M. D. Ramazanov

Построение кубатурных формул для многомерных областей с гладкими границами

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 15 (1974), No. 1-2, 137--140

1974 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE - MATHEMATICA ET PHYSICA NO. 1-2 PAG. 137-140

Построение кубатурных формул для многомерных областей с гладкими границами

М. Д. РАМАЗАНОВ

Башкирский Государственный Университет, Уфа

M. D. Ramazanov: On the construction of the cubature formulae for multidimensional domains with smooth boundaries. — In this work sufficient conditions are found for asymptotic optimality of cubature formulae with points in the nets. The cubature formulae are given for construction of domains with smooth boundaries.

1. Приближенные вычисления интегралов $\int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x$, где $x \in \Omega \subset R^n$, проводятся по квадратурным (кубатурным) формулам вида $\sum\limits_{x^{(k)} \in \Omega} a_k f(x^{(k)})$, где точки $x^{(k)}$ называются узлами, а коэффициенты a_k весами формул. Погрешность вычисления удобно рассматривать как значение обобщенной функции $l(x) = \chi_\Omega(x) - \sum\limits_{x^{(k)} \in \Omega} a_k \delta(x - x^{(k)})$ на заданной функции $f(x)$.

Здесь $\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, x \in \Omega, \\ 0, x \overline{\in} \Omega, \end{cases}$ $\delta(x)$ — δ-функция.

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{x^{(k)} \in \Omega} a_k f(x^{(k)}) = \langle l(x), f(x) \rangle . \tag{1}$$

Мы кратко описываем результаты того направления теории приближенного интегрирования, в котором $l(x)$ рассматривается как линейный непрерывный функционал над некоторым подходящим банаховым пространством основных функций $f(x)$. Ставится задача минимизации нормы $l(x)$ по различным весам и узлам при заданном их числе. См. работы [3], [1], [4], [5]. В более узкой постановке задачи узлы кубатурной формулы берутся на некоторой решетке:

$x^{(k)} = Akh$, где A — матрица $n \times n$, $\det A = 1$; $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; h — малый параметр.

Для простоты в нашем описании будем считать A единичной матрицей, то-есть возьмем прямоугольную решетку. Положив $a_k = h^n c_k$, запишем формулу (1) в виде

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x - h^n \sum_{kh \in \Omega} c_k f(kh) = \langle \chi_\Omega(x) - h^n \sum_{kh \in \Omega} c_k \delta(x - kh), f(x) \rangle . \tag{2}$$

Сформулируем один из основных, принадлежащих Соболеву С. Л., результатов.

Определение 1. Функционалом погрешности кубатурной формулы $h^n \sum\limits_{kh\in\Omega} c_k f(kh)$ называется последовательность по h при $h \to 0$ обобщенных функций вида

$$l_h^{\Omega}(x) = \chi_{\Omega}(x) - h^n \sum_{kh\in\Omega} c_k \,\delta(x - kh) .$$

Рассматриваются функции $f(x)$, заданные на ограниченной области Ω и образующие банахово пространство B (сопряженное — $B^{\star}$), вложенное в пространство непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций.

Определение 2. Оптимальным функционалом погрешности называется функционал погрешности $l_h^{0,\Omega}(x)$, веса $c_k^0(h)$ которого при каждом рассматриваемом h реализуют

$$\inf_{c_k} \|\chi_{\Omega}(x) - h^n \sum_{kh\in\Omega} c_k \,\delta(x - kh) \mid B^{\star}\| \equiv I(h) .$$

Определение 3. Асимптотически оптимальным функционалом погрешности называется функционал погрешности $l_h^{a,\Omega}(x)$, удовлетворяющий условию

$$\lim_{h\to 0} \|l_h^{a,\Omega}(x) \mid B^{\star}\| \,/\, I(h) = 1 .$$

Определение 4. Функционал погрешности $l_h^{\Omega}(x)$ обладает регулярным пограничным слоем порядка m, если он может быть представлен в виде суммы

$$l_h^{\Omega}(x) = \sum_{k,\rho(kh,C\Omega) > L_1 h} \lambda\left(\frac{x - kh}{h}\right) + \sum_{k,\varrho(kh,C\Omega) \le L_1 h} \lambda_k(x) .$$

Причем отдельные слагаемые суммы обладают свойствами

1) $\lambda(x) = \chi Q(x) - \sum\limits_{|k|\leqslant L_2} b_k \delta(x - k), \quad Q = \{x \mid 0 \leqslant x_j < 1;\ \ j = 1, \ldots, n\}$,

2) $$\omega_k = \left\{ x \mid x \in \Omega,\ \frac{x}{h} - k \in Q \right\},$$

$$\lambda_k(x) = \chi_{\omega_k}(x) - h^n \sum_{\substack{|k|\leqslant L_2 \\ kh\in\Omega}} b_k \delta(x - kh), \qquad |b_k| \leqslant L_3 ,$$

3) $$\langle \lambda(x),\ x^{\alpha} \rangle = 0 , \quad \langle \lambda_k(x),\ x^{\alpha} \rangle = 0 , \quad |\alpha| \leqslant m .$$

Постоянные L_1, L_2, L_3 не зависят от h.

Определение 5. Гильбертово пространство $L_2^{(m)}(\Omega)$ состоит из определенных на Ω функций $f(x)$ с конечной полунормой

$$\|f(x) \mid L_2^{(m)}(\Omega)\| = \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| = m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \ |D^{\alpha} f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} .$$

Теорема (Соболев С.Л.) Функционал с регулярным пограничным слоем порядка m асимптотически оптимален над пространством $L_2^{(m)}(\Omega)$

Для многогранников с рациональными вершинами Соболевым С.Л. были предложены эффективные способы вычисления интегралов с помощью кубатурных формул с регулярным пограничным слоем. Эти результаты были обобщены и развиты в работах Войтишек Л. В., Половинкина В. И., Шойнжурова Ц. Б. и др., в которых были рассмотрены различные нормировки $W_p^{(m)}(\Omega)$ пространств, а также произведены численные построения на ЭВМ кубатурных формул для некоторых многограников — см. [6], [7].

2. В наших исследованиях за основное мы взяли понятие ослабленно регулярного пограничного слоя.

Определение 6. Функционал погрешности $l_h^{\Omega}(x)$ обладает ослабленно регулярным пограничным слоем, если существуют две не зависящие от h постоянные L_1 и L_2, с которыми выполняются свойства

$$\sup_h \max_k |c_k(h)| \leqslant L_1 \quad \text{то } c_k = 1,$$

и, если $\rho(kh, C\Omega) > L_2 h$.

Один из главных результатов можно сформулировать в следующем виде.

Теорема. Пусть Ω — область с кусочно гладкой границей. Если $l_h^{\Omega}(x)$ — функционал с ослабленно регулярным пограничным слоем, норма которого над пространствами $W_1^{(m)}(\Omega)$ имеет порядок $h^m (h \to 0)$ для всех $m \in [M_1, M_2]$, то $l_h^{\Omega}(x)$ асимптотически оптимален над банаховым пространством

$$B^m(\Omega) = W_2^{(m)}(\Omega) \quad \text{или} \quad C^m(\overline{\Omega}) \quad \text{для} \quad m \in [M_1, M_2] .$$

Замечания

1. Норма пространства $C^m(\overline{\Omega})$ при целых m определяется с помощью вторых разностей от производных $(m - 1)$ порядка.

2. Пространства берутся в одной из эквивалентных норм.

3. Для краткости мы не останавливаемся на аналогичных результатах, например, для пространств функций, обладающих разной гладкостью по разным направлениям.

Достаточные условия последней теоремы позволили применить к построению асимптотически оптимальных кубатурных формул локальные методы из теории линейных уравнений с частными производными. А именно, распрямление границы области в малых окрестностях некоторых точек, построение вспомогательных «локальных» кубатурных формул у плоских границ, построение полной кубатурной формулы из набора «локальных» формул.

Для примера и первого опыта реализации предложенного метода была составлена программа вычисления интегралов по кругу на ЭВМ БЭСМ-4.

Литература

[1] Никольский, С. М.: Квадратурные формулы. Физматгиз, Москва (1956).
[2] Рамазанов, М. Д.: Построение асимптотически оптимальной формулы над пространством $W_2^m(\Omega)$. ДАН СССР 202, 290 (1972).
[3] Сард, А. (Sard A.): Linear Approximation. A. M. S. Providence (1963).
[4] Соболев, С. Л.: Лекции по теории кубатурных формул, 1, II. Новосибирск, НГУ (1964, 1965)
[5] Соболь, И. М.: Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. Наука, Москва, (1969).
[6] Труды 1 Всесоюзного коллоквиума по кубатурным формулам. Ташкент, 1969. Сборник «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. 38. Издание Института Кибернетики АН Уз ССР. Ташкент. (1970).
[7] Труды II Всесоюзного коллоквиума по кубатурным формулам. Ташкент (1971). Сборник «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. 14. Издание Института Кибернетики АН Уз ССР. Ташкент (1972).