi_{1,t}(0) = 0 \,\&\, \psi_{0,t}(1) < 2^{-t} \,\&\, \psi_{1,t}(1) < 2^{-t} \,\&$$
$$\&\, \forall \xi^{[0]}(\underline{D}[\mathscr{F} + \psi_{0,t}](\xi^{[0]}) > -\infty \,\&\, \bar{D}[\mathscr{F} - \psi_{1,t}](\xi^{[0]}) < +\infty).$$

Ввиду этого и теоремы 1.10 из [6] для почти всех [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ верно $\exists \eta^{[0]} D_{\not{k}\ell}(\eta^{[0]}, \mathscr{F}, \xi^{[0]})$. Следовательно, мы на основании $\text{Д}^{a\not{k}}(\mathscr{F})$ и замечания 1.5 получаем $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F})$. Для завершения доказательства достаточно применить теорему 2.5.

Следствие 1. Пусть $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{\Pi}}\mathrm{S}^{[0]}$, $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ такие, что $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \,\&$ $\&\, \mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]})$. Тогда если существует w-надфункция (соотв. w-подфункция) для $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, то $\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathrm{WACG}_{\mathrm{O}}(\mathscr{F})$ и, следовательно, $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ является $\mathrm{w}\mathfrak{P}$-интегрируемым и $\mathfrak{D}'$-интегрируемым на $0 \triangle 1$.

Доказательство. Утверждение является следствием теоремы 1.12, части 4 замечания 1.2, теоремы 2.11 и леммы 2.4.

Следствие 2. Пусть $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{\Pi}}\mathrm{S}^{[0]}$ является $\mathfrak{D}$-интегрируемым (соотв. $\mathfrak{T}$-интегрируемым) на $0 \triangle 1$ и пусть существует [0]-функция, являющаяся или w-надфункцией или w-подфункцией для $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$. Тогда $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ является $\mathrm{w}\mathfrak{P}$-интегрируемым (соотв. $\mathrm{w}\mathfrak{P}$-интегрируемым и $\mathfrak{D}'$-интегрируемым) на $0 \triangle 1$.

Доказательство. Достаточно использовать теорему 5 из [22], замечание 2.4, теоремы 1.12 и 2.11 и лемму 2.4.

Следствие 3. Пусть $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathrm{\Pi}}\mathrm{S}^{[0]}$, $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция и $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ такие, что $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \,\&$ $\&\, \mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]})$. Пусть $\mathscr{G}$ [0]-функция, $\text{Д}^{a\not{k}}(\mathscr{G})$, являющаяся w-надфункцией (соотв. w-подфункцией) для $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$. Тогда $\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \,\&\, \text{Д}^{a\not{k}}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}) \,\&\, \mathrm{WACG}(\mathscr{F})$ и, следовательно, $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ является $\mathrm{w}\mathfrak{P}$-интегрируемым и $\mathfrak{D}$-интегрируемым на $0 \triangle 1$.

Доказательство. Согласно теореме 1.12, замечанию 1.5, лемме 1.6 и теореме 1.10 $\mathscr{G} - \mathscr{F}$ монотонная [0]-функция, верно $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{G}) \,\&\, \text{Д}^{[0]}(\mathscr{G} - \mathscr{F})$ и, следовательно, ввиду леммы 3 из [22] $\text{Д}^{a\not{k}}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})$. Таким образом, $\mathscr{G}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция и ввиду замечания 1 и теорем 16, 5 и 6 из [22] выполнено $\mathrm{W\alpha G}(\mathscr{F})$. Согласно теореме 2.11 и лемме 2.4 верно $\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F})\,\&$ $\&\,\mathscr{N}(\mathscr{F})$. Для завершения доказательства достаточно применить теорему 5 из [22].

Пример 2.2. Существуют [0]-измеримые [0]-функции $\mathscr{F}$ и f и $[0]$-Π_2Ч η такие, что $\mathscr{F}$ псевдоравномерно непрерывна, $\underbracket{\eta}$ — монотонная последовательность РЧ, выполнено

$$Д^{a\not h}(\mathscr{F})\,\&\,\forall x^{[0]}D^{[0]}(f(x^{[0]}),\mathscr{F},x^{[0]})\,\&$$

$$\&\,\forall\xi^{[0]}(\neg(\xi^{[0]}=\eta)\supset D^{[1]}(\mathscr{F},\xi^{[0]}))\,\&\,\underline{D}[\mathscr{F}](\eta)>-\infty\,\&\,\bar{D}[\mathscr{F}](\eta)=+\infty$$

и, следовательно,

а) $\mathrm{der}^{[0]}(\mathscr{F})\,\&\,\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F})\,\&\,\mathscr{N}(\mathscr{F})$ и $\mathscr{F}$ является w-надфункцией для f на $0\triangle 1$;

б) ввиду замечания 2.1 и теоремы 3 из [18] не существует никакой w-подфункции для f на $0\triangle 1$.

Пример 2.3. Существуют $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}\in{}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$ и [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{F}$ [0]-слабо ограниченной вариации на $0\triangle 1$ такие, что

а) $$\mathrm{der}^{[0]}(\mathscr{F},\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})\,\&\,\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F},\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})\,\&\,Д^{[1]}(\mathscr{F},\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]})\,\&$$

$$\&\,\mathscr{A}_{\ell\ell}(\mathscr{F})\,\&\,\mathscr{N}(\mathscr{F})\,\&\,\neg\exists\xi^{[0]}\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty,\mathscr{F},\xi^{[0]})$$

и, следовательно, $\mathscr{F}$ w-надфункция для $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $0\triangle 1$,

б) не существует никакой w-подфункции для $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $0\triangle 1$ и, следовательно, $\negД^{a\not h}(\mathscr{F})$ (теорема 2.11).

Лемма 2.8. Пусть $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_1$ [0]-функции, ψ_0 и ψ_1 возрастающие на $0\triangle 1$ [0]-функции, у [0]-КДЧ, $\{H_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-сегментов, $\mathscr{H}(\{H_n\}_n^{[0]})$, и H [0]-сегмент. Пусть $\mathscr{W}(\mathscr{F}_0,\psi_0)\,\&\,\mathscr{W}(\mathscr{F}_1,\psi_1)$. Тогда

1) существуют возрастающие на $0\triangle 1$ [0]-функции $\mathscr{G}_0$ и $\mathscr{G}_1$ такие, что

$$\forall i(0\leqq i\leqq 1\supset\mathscr{G}_i(0)=0\,\&\,\mathscr{G}_i(1)=1\,\&\,\forall\xi^{[0]}(0<\xi^{[0]}<1\supset$$

$$\supset(\neg D_{\ell\ell}(\psi_i,\xi^{[0]})\supset D_{\ell\ell}(+\infty,\mathscr{G}_i,\xi^{[0]})))\,\&\,\underline{D}_{\ell\ell}^{+}(+\infty,\mathscr{G}_i,0)\,\&$$

$$\&\,\underline{D}_{\ell\ell}^{-}(+\infty,\mathscr{G}_i,1)\,\&\,(Д^{[0]}(\psi_i)\supset Д^{[0]}(\mathscr{G}_i)))\,;$$

2) выполнено

$$\mathscr{W}(|\mathscr{F}_0|,\psi_0),\ \mathscr{W}(\mathrm{y}\,.\,\mathscr{F}_0,\psi_0)\,,$$

$$\mathscr{W}(\mathscr{F}_0+\mathscr{F}_1,\tfrac{1}{4}\,.\,(\psi_0+\psi_1+\mathscr{G}_0+\mathscr{G}_1)),\ \ \mathscr{W}(\mathscr{F}_0\,.\,\mathscr{F}_1,\tfrac{1}{4}\,.\,(\psi_0+\psi_1+\mathscr{G}_0+\mathscr{G}_1))\,,$$

$$\mathscr{W}([\mathscr{F}_0,\{H_n\}_n^{[0]}],\tfrac{1}{2}\,.\,(\psi_0+\mathscr{G}_0)),\ \ \mathscr{W}((\mathscr{F}_0)^{[\mathrm{H}]},\psi_0)\,,$$

$$\left(\neg\neg\exists m(|\mathscr{F}_0|\geqq 2^{-m})\supset\mathscr{W}\left(\frac{1}{\mathscr{F}_0},\psi_0\right)\right).$$

Доказательство. [0]-функции $\mathscr{G}_0$ и $\mathscr{G}_1$ можно построить на основании теоремы 1.2, лемм 1.15 и 1.16 и теоремы 1.3. Верность второй части утверждения легко установить непосредственной проверкой с использованием лемм 2.3 и 2.5.

Лемма 2.9. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция и ψ и g возрастающие на $0 \triangle 1$ [0]-функции такие, что $\mathscr{W}(\mathscr{F}, \psi) \,\&\, g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1 \,\&\, \mathrm{AC}(g)$. Тогда существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция φ, для которой выполнено

$$\mathscr{W}(\mathscr{F} * g, \varphi) \,\&\, (\text{Д}^{[0]}(\psi) \,\&\, \mathrm{AC}(g^{-1}) \supset \text{Д}^{[0]}(\varphi)).$$

Доказательство. Ввиду теоремы 1.2, леммы 1.16 и замечания 1 из [22] существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{K}$ такая, что

$$\mathscr{K}(0) = 0 \,\&\, \mathscr{K}(1) = 1 \,\&\, \underline{D}^{+}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{K}, 0) \,\&\, \underline{D}^{-}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{K}, 1) \,\&$$

$$\& \,\forall \xi^{[0]}(0 < \xi^{[0]} < 1 \,\&\, \neg D_{\ell\ell}(g, \xi^{[0]}) \supset D_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{K}, Op[g]\,(\xi^{[0]}))). \tag{53}$$

Мы определим $\psi_0 \rightleftharpoons \frac{1}{2}\,.\,(\psi + \mathscr{K})$ и $\varphi \rightleftharpoons \psi_0 * g$. Тогда φ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция, $\varphi(0) = 0 \,\&\, \varphi(1) = 1$,

$$\mathscr{W}(\mathscr{F}, \psi_0) \,\&\, \varphi^{-1} = g^{-1} * (\psi_0)^{-1} \,\&\, \mathscr{F} * g * \varphi^{-1} = \mathscr{F} * (\psi_0)^{-1} \tag{54}$$

(см. лемму 2.5) и согласно теореме 2 из [20] и замечанию 1 и теореме 14 из [22] верно $\text{Д}^{[0]}(\psi) \,\&\, \mathrm{AC}(g^{-1}) \supset \text{Д}^{[0]}(\varphi)$.

Пусть η [0]-ПЧ такое, что

$$\neg\neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F} * g, \eta) \vee \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F} * g, \eta)).$$

а) Пусть

$$\neg\neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, Op[g]\,(\eta)) \vee \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, Op[g]\,(\eta))). \tag{55}$$

Тогда ввиду (54) верно

$$D_{\ell\ell}(0, \mathscr{F} * (\psi_0)^{-1}, Op[\psi_0]\,(Op[g]\,(\eta))), \tag{56}$$

т. е.

$$D_{\ell\ell}(0, \mathscr{F} * g * \varphi^{-1}, Op[\varphi]\,(\eta)).$$

б) Пусть (55) неверно. Тогда $\neg D_{\ell\ell}(g, \eta)$ и ввиду (53), (54) и леммы 1.13 выполнено (56).

Ввиду теоремы 2 из [20], теоремы 2.4 и лемм 2.8, 2.9 и 1.7 верно следующее утверждение.

Теорема 2.12. Пусть $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_1$ [0]-функции, $\{\mathrm{F}_{0,n}\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, $\{\mathrm{F}_{1,n}\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, g возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция, y и z [0]-КДЧ, $\{H_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность $[0]$-сегментов, $\mathscr{H}(\{H_n\}_n^{[0]})$, и H $[0]$-сегмент такие, что

$$\mathfrak{P}(\mathscr{F}_0, \{\mathrm{F}_{0,n}\}_n^{[0]}) \,\&\, \mathfrak{P}(\mathscr{F}_1, \{\mathrm{F}_{1,n}\}_n^{[0]}) \,\&\, g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1 \,\&\, \mathrm{AC}(g) \,\&\, \mathrm{AC}(g^{-1})\,.$$

Тогда выполнено

$$\mathfrak{P}(|\mathscr{F}_0|)\,, \quad \mathfrak{P}(\mathrm{y}\,.\,\mathscr{F}_0 + \mathrm{z}, \mathrm{y}\,.\,\{\mathrm{F}_{0,n}\}_n^{[0]})\,,$$

$$\mathfrak{P}(\mathscr{F}_0 + \mathscr{F}_1, \; \{\mathrm{F}_{0,n}\}_n^{[0]} + \{\mathrm{F}_{1,n}\}_n^{[0]})\,, \; \mathfrak{P}(\mathscr{F}_0\,.\,\mathscr{F}_1)\,, \; \mathfrak{P}(\mathscr{F}_0 * g)\,,$$

$$\mathfrak{P}([\mathscr{F}_0, \{H_n\}_n^{[0]}])\,, \quad \mathfrak{P}((\mathscr{F}_0)^{[\mathrm{H}]})\,,$$

$$\left(\exists m(|\mathscr{F}_0| \geqq 2^{-m}) \supset \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\mathscr{F}_0}\right)\right).$$

Ввиду теоремы 2.2, лемм 1.6, 1.7, 2.8 и 2.9 мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2.13. Пусть $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_1$ $[0]$-функции, $\{\mathrm{F}_{0,n}\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, $\{\mathrm{F}_{1,n}\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, g возрастающая на $0 \triangle 1$ $[0]$-функция, y и z $[0]$-КДЧ, $\{H_n\}_n^{[0]}$ $S_\sigma^{[0]}$-множество, $\mathscr{H}(\{H_n\}_n^{[0]})$, и H $[0]$-сегмент такие, что

$$\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}_0, \{\mathrm{F}_{0,n}\}_n^{[0]}) \,\&\, \mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}_1, \{\mathrm{F}_{1,n}\}_n^{[0]}) \,\&\, g(0) = 0 \,\&\, g(1) =$$
$$= 1 \,\&\, \mathrm{AC}(g) \,\&\, \mathrm{AC}(g^{-1})\,.$$

Тогда

а) выполнено

$$\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathrm{y}\,.\,\mathscr{F}_0 + \mathrm{z}, \mathrm{y}\,.\,\{\mathrm{F}_{0,n}\}_n^{[0]})\,,$$

$$\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}_0 + \mathscr{F}_1, \{\mathrm{F}_{0,n}\}_n^{[0]} + \{\mathrm{F}_{1,n}\}_n^{[0]})\,, \quad \mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}_0 * g)\,,$$

$$\mathrm{w}\mathfrak{P}([\mathscr{F}_0, \{H_n\}_n^{[0]}])\,, \quad \mathrm{w}\mathfrak{P}((\mathscr{F}_0)^{[\mathrm{H}]})\,;$$

б) если $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_1$ $[0]$-измеримые $[0]$-функции, то

$$\mathrm{w}\mathfrak{P}(|\mathscr{F}_0|)\,, \quad \mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}_0\,.\,\mathscr{F}_1)\,, \quad \left(\exists m(|\mathscr{F}_0| \geqq 2^{-m}) \supset \mathrm{w}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{\mathscr{F}_0}\right)\right).$$

Замечание 2.5. Пусть $\{\mathrm{F}_{0,n}\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, $\{\mathrm{F}_{1,n}\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_1$ $[0]$-функции и y_0 и y_1 $[0]$-КДЧ. Тогда ввиду теорем 2.1, 2.12 и 2.13 выполнено: если для НЧ i, $0 \leqq i \leqq 1$, $\{\mathrm{F}_{i,n}\}_n^{[0]}$ является $\mathfrak{P}$-интегрируемым (соотв. w$\mathfrak{P}$-интегрируемым) на $0 \triangle 1$ и $\mathscr{F}_i$ неопределенный $\mathfrak{P}$-интеграл (соотв. w$\mathfrak{P}$-интеграл) от $\{\mathrm{F}_{i,n}\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, то

$$\mathrm{y}_0\,.\,\{\mathrm{F}_{0,n}\}_n^{[0]} + \mathrm{y}_1\,.\,\{\mathrm{F}_{1,n}\}_n^{[0]} \tag{57}$$

является $\mathfrak{P}$-интегрируемым (соотв. w$\mathfrak{P}$-интегрируемым) на $0 \triangle 1$ и $[0]$-функция $(\mathrm{y}_0\,.\,\mathscr{F}_0 + \mathrm{y}_1\,.\,\mathscr{F}_1)$ является неопределенным $\mathfrak{P}$-интегралом (соотв. w$\mathfrak{P}$-интегралом) от (57) на $0 \triangle 1$.

На основании теоремы 2.13, леммы 2.4, следствия теоремы 1.10, замечания 2.2 и теоремы 2.2 из [6] верно следующее утверждение.

Теорема 2.14. Пусть $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$, $\mathscr{F}$ [0]-функция, $w\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$, а H [0]-сегмент, $H \subseteq 0 \triangle 1$. Тогда

а) $AC(\mathscr{F}^{[H]}) \equiv \exists y^{[0]}\, \mathrm{Var}(y^{[0]}, \mathscr{F}, H)$,

б) если существует НЧ m такое, что для почти всех m-КДЧ $x^{[m]}$ из H выполнено

$$\exists y^{[m]}(P_{\ell\ell}(y^{[m]}, \{F_n\}_n^{[0]}, x^{[m]})\,\&\, 0 \leqq y^{[m]}),$$

то $\mathscr{F}^{[H]}$ неубывающая [0]-функция и, следовательно, $AC(\mathscr{F}^{[H]})$.

Лемма 2.10. Пусть $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$, $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\{\xi_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-ПЧ и $\mathscr{K}$ [0]-функция типа $\bar{\alpha}G_*$ такие, что $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})\,\&$ $\&\, \mathscr{N}(\mathscr{F}, \{\xi_k\}_k^{[0]})$ и $\mathscr{K}$ является надфункцией (соотв. подфункцией) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$. Тогда выполнено $ACG_*(\mathscr{F})\,\&\, Д^{[0]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$ и, следовательно, $\{F_n\}_n^{[0]}$ является $\mathfrak{D}_*$-интегрируемым на $0 \triangle 1$.

Доказательство. Пусть, например, $\mathscr{K}$ надфункция. Согласно следствию 1 теоремы 2.7 и лемме 1.14 выполнено $\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$ (и, следовательно, $Д^{[0]}(\mathscr{F},$ $\{F_n\}_n^{[0]})$) и существуют [0]-функция $\mathscr{G}$ типа ACG_* и $\{G_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ такие, что $\{F_n\}_n^{[0]} \leqq \{G_n\}_n^{[0]}\,\&\, Д^{[0]}(\mathscr{G}, \{G_n\}_n^{[0]})$. Ввиду теорем 2.6 и 2.12, замечания 2.2 и теоремы 2.14 $\mathscr{G} - \mathscr{F}$ неубывающая [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция. Следовательно, на основании теорем 5 и 6 из [22] выполнено $ACG_*(\mathscr{F})$.

Ввиду замечания 1.2, леммы 1.14 и замечания 2, леммы 6 и теоремы 7 из [23] верно следующее утверждение.

Теорема 2.15. $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ является $\mathfrak{D}_*$-интегрируемым на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если существуют надфункция и подфункция для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, являющиеся [0]-функциями типа $\bar{\alpha}G_*$.

Пример 2.4. Существуют $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ и [0]-функция $\mathscr{G}$ такие, что

$$0 \leqq \{F_n\}_n^{[0]}\,\&\, \bar{\alpha}G_*(\mathscr{G})\,\&\, Д^{[0]}(\mathscr{G}, \{F_n\}_n^{[0]})\,\&\, \neg\, \exists \xi^{[0]} \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}, \xi^{[0]})$$

и $\{F_n\}_n^{[0]}$ не является K-интегрируемым на $0 \triangle 1$, где

$$K \doteqdot \mathfrak{T} \vee K \doteqdot \mathfrak{D} \vee K \doteqdot w\mathfrak{P}\,. \tag{58}$$

Пример 2.5. Существуют $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$, [0]-функция $\mathscr{F}$ и неубывающая [0]-функция $\mathscr{G}$ такие, что

1) $\mathfrak{P}(\mathscr{F})\,\&\, Д^{[0]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$, $\mathscr{G}$ надфункция для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ и, следовательно, $\alpha(\mathscr{G})$ (и, тем более, $\alpha G_*(\mathscr{G})$) и

2) выполнено $\neg ACG_*(\mathscr{F})$.

Замечание 2.6. Для [0]-измеримой [0]-функции f и [0]-функции $\mathscr{F}$ из примера 2.1 выполнено:

а) $\mathscr{F}$ является надфункцией для f на $0 \triangle 1$, обладающей свойством α, б) $0 \leqq f$ и h_0 является $[0]$-абсолютно непрерывной на $0 \triangle 1$ подфункцией для f на $0 \triangle 1$;

в) f не является K-интегрируемой на $0 \triangle 1$, где (58).

Ввиду леммы 1.7 и теорем 2.1, 2.12 и 2.13 верно следующее утверждение.

Теорема 2.16. Пусть $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$ и g возрастающая на $0 \triangle 1$ $[0]$-функция, $g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1 \,\&\, \mathrm{AC}(g) \,\&\, \mathrm{AC}(g^{-1})$. Тогда существует $\{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$ такое, что

1) для почти всех $[0]$-КДЧ $x^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ верно

$$\exists y^{[0]} z^{[0]} (\mathrm{P}^{[0]}(y^{[0]}, \{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}, g(x^{[0]})) \,\&\, D^{[0]}(z^{[0]}, g, x^{[0]}) \,\&$$
$$\& \, \mathrm{P}^{[0]}(y^{[0]} \,.\, z^{[0]}, \{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]}, x^{[0]})),$$

2) а) $[0]$-функция $\mathscr{F}$ является неопределенным $\mathfrak{P}$-интегралом (соотв. w$\mathfrak{P}$-интегралом) от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если $[0]$-функция $\mathscr{F} * g$ является неопределенным $\mathfrak{P}$-интегралом (соотв. w$\mathfrak{P}$-интегралом) от $\{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, и, следовательно,

б) $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ является $\mathfrak{P}$-интегрируемым (соотв. w$\mathfrak{P}$-интегрируемым) на $0 \triangle 1$ тогда и только тогда, когда $\{\mathrm{G}_n\}_n^{[0]}$ является $\mathfrak{P}$-интегрируемым (соотв. w$\mathfrak{P}$-интегрируемым) на $0 \triangle 1$.

На основании лемм 1.6 и 1.15, теорем 2.1, 2.12 и 2.13, замечания 2.2 и теоремы 5 и следствия 2 теоремы 4 из [20] легко доказать следующее утверждение.

Теорема 2.17. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-функция, k НЧ, а $\{\mathrm{x}_m\}_m^{[0]}$ $[0]$-последовательность $[0]$-КДЧ из $0 \bigtriangledown 1$ такая, что $\mathrm{x}_m \xrightarrow[m\to\infty]{[0]} 1$. Тогда выполнено

$$(\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \equiv \forall m \mathfrak{P}(\mathscr{F}^{[0 \triangle \mathrm{x}_m]})) \,\&\, (\mathrm{der}^{[k]}(\mathscr{F}) \equiv \forall m \, \mathrm{der}^{[k]}(\mathscr{F}^{[0 \triangle \mathrm{x}_m]})) \,\&$$
$$\& \, (\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \equiv \forall m \, \mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}^{[0 \triangle \mathrm{x}_m]})).$$

Теорема 2.18. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-равномерно непрерывная $[0]$-функция и $\{H_m\}_m^{[0]}$ $[0]$-последовательность $[0]$-сегментов такие, что $\mathscr{H}(\{H_m\}_m^{[0]})$,

$$\forall x^{[0]}(|\mathscr{F}(x^{[0]})| > 0 \supset \exists m(x^{[0]} \in (H_m)^0)) \tag{59}$$

и ряд $\sum\limits_m \langle \omega, \mathscr{F} \rangle (H_m)$ $[0]$-сходится. Тогда

а) $$(\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}) \supset (\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \equiv \forall m \mathfrak{P}(\mathscr{F}^{[H_m]}))) \,\&$$
$$\& \, (\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}) \supset (\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \equiv \forall m \, \mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}^{[H_m]}))),$$

б) для любого НЧ p для почти всех $[p]$-КДЧ $x^{[p]}$ выполнено $\neg \exists m(x^{[p]} \in (H_m)^0) \supset D^{[0]}(0, \mathscr{F}, x^{[p]})$.

Доказательство. 1) Для всякого НЧ m, $H_m \subseteq 0 \triangle 1$, мы используем лемму 5 из [22] и построим [0]-функцию $\mathscr{G}_m$ такую, что

$$\begin{aligned} &\mathrm{AC}(\mathscr{G}_m) \,\&\, \exists y^{[0]}(\mathrm{Var}(y^{[0]}, \mathscr{G}_m, H_m) \,\&\, y^{[0]} \leqq 2 \,.\, \langle \omega, \mathscr{F} \rangle (H_m) + 2^{-m}) \,\& \\ &\& \,\forall x^{[0]}((|\mathscr{G}_m(x^{[0]})| > 0 \supset x^{[0]} \in (H_m)^0) \,\& \\ &\& \,(x^{[0]} \in (H_m)^0 \supset |\mathscr{F}(x^{[0]})| < \mathscr{G}_m(x^{[0]})))\,. \end{aligned} \tag{60}$$

Для любого НЧ m, $\neg(H_m \subseteq 0 \triangle 1)$, мы определим $\mathscr{G}_m \rightleftharpoons h_0$.

Согласно теореме 8 из [23] существует [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{G}$ такая, что $\mathscr{G} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathscr{G}_m$. Ввиду теорем 2.6 и 2.4 существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция ψ_0, $Д^{[0]}(\psi_0) \,\&\, \mathscr{W}(\mathscr{G}, \psi_0)$.

Ввиду этого, (59) и (60) для всякого [0]-ПЧ $\xi^{[0]}$ такого, что

$$\neg\exists m(\xi^{[0]} \in (H_m)^0) \,\&\, \neg\neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \vee \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]})),$$

верно $\neg\neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{G}, \xi^{[0]}) \vee \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}, \xi^{[0]}))$ и, следовательно, $D_{\ell\ell}(0, \mathscr{G} * (\psi_0)^{-1}, Op[\psi_0](\xi^{[0]}))$ и тогда $D_{\ell\ell}(0, \mathscr{F} * (\psi_0)^{-1}, Op[\psi_0](\xi^{[0]}))$.

Кроме того ввиду теоремы 2.9 из [6] и теорем 1.2 и 1.6 для любого НЧ p для почти всех [p]-КДЧ $x^{[p]}$ выполнено: если $\neg\exists m(x^{[p]} \in (H_m)^0)$, то $D^{[0]}(0, \mathscr{G}, x^{[p]})$ и, следовательно, $D^{[0]}(0, \mathscr{F}, x^{[p]})$ (см. (60)).

2) Ввиду теорем 2.12, 2.13, 2.2 и 2.4 мы можем ограничиться следующим.

Пусть $\{\varphi_m\}_m^{[0]}$ [0]-последовательность возрастающих на $0 \triangle 1$ [0]-функций такая, что $\forall m\, \mathscr{W}(\mathscr{F}^{[H_m]}, \varphi_m)$. Мы построим возрастающую на $0 \triangle 1$ [0]-функцию φ, для которой выполнено $\varphi = \frac{1}{2} \,.\, \psi_0 + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m-2} \,.\, \varphi_m$. Но тогда ввиду 1), леммы 2.5 и следствия 2 теоремы 4 из [20] верно $\mathscr{W}(\mathscr{F}, \varphi) \,\&\, (\forall m\, Д^{[0]}(\varphi_m) \supset \supset Д^{[0]}(\varphi))$.

Пример 2.6. Существуют [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{F}$ [0]-слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ и $S_\sigma^{[0]}$-множество $\{H_m\}_m^{[0]}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2}$ такие, что

$$\begin{aligned} &\{H_m\}_m^{[0]} \subseteq 0 \triangle 1 \,\&\, \forall x^{[0]}(|\mathscr{F}(x^{[0]})| > 0 \supset \exists m(x^{[0]} \in (H_m)^0)) \,\& \\ &\& \,\forall m\, \mathrm{AC}(\mathscr{F}^{[H_m]}) \,\&\, \mathrm{ACG}_{\bigcirc}(\mathscr{F}) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$Д^{ak}(\mathscr{F}) \,\&\, Д^{[1]}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}) \,\&\, \forall m\, \mathfrak{P}(\mathscr{F}^{[H_m]})$$

и ряд $\sum_m \langle \omega, \mathscr{F} \rangle (H_m)$ псевдосходится, однако выполнено $\neg \mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F})$.

Определения (ср. [23]). 1) Множество [0]-КДЧ $\mathfrak{L}$ мы назовем правильным, если

$$\forall x^{[0]} y^{[0]}((x^{[0]} \in \mathfrak{L} \supset x^{[0]} \in 0 \triangle 1) \,\&\, (x^{[0]} = y^{[0]} \supset (x^{[0]} \in \mathfrak{L} \equiv y^{[0]} \in \mathfrak{L})))\,.$$

2) Правильное множество [0]-КДЧ $\mathfrak{L}$ мы назовем [0]-измеримым по Лебегу и [0]-КДЧ z – мерой этого множества, если существует $\{\mathfrak{M}_n\}_n^{[0]} \in \mathbf{M}$ (см. [8]) такое, что для почти всех [0]-КДЧ $x^{[0]}$ выполнено $(x^{[0]} \in \{\mathfrak{M}_n\}_n^{[0]} \equiv$ $\equiv x^{[0]} \in \mathfrak{L})$ и верно $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n^{[0]}) = \mathrm{z}$.

3) Пусть для K выполнено $\mathrm{K} \mathrel{\dot{=}} \mathfrak{P} \vee \mathrm{K} \mathrel{\dot{=}} \mathrm{w}\mathfrak{P}$, пусть $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, $\mathfrak{L}$ [0]-измеримое по Лебегу правильное множество [0]-КДЧ (соотв. H [0]-сегмент, $\mathrm{H} \subseteq 0 \triangle 1$) и пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_n^{[0]} \in \mathbf{M}$ такое, что для почти всех [0]-КДЧ $x^{[0]}$ верно $x^{[0]} \in \{\mathfrak{M}_n\}_n^{[0]} \equiv x^{[0]} \in \mathfrak{L}$ (соотв. $x^{[0]} \in \{\mathfrak{M}_n\}_n^{[0]} \equiv x^{[0]} \in \mathrm{H}$).

а) Мы скажем, что $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ является K-интегрируемым на $\mathfrak{L}$ (соотв. на H), если

$$\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \cdot \chi[\{\mathfrak{M}_n\}_n^{[0]}] \tag{61}$$

(см. [8]) является K-интегрируемым на $0 \triangle 1$.

б) [0]-функцию $\mathscr{F}$ мы назовем неопределенным K-интегралом от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $\mathfrak{L}$(соотв. на H), если $\mathscr{F}$ неопределенный K-интеграл от (61) на $0 \triangle 1$.

Замечание 2.7. Пусть для K выполнено $\mathrm{K} \mathrel{\dot{=}} \mathfrak{P} \vee \mathrm{K} \mathrel{\dot{=}} \mathrm{w}\mathfrak{P}$, пусть $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in$ $\in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, $\mathfrak{L}_0$ и $\mathfrak{L}_1$ [0]-измеримые по Лебегу правильные множества [0]-КДЧ такие, что мера $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$ равна нулю, и пусть H [0]-сегмент, $\mathrm{H} \subseteq 0 \triangle 1$. Тогда

1) если [0]-функция $\mathscr{F}$ является неопределенным K-интегралом от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, то ввиду теорем 2.1, 2.12 и 2.13 [0]-функция $\mathscr{F}^{[\mathrm{H}]}$ – неопределенный K-интеграл от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на H, т. е. на множестве $\wedge x^{[0]}(x^{[0]} \in \mathrm{H})$.

2) если для i, $0 \leqq i \leqq 1$, $\mathscr{F}_i$ неопределенный K-интеграл от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $\mathfrak{L}_i$, то ввиду теорем 2.12 и 2.13 и [8] $(\mathscr{F}_0 + \mathscr{F}_1)$ неопределенный K-интеграл от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2$.

Непосредственным следствием теоремы 2.17 является следующее утверждение.

Теорема 2.19. Пусть $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, $\mathscr{F}$ [0]-функция и $\{\mathrm{x}_m\}_m^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-КДЧ из $0 \bigtriangledown 1$ такая, что $\mathrm{x}_m \xrightarrow[m \to \infty]{[0]} 1$. Тогда $\mathscr{F}$ является неопределенным $\mathfrak{P}$-интегралом (соотв. w$\mathfrak{P}$-интегралом) от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если для всякого НЧ m [0]-функция $\mathscr{F}^{[0 \triangle \mathrm{x}_m]}$ является неопределенным $\mathfrak{P}$-интегралом (соотв. w$\mathfrak{P}$-интегралом) от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle \mathrm{x}_m$.

Теорема 2.20. Пусть для K верно $\mathrm{K} \mathrel{\dot{=}} \mathfrak{P} \vee \mathrm{K} \mathrel{\dot{=}} \mathrm{w}\mathfrak{P}$, пусть $\{H_m\}_m^{[0]}$ $S_\sigma^{[0]}$-множество, $\mathscr{H}(\{H_m\}_m^{[0]})$, $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}\mathrm{S}^{[0]}$, $\mathscr{F}$ [0]-функция, являющаяся неопределенным K-интегралом от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $\wedge x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg\exists m(x^{[0]} \in H_m))$, и $\{\mathscr{F}_m\}_m^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-равномерно непрерывных [0]-функций такая, что

1) для всякого НЧ m

а) если $\neg(H_m \subseteq 0 \triangle 1)$, то $\forall x^{[0]}(\mathscr{F}_m(x^{[0]}) = 0)$,

б) если $H_m \subseteq 0 \triangle 1$, то $\mathscr{F}_m$ неопределенный K-интеграл от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на H_m и $\mathscr{F}_m(0) = 0$,

2) ряд $\sum\limits_m \langle \omega, \mathscr{F}_m \rangle (H_m)$ [0]-сходится.

Тогда [0]-функция $(\mathscr{F} + \sum\limits_{m=0}^{\infty} \mathscr{F}_m)$ является неопределенным K-интегралом от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ и, следовательно, $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ является K-интегрируемым на $0 \triangle 1$.

Доказательство. 1) Согласно предположениям теоремы, теореме 2.14, теореме 8 из [23] и теоремам 1.6 и 1.2 выполнено

$$\forall m(\mathscr{F}_m = (\mathscr{F}_m)^{[H_m]} \mathbin{\&} \mathscr{F}_m(\text{Эл}(H_m)) = 0)$$

и существует [0]-абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathscr{G}$ такая, что $\mathscr{G} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} [\mathscr{F}_m, H_m]$ и для любого НЧ p для почти всех $[p]$-КДЧ $x^{[p]}$ верно

$$\neg \exists m(x^{[p]} \in (H_m)^0) \supset D^{[0]}(0, \mathscr{G}, x^{[p]}) .$$

2) Существуют [0]-равномерно непрерывные [0]-функции $\mathscr{K}_0$ и $\mathscr{K}$, для которых выполнено $\mathscr{K}_0 = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \mathscr{F}_m$, $\mathscr{K} = \mathscr{K}_0 - \mathscr{G}$ и, таким образом,

$$\forall x^{[0]}(|\mathscr{K}(x^{[0]})| > 0 \supset \exists m(x^{[0]} \in (H_m)^0)) ,$$

ряд $\sum\limits_m \langle \omega, \mathscr{K} \rangle (H_m)$ [0]-сходится и ввиду теорем 2.6, 2.12, 2.13 и 2.18, леммы 1.8, следствия теоремы 3 из [22] и 1) верно

$$(\forall m\, \mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}_m) \supset \mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{K}) \mathbin{\&} \mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{K}_0)) \mathbin{\&} (\forall m\, \mathfrak{P}(\mathscr{F}_m) \supset \mathfrak{P}(\mathscr{K}) \mathbin{\&} \mathfrak{P}(\mathscr{K}_0))$$

и для любого НЧ p для почти всех $[p]$-КДЧ $x^{[p]}$ выполнено

$$\neg \exists m(x^{[p]} \in (H_m)^0) \supset D^{[0]}(0, \mathscr{K}_0, x^{[p]}) .$$

3) Согласно 2) [0]-функция $\mathscr{K}_0$ является неопределенным K-интегралом от $\{\mathrm{F}_n\}_n^{[0]}$ на [0]-измеримом по Лебегу правильном множестве [0]-КДЧ

$$\wedge\, x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangle 1 \mathbin{\&} \neg\neg \exists m(x^{[0]} \in H_m))$$

(см. [8]). Для завершения доказательства достаточно применить замечание 2.7.

Мы каснемся вопросов дифференцируемости неопределенных w$\mathfrak{P}$-интегралов на [0]-конструктивных действительных числах.

Пример 2.7. Существует [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{F}$ [0]-слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ такая, что

а) выполнено $\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \mathbin{\&} \mathrm{ACG}_{\bigcirc}(\mathscr{F})$,

б) для любого $S_\sigma^{[0]}$-множества $\mathfrak{H}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2}$ имеет место

$$\exists x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \mathbin{\&} \neg(x^{[0]} \in \mathfrak{H}) \mathbin{\&} \neg D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, x^{[0]}))$$

и, следовательно, верно $\neg\, \mathrm{der}^{[0]}(\mathscr{F})$,

в) $\mathscr{F}$ не обладает свойством (N)*.

Лемма 2.11. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция и $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\mathbf{n}}\mathrm{S}^{[0]}$ такие, что $\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$. Тогда существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция φ такая, что

$$\forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \,\&\, \neg D_{\ell\ell}(+\infty, \varphi, x^{[0]}) \supset$$
$$\supset \exists y^{[0]}(\mathrm{P}^{[0]}(y^{[0]}, \{F_n\}_n^{[0]}, x^{[0]}) \,\&\, D_{\ell\ell}(y^{[0]}, \mathscr{F}, x^{[0]}))).$$

Доказательство. Ввиду леммы 1.4 из [6] и леммы 1.16 верность утверждения непосредственно следует из части 2 леммы 2.1 и следствия леммы 1.30.

На основании результатов из [8] и замечания 2 из [13] легко доказать следующее утверждение.

Лемма 2.12. Пусть φ неубывающая [0]-функция и $\mathfrak{L}$ [0]-измеримое по Лебегу правильное множество [0]-КДЧ положительной меры. Тогда

$$\exists x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \,\&\, x^{[0]} \in \mathfrak{L} \,\&\, \neg D_{\ell\ell}(+\infty, \varphi, x^{[0]})).$$

Пример 2.8. Существуют [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{F}$ [0]-слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ и $S_\sigma^{[0]}$-множество $\mathfrak{H}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2}$ такие, что

$$\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathrm{ACG}_{\bigcirc}(\mathscr{F}) \,\&\, \forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg(x^{[0]} \in \mathfrak{H}) \supset \neg D^{[0]}(\mathscr{F}, x^{[0]})).$$

Пример 2.9. Существует псевдоравномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{F}$ [0]-слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ такая, что

а) $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}) \,\&\, \neg\exists\xi^{[0]}(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \vee \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}))$ и, следовательно, $\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F})$,

б) для всякой неубывающей [0]-функции φ существует [0]-КДЧ x такое, что $0 < \mathrm{x} < 1 \,\&\, \neg D_{\ell\ell}(+\infty, \varphi, \mathrm{x}) \,\&\, \neg\, D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \mathrm{x})$.

Замечание 2.8. 1) Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция и $\{\mathrm{v}_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-КДЧ такие, что

$$\forall\xi^{[0]}(\neg\exists k(\xi^{[0]} = \mathrm{v}_k) \supset \neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \vee \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}))).$$

Тогда $\mathscr{N}(\mathscr{F})$ (лемма 2 из [18]) и ввиду теоремы 8 из [23] и лемм 1.15 и 1.13 можно построить возрастающую на $0 \triangle 1$ [0]-функцию ψ такую, что (39), (41), $\mathscr{W}(\mathscr{F}, \psi) \,\&\, \mathrm{AC}(\psi) \,\&\, \mathrm{AC}(\psi^{-1})$, (43) и (44). Следовательно, верно

а) $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}) \supset \mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F})$ (теорема 2.2),

б) если $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна, то

$\text{Д}^{a\mathscr{k}}(\mathscr{F}) \supset \mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathrm{WACG}(\mathscr{F})$ (теорема 2.11, лемма 3 из [22] и следствие 3 теоремы 2.11) и

$\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}) \supset \mathrm{ACG}_*(\mathscr{F})$ (теорема 18 из [22]).

2) Если $\mathscr{F}$ [0]-функция, $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ и $\{v_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-КДЧ такие, что $\forall\xi^{[0]}(\neg\exists k(\xi^{[0]} = v_k) \supset D^{[1]}(\mathscr{F}, \xi^{[0]}))$ и для почти всех [0]-КДЧ $x^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ верно $\exists y^{[0]}(P_{\ell\ell}(y^{[0]}, \{F_n\}_n^{[0]}, x^{[0]}) \,\&\, D_{\ell\ell}(y^{[0]}, \mathscr{F}, x^{[0]}))$, то ввиду релятивизации утверждения II б из [4] выполнено $\mathrm{der}^{[1]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$ и, следовательно, согласно 1) верно $w\mathfrak{P}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$. (Ср. с интегралом Ньютона.)

В заключение мы займемся сравнением введенных нами конструктивных интегралов. Сначала мы приведем несколько примеров.

Пример 2.10. Существуют [0]-функция $\mathscr{F}$, $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$, регулярное [0]-покрытие Ψ и [0]-Π_1Ч η такие, что $\underline{\eta}$ неубывающая [0]-последовательность РЧ и

1) выполнено

$$\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \,\&\, Д^{[0]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$$

и

$$\forall k\, AC(\mathscr{F}^{[\Psi_k]}) \,\&\, [\mathscr{F}, \Psi] = 0 \,\&\, \forall x^{[0]} D^{[0]}(\mathscr{F}, x^{[0]}) \,\&$$

$$\&\, \eta \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg\exists k(\eta \in \Psi_k) \,\&\, \forall\xi^{[0]}(\neg(\xi^{[0]} = \eta) \supset D^{[1]}(\mathscr{F}, \xi^{[0]})), \qquad (62)$$

2) не существует надфункция (соотв. подфункция) для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$, которая обладает свойством $(T_1)^*$ (т. е. которая является [0]-функцией типа αG_* – см. теоремы 15 и 5 из [22]),

3) если $\mathscr{G}$ [0]-функция такая, что $(\mathfrak{T}(\mathscr{G}) \vee ACG_*(\mathscr{G}))$, то $\mathrm{Var}(+\infty, \mathscr{G} - \mathscr{F}, 0 \triangle 1)$.

Пример 2.11. Существуют [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{F}$, наследно регулярное [0]-покрытие (см. [20]) Ψ и [0]-Π_1Ч η такие, что

1) выполнено (62) и, следовательно, $Д^{[0]}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathfrak{T}(\mathscr{F}) \,\&\, \mathscr{N}(\mathscr{F}) \,\&\, ACG(\mathscr{F})$,

2) если $\mathscr{G}$ [0]-функция такая, что $w\mathfrak{P}(\mathscr{G})$, то $\mathrm{Var}(+\infty, \mathscr{G} - \mathscr{F}, 0 \triangle 1)$.

Пример 2.12. Существуют [0]-функция $\mathscr{F}$, возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция g и [0]-последовательность [0]-квазичисел (см. [5], стр. 36) $\{w_k\}_k^{[0]}$ такие, что

а) $$g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1 \,\&\, AC(g) \,\&\, \forall k(2^{-k-1} < w_k < 2^{-k}) \,\&$$

$$\&\, \forall\xi^{[0]}((\neg\exists k(\xi^{[0]} = w_k) \supset \neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F} * g, \xi^{[0]}) \vee \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F} * g, \xi^{[0]}))) \,\&$$

$$\&\, (\neg\exists k(\xi^{[0]} = Op[g](w_k)) \supset \neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \vee \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]})))) ;$$

б) $$\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \,\&\, WAC(\mathscr{F}) \,\&\, w\mathfrak{P}(\mathscr{F} * g) \,\&\, \mathfrak{T}(\mathscr{F} * g) \,\&\, \neg ACG_*(\mathscr{F} * g)$$

и, следовательно,

$$\neg\mathfrak{P}(\mathscr{F} * g) \,\&\, \neg\mathfrak{T}(\mathscr{F}) \,\&\, \neg ACG_*(\mathscr{F}) \,\&\, WAC(\mathscr{F} * g)$$

(см. теорему 14 из [22] и теорему 2.6).

Пример 2.13. Существуют $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\text{п}}S^{[0]}$, [0]-функция $\mathscr{F}$, [0]-последовательность [0]-функций $\{\mathscr{F}_m\}_m^{[0]}$ и [0]-последовательность [0]-квазичисел $\{w_k\}_k^{[0]}$ такие, что

1) а) выполнено $\mathfrak{T}(\mathscr{F})$ & $\mathrm{WAC}(\mathscr{F})$ & $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$,

$$\forall k(2^{-k-1} < w_k < 2^{-k}) \,\&\, \forall \xi^{[0]}(\neg\exists k(\xi^{[0]} = w_k) \supset$$
$$\supset \neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}) \vee \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, \xi^{[0]}))), \tag{63}$$

не существует никакой w-надфункции и никакой w-подфункции для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ и, следовательно,

б) $\{F_n\}_n^{[0]}$ является $\mathfrak{T}$-интегрируемым и $\mathfrak{D}'$-интегрируемым на $0 \triangle 1$, но не является w$\mathfrak{P}$-интегрируемым на $0 \triangle 1$;

2) для всякого НЧ m выполнено

$$\mathrm{BVS}(2^{-m}, \mathscr{F}_m - \mathscr{F}, 0 \triangle 1) \,\&\, \mathfrak{T}(\mathscr{F}_m) \,\&\, \mathrm{ACG}_*(\mathscr{F}_m) \,\&$$
$$\&\, \mathrm{WAC}(\mathscr{F}_m) \,\&\, \mathfrak{P}(\mathscr{F}_m)\,. \tag{64}$$

Пример 2.14. Существуют $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\text{п}}S^{[0]}$, [0]-функция $\mathscr{F}$, [0]-последовательность [0]-функций $\{\mathscr{F}_m\}_m^{[0]}$ и [0]-последовательность [0]-квазичисел $\{w_k\}_k^{[0]}$ такие, что

1) а) $\mathfrak{T}(\mathscr{F})$ & $\mathrm{WAC}(\mathscr{F})$ & $\mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F})$ & $\text{Д}^{[0]}(\mathscr{F}, \{F_n\}_n^{[0]})$, (63), не существует никакой надфункции и никакой подфункции для $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ и, следовательно,

б) $\{F_n\}_n^{[0]}$ является $\mathfrak{T}$-интегрируемым, $\mathfrak{D}'$-интегрируемым и w$\mathfrak{P}$-интегрируемым на $0 \triangle 1$, но не является $\mathfrak{P}$-интегрируемым на $0 \triangle 1$;

2) для всякого НЧ m выполнено (64).

Пример 2.15. Существуют [0]-функция $\mathscr{F}$ и возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция g такие, что

$$\mathfrak{P}(\mathscr{F}) \,\&\, g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1 \,\&\, \mathrm{AC}(g) \,\&\, \text{Д}^{ak}(\mathscr{F} * g) \,\&$$
$$\&\, \mathrm{w}\mathfrak{P}(\mathscr{F} * g) \,\&\, \neg\mathrm{WACG}(\mathscr{F} * g)$$

и, следовательно, $\neg\mathfrak{P}(\mathscr{F} * g)$.

Определения. 1) Мы скажем, что K_0-интеграл и K_1-интеграл согласованы, если для любых $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\text{п}}S^{[0]}$, который является K_0-интегрируемым и K_1-интегрируемым на $0 \triangle 1$, и [0]-функции $\mathscr{F}$ верно: $\mathscr{F}$ является неопределенным K_0-интегралом от $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если $\mathscr{F}$ неопределенный K_1-интеграл от $\{F_n\}_n^{[0]}$ на $0 \triangle 1$.

2) Мы скажем, что K_1-интеграл является расширением K_0-интеграла, если выполнено:

а) K_0-интеграл и K_1-интеграл согласованы,

б) любой K_0-интегрируемый на $0 \triangle 1$ элемент множества ${}^{\text{п}}S^{[0]}$ является K_1-интегрируемым на $0 \triangle 1$, в) существует K_1-интегрируемый на $0 \triangle 1$ элемент множества ${}^{\Pi}S^{[0]}$, который не является K_0-интегрируемым на $0 \triangle 1$.

Мы ввели следующие конструктивные интегралы:
а) интеграл Лебега ($\mathbf{L}$-интеграл) – [7] и [6],
б) $\mathfrak{T}$-интеграл – [20] и [23],
в) узкий интеграл Данжуа ($\mathfrak{D}_*$-интеграл),
$\mathfrak{D}'$-интеграл и
широкий интеграл Данжуа ($\mathfrak{D}$-интеграл) – [23] и
г) интеграл Перрона ($\mathfrak{P}$-интеграл) и
$w\mathfrak{P}$-интеграл – настоящая статья.

Согласно теореме 5 из [22], результатам из [23], замечанию 2.2 и следствию 1 теоремы 2.5 любые два из перечисленных выше интегралов согласованы.

$\mathfrak{D}_*$-интеграл и $\mathfrak{T}$-интеграл являются расширением интеграла Лебега (теорема 5 из [22], теорема 3 из [20] и замечание 6 из [23]).

$\mathfrak{P}$-интеграл является расширением $\mathfrak{D}_*$-интеграла (теорема 2.6 и пример 2.10).

$\mathfrak{D}'$-интеграл и $w\mathfrak{P}$-интеграл являются расширениями $\mathfrak{P}$-интеграла (теорема 2.6 и пример 2.14).

$\mathfrak{D}$-интеграл является расширением $\mathfrak{D}'$-интеграла (теорема 5 из [22] и пример 1 из [23]).

Пусть для K выполнено $K \risingdotseq \mathfrak{D}_* \vee K \risingdotseq \mathfrak{P} \vee K \risingdotseq \mathfrak{D}' \vee K \risingdotseq \mathfrak{D} \vee K \risingdotseq w\mathfrak{P}$. Тогда существуют $\mathfrak{T}$-интегрируемый на $0 \triangle 1$ элемент множества ${}^{\Pi}S^{[0]}$, который не является K-интегрируемым на $0 \triangle 1$, и K-интегрируемый на $0 \triangle 1$ элемент ${}^{\Pi}S^{[0]}$, который не является $\mathfrak{T}$-интегрируемым на $0 \triangle 1$ (замечание 6 из [23] и пример 2.13).

Пусть для K выполнено $K \risingdotseq \mathfrak{D}' \vee K \risingdotseq \mathfrak{D}$. Тогда существуют $w\mathfrak{P}$-интегрируемый на $0 \triangle 1$ элемент множества ${}^{\Pi}S^{[0]}$, который не является K-интегрируемым на $0 \triangle 1$, и K-интегрируемый на $0 \triangle 1$ элемент ${}^{\Pi}S^{[0]}$, который не является $w\mathfrak{P}$-интегрируемым на $0 \triangle 1$ (примеры 2.15 и 2.13).

Пусть $\{F_n\}_n^{[0]} \in {}^{\Pi}S^{[0]}$ и пусть для K выполнено $K \risingdotseq \mathbf{L} \vee K \risingdotseq \mathfrak{D} \vee K \risingdotseq \mathfrak{T} \vee K \risingdotseq w\mathfrak{P}$. Тогда $\{F_n\}_n^{[0]}$ является интегрируемым по Лебегу на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если $|\{F_n\}_n^{[0]}|$ является K-интегрируемым на $0 \triangle 1$ (следствие 4 теоремы 1 из [23], следствие 2 теоремы 2.5, теоремы 2.6 и 2.14 и леммы 1 и 3 из [7]).

Литература

[1] Saks, S., Theory of the Integral, New York, 1937.
[2] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, Москва 1957.
[3] Заславский, И. Д., Труды Мат. инст. им. В. А. Стеклова, том 67, 1962, 385.

[4] Слисенко, А. О., Труды Мат. инст. им. В. А. Стеклова, том 72, 1964, 524.
[5] DEMUTH, O., KRYL, R., KUČERA, A., Acta Univ. Carol. Math. Phys., *19* 1978, 15.
[6] DEMUTH, O., Acta Univ. Carol. Math. Phys., *19* 1978, 61.
[7] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *10* 1969, 261.
[8] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *10* 1969, 463.
[9] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *11* 1970, 667.
[10] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *11* 1970, 705.
[11] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *12* 1971, 587.
[12] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *12* 1971, 687.
[13] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *14* 1973, 7.
[14] DEMUTH, O. ET AL., Comment. Math. Univ. Carol., *14* 1973, 421.
[15] DEMUTH, O. ET AL., Comment. Math. Univ. Carol., *14* 1973, 565.
[16] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *15* 1974, 195.
[17] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *16* 1975, 315.
[18] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *16* 1975, 583.
[19] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *17* 1976, 111.
[20] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *18* 1977, 499.
[21] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *19* 1978, 319.
[22] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *19* 1978, 471.
[23] DEMUTH, O., Comment. Math. Univ. Carol., *20* 1979, 213.