G. Porath

Über die numerische Behandlung VOLTERRAscher Integralgleichungen zweiter Art

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 15 (1974), No. 1-2, 121--123

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/142339

1974 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE – MATHEMATICA ET PHYSICA NO. 1–2 PAG. 121–123

Über die numerische Behandlung VOLTERRAscher Integralgleichungen zweiter Art

G. PORATH
Pädagogische Hochschule, Güstrow

It is considered the replace-operator method for linear Volterra integral equations of second kind.

Bei der numerischen Behandlung linearer Integralgleichungen zweiter Art nach der Quadraturformelmethode läßt sich die Theorie des Ersatzoperatorenverfahrens von Gawurin [1] verwenden.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist das Ersatzoperatorenverfahren für die lineare Volterrasche Integralgleichung zweiter Art

$$f(x) - \int_a^x k(x, u) f(u) \, du = g(x) . \tag{1}$$

Der Kern $k(x, u)$ ist eine stetige reelle Funktion auf dem Dreieck

$$D = \{(x, u) \mid a \leqq x \leqq b, \; a \leqq u \leqq x\} .$$

Die Gleichung (1) ist eine lineare Funktionalgleichung

$$f - Kf = g \tag{2}$$

im Banach-Raum C der stetigen reellen Funktionen auf $\langle a, b \rangle$, und für jedes Element $g \in C$ existiert die eindeutig bestimmte Lösung $f \in C$. K ist der Volterrasche Integraloperator zum Kern $k(x, u)$ mit der Definitionsgleichung

$$Kf = \int_a^x k(x, u) f(u) \, du . \tag{3}$$

Das Ersatzoperatorenverfahren für die Gleichung (2) liefert für jede Schrittweite $h = \frac{1}{n}(b - a), n = 1, 2, \ldots$ eine lineare Funktionalgleichung

$$f_h - K_h f_h = g_h \tag{4}$$

in einem endlich-dimensionalen Banach-Raum B_h.

Diese Gleichung mit den Elementen

$$\begin{aligned} f_h &= (\bar{f}_0, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n) \\ g_h &= (\bar{g}_0, \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_n) = (g(x_0), g(x_1), \ldots, g(x_n)) \\ x_i &= a + i \, . \, h , \qquad i = 0, 1, \ldots, n \end{aligned}$$

besitzt die Gestalt

$$\begin{aligned} & & \bar{f}_0 &= \bar{g}_0 & & \\ \bar{f}_i - h \sum_{k=0}^{i} c_{ik}\, k(x_i, x_k) & & \bar{f}_k &= \bar{g}_i & \quad i &= 1, 2, \ldots, n\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Der Ersatzoperator K_h entsteht durch Anwendung eines Quadraturverfahrens auf die Integralwerte

$$(Kf)(x_i) = \int_a^{x_i} k(x_i, u) f(u)\, \mathrm{d}u \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Die Beziehung

$$l_h = K_h f_h$$

mit den Elementen

$$f_h = (\bar{f}_0, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n)\,,$$

$$l_h = (\bar{l}_0, \bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_n)$$

ist dann durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{l}_0 &= 0 \\ \bar{l}_i &= h \sum_{k=0}^{i} c_{ik}\, k(x_i, x_k) f_k \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{6}$$

definiert. Die Konstanten c_{ik} $\quad i = 1, 2, \ldots, n$

$$k = 0, 1, \ldots, i$$

sind die Quadraturkoeffizienten der verwendeten Quadraturformeln: verallgemeinerte Trapezregel, eine Kombination der Trapezregel, der Simpson-Regel und der Newton-Formel.

Die Lösung f_h der Gleichung (4) ist dann ein Näherungswert für

$$\tilde{f}_h = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n))\,.$$

Aus der Lösung f_h der Ersatzgleichung (4) entsteht durch stückweise lineare Interpolation eine Näherungslösung $f_h^* \in C$ für die Lösung f.

Das Ersatzoperatorenverfahren liefert Abschätzungen für

$$\|f_h - \tilde{f}_h\|_{(h)} = \max_{i=0,\ldots,n} |\bar{f}_i - f(x_i)|$$

$$\|f_h^* - f\| = \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f_h^*(x) - f(x)|$$

und Bedingungen für

$$\lim_{h \to 0} \|f_h - \tilde{f}_h\|_{(h)} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \|f_h^* - f\| = 0\,.$$

Eine ausführliche Darstellung der funktionalanalytischen Theorie des Ersatzoperatorenverfahrens für die Volterrasche Integralgleichung (1) erscheint unter dem Titel: Das Ersatzoperatorenverfahren für lineare Volterrasche Integralgleichungen zweiter Art in der Schriftenreihe „Beiträge zur Numerischen Mathematik", Heft III/IV.

Literatur

[1] GAWURIN, M. K.: Vorlesungen über Berechnungsmethoden. Moskau (1971).